ИЗОМОРФНО-КОМПАТИБИЛНИ ФАМИЛИИ АСОЦИЈАТИВИ

Наум Целакоски

Во работата [2] се дефинира поимот изоморфно-компатибилна фамилија полугрупи и се докажуваат неколку резултати во врска со тоа. Адаптирајќи го тој поим за структурите со една $(n+1)$-арна асоцијативна операција, наречени n-асоцијативи, во овој напис се формулираат и се докажуваат аналози на резултатите од работата [2].

1. Нека I е непразно множество и $\{A_i \mid i \in I\}$ фамилија n-асоцијативи[1]), при што операцијата во n-асоцијативот A_i е означена со $\omega_i(i \in I)$. Ако од $a_0 a_1 \cdots a_n \omega_i = a$ во $A_i(\omega_i)$ и $a_0 a_1 \cdots a_n \omega_j = b$ во $A_j(\omega_j)$ следува $a = b$ за секои $i, j \in I$, тогаш фамилијата $\{A_i \mid i \in I\}$ се вика *компатибилна* фамилија n-асоцијативи. (За $n = 1$, т.е. за полугрупи, тој поим е воведен во [1].) Една фамилија $\{A_i \mid i \in I\}$ се вика *изоморфно-компатибилна* фамилија n-асоцијативи, ако постои фамилија пресликувања, $\{\varphi_{ij} \mid i, j \in I\}$, при што φ_{ij} е изоморфизам од асоцијативот A_i на асоцијативот A_j, со следниве особини:

(i) $\varphi_{ii} = 1_{A_i}$;

(ii) $\varphi_{ij}\,\varphi_{jk} = \varphi_{ik}$;

(iii) Ако $A_{ij} = A_i \cap A_j = A_{ji} \neq \emptyset$, тогаш A_{ij} е лев идеал во A_i и во A_j и притоа $\varphi_{ij} \mid A_{ij} = \varphi_{ji} \mid A_{ji} = 1_{A_{ij}}$.

Ако $\{A_i \mid i \in I\}$ е изоморфно-компатибилна фамилија n-асоцијативи, тогаш таа е и компатибилна. Навистина, ако $x_0, x_1, \ldots, x_n$ се елементи од пресекот на асоцијативите $A_i(\omega_i)$ и $A_j(\omega_j)$, тогаш, користејќи го (iii), добиваме:

$$\begin{aligned} x_0 x_1 \cdots x_n \omega_i &= (x_0 x_1 \cdots x_n \omega_i)\,\varphi_{ij} = \\ &= x_0 \varphi_{ij}\, x_1 \varphi_{ij} \cdots x_n \varphi_{ij}\, \omega_j = \\ &= x_0 x_1 \cdots x_n\, \omega_j. \end{aligned}$$

---

[1]) Непразно множество со една $(n+1)$-арна асоцијативна операција се вика n-асоцијатив (или само асоцијатив, ако е јасно дека не ќе има недоразбирање во арноста на операцијата.)

Да ставиме $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ и да дефинираме $(n+1)$-арна операција ω во A на следниов начин:

$$x_1 x_2 \cdots x_n y \omega = x_1 \varphi_{i_1 j} x_2 \varphi_{i_2 j} \cdots x_n \varphi_{i_n j} y \omega_j , \tag{1.1}$$

каде што $x_\nu \in A_{i_\nu}$, $y \in A_j$.

Ќе покажеме дека е точна следнава теорема:

Теорема 1. *Унијата A на дадена изоморфно-компатибилна фамилија n-асоцијативи, $\{A_i(\omega_i) \mid i \in I\}$, во однос на $(n+1)$-арната операција ω определена со (1.1) е n-асоцијатив.*

Секој од дадените n-асоцијативи A_j е лев идеал во A.

Асоцијативот $A(\omega)$ не зависи (до изоморфизам) од системот изоморфизми $\{\varphi_{ij} \mid i, j \in I\}$.

Доказ. Да покажеме прво дека $(n+1)$-арната операција ω определена со (1.1) е добро дефинирана, т.е. еднозначна. Нека $x_\nu \in A_{i_\nu} \cap A_{r_\nu}$ и $y \in A_j \cap A_s$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$. Треба да покажеме дека производот $x_1 \varphi_{i_1 j} \cdots x_n \varphi_{i_n j} y \omega_j = z$ (во A_j) е еднаков со производот $x_1 \varphi_{r_1 s} \cdots \cdots x_n \varphi_{r_n s} y \omega_s$ (во A_s). Имајќи предвид дека φ_{js} е изоморфизам и користејќи го (ii), добиваме

$$z \varphi_{js} = y_1 \varphi_{i_1 s} \cdots x_n \varphi_{i_n s} y \omega_s = [\text{според (iii): } x \varphi_{i_\nu r_\nu} = x \varphi_{r_\nu i_\nu} = x] =$$

$$= x_1 \varphi_{r_1 i_1} \varphi_{i_1 s} \cdots x_n \varphi_{r_n i_n} \varphi_{i_n s} y \omega_s =$$

$$= x_1 \varphi_{r_1 s} \cdots x_n \varphi_{r_n s} y \omega_s,$$

што значи $(n+1)$-арната операција ω е еднозначна.

Со директна проверка, користејќи ја дефиницијата (1.1) и асоцијативноста на операциите $\omega_i (i \in I)$, се покажува дека операцијата ω е асоцијативна. Значи, $A(\omega)$ е асоцијатив.

Според (1.1) имаме $A^n A_i \omega_i \subseteq A_i$ за секој $i \in I$, што значи дека A_i е лев идеал во A.

Да покажеме дека $A(\omega)$ не зависи од системот изоморфизми. За таа цел нека $\{\psi_{ij} : A_i \to A_j \mid i, j \in I\}$ е друг систем изоморфизми со особините (i), (ii) и (iii). Ако дефинираме $(n+1)$-арна операција ω' на A со:

$$x_1 \cdots x_n y \omega' = x_1 \psi_{i_1 j} \cdots x_n \psi_{i_n j} y \omega_j , \tag{1.1'}$$

каде што $x_\nu \in A_{i_\nu}$, $\nu = 1, \ldots, n$, $y \in A_j$, добиваме n-асоцијатив $A(\omega')$. Ќе покажеме дека $A(\omega')$ е изоморфен со $A(\omega)$. Нека е k фиксен елемент од I. Пресликувањето $\tau : A \to A$ дефинирано со:

$$(\forall\, x_i \in A_i \subseteq A, \quad i \in I) \; x_i \tau = x_i \psi_{ik} \varphi_{ki} \tag{1.2}$$

е биекција (како производ на две биекции) и притоа, за кои било $x_0, x_1, \ldots, x_n \in A$, имаме:

$$\begin{aligned}(x_0 x_1 \cdots x_n \omega')\,\tau &= (x_0 x_1 \cdots x_n \omega')\,\psi_{nk}\,\varphi_{kn} = \\ &= (x_0\,\psi_{0n}\,x_1\,\psi_{1n} \cdots x_n \omega_n)\,\psi_{nk}\,\varphi_{kn} = \\ &= x_0\,\psi_{0k}\,\varphi_{kn}\,x_1\,\psi_{1k}\,\varphi_{kn} \cdots x_n\,\psi_{nk}\,\varphi_{kn}\,\omega_n = \\ &= x_0\,\psi_{0k}\,\varphi_{k0}\,\varphi_{0n}\,x_1\,\psi_{1k}\,\varphi_{k1}\,\varphi_{1n} \cdots x_n\,\psi_{nk}\,\varphi_{kn}\,\omega_n = \\ &= x_0\,\tau\,\varphi_{0n}\,x_1\,\tau\,\varphi_{1n} \cdots x_n\,\tau\,\omega_n = \\ &= x_0\,\tau\,x_1\,\tau\,\cdots\,x_n\,\tau\,\omega,\end{aligned}$$

што значи τ е изоморфизам, т.е. n-асоцијативите $A(\omega)$ и $A(\omega')$ се изоморфни.

Со тоа теоремата е докажана.

Под унија на дадена фамилија n-асоцијативи за натаму ќе го подразбираме n-асоцијативот $A(\omega)$ и, за да ја разликуваме од теоретско-множествената унија, оваа ќе ја наречеме *оперативна унија*.

Во една изоморфно-компатибилна фамилија n-асоцијативи, $\{A_i \mid i \in I\}$, не е можно да има два асоцијатива од кои едниот е својствен подасоцијатив од другиот, т.е. точна е следнава лема (која во работата [2] е означена како теорема 1.1):

Лема 1. *Ако* $A_i \subseteq A_j$ *за некои* $i,\ j \in I$, *тогаш* $A_i = A_j$ *и* $\varphi_{ik} = \varphi_{jk}$ *за секој* $k \in I$.

За една изоморфно-компатибилна фамилија n-асоциајативи, $\{A_i \mid i \in I\}$, велиме дека е *чиста*, ако $A_i \neq A_j$ за $i \neq j$. Од лемата 1 следува дека во една чиста фамилија не е можна релацијата $A_i \subset A_j$. Секоја изоморфно-компатибилна фамилија може да се прочисти со редуцирање на множеството индекси без битно да се измени нејзината структура. Точно е и следново тврдење:

Ако n-асоцијативите од една чиста изоморфно-компатибилна фамилија се лево едноставни, тогаш различните асоцијативи од таа фамилија немаат заеднички елементи.

Навистина, ако A_i, A_j се лево едноставни и $A_{ij} = A_i \cap A_j \neq \emptyset$, тогаш $A_i = A_{ij} = A_j$.

Со следнава теорема се дава опис на изоморфно-компатибилните фамилии од дисјунктни асоцијативи.

Теорема 2. *Секоја фамилија* $\{A_i \mid i \in I\}$ *од меѓусебно изоморфни и дисјунктни n-асоцијативи е изоморфно-компатибилна. Оперативната*

Еден асоцијатив се вика лево едноставен ако нема други леви идеали освен самиот.

унија на таа фамилија n-асоцијативи е изоморфна со n-асоцијативот $S(\sigma)$, *определен со:* $S = A_k \times I$,

$$(x_0, i_0)(x_1, i_1)\cdots(x_n, i_n)\ \sigma = (x_0 x_1 \cdots x_n \omega_k, i_k), \tag{1.3}$$

каде што k *е кој било фиксен елемент од* I *и* $x_0, x_1, \ldots, x_n \in A_k$.

Доказ. Нека φ_{ki} е изоморфизам од A_k на A_i. Ставајќи $\varphi_{ij} = (\varphi_{ki})^{-1}\varphi_{kj}$, добиваме систем изоморфизми $\varphi_{ij}: A_i \to A_j$, за кои се исполнети условите (i), (ii) и (iii). Значи, фамилијата $\{A_i \mid i \in I\}$ со системот изоморфизми $\{\varphi_{ij} \mid i, j \in I\}$ е изоморфно-компатибилна. Операцијата σ на S со (1.3) е добро дефинирана, а асоцијативноста следува од асоцијативноста на операцијата ω_k. Значи, $S(\sigma)$ е n-асоцијатив.

Асоцијативот S е изоморфен со асоцијативот $A = \bigcup_i A_i$ преку изоморфизмот τ, определен со:

$$(\forall\, x_i \in A)\ x_i \tau = (x_i \varphi_{ik}, i).$$

Од оваа теорема следува дека од интерес се само чистите изоморфно-компатибилни фамилии кај кои различните асоцијативи имаат заеднички елементи. Дека постојат такви фамилии асоцијативи покажува следниов пример, кој претставува модификација на примерот 1.4 од [2].

Пример 1. Нека $A_1 = \{e_1, 3, 5, 7, \ldots\}$ и $A_2 = \{e_2, 3, 5, 7, \ldots\}$ се асоцијативи изоморфни со асоцијативот (M, ω), $M = \{1, 3, 5, \ldots\}$, $xyz\,\omega = x + y + z$, и нека пресликувањата $\varphi_{ij}: A_i \to A_j$ $(i, j = 1, 2)$ се дефинирани вака: $m\varphi_{ij} = m\varphi_{ji} = m$ за $m \neq e_1, e_2$, $e_1\varphi_{11} = e_1 = e_2\varphi_{21}$, $e_2\varphi_{22} = e_2 = e_1\varphi_{12}$. Фамилијата $\{A_1, A_2\}$ со системот изоморфизми $\{\varphi_{ij} \mid i, j = 1, 2\}$ е чиста изоморфно-компатибилна и $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$.

Покрај изоморфноста на асоцијативите од една фамилија $\{A_i(\omega_i) \mid i \in I\}$, потребни услови за таа фамилија да биде изоморфно-компатибилна се:

$$x_0, \ldots, x_n \in A_i \cap A_j \Rightarrow x_0 \cdots x_n\, \omega_i = x_0 \cdots x_n\, \omega_j \text{ и}$$

$$A_i^n (A_i \cap A_j)\, \dot{\omega}_i \subseteq A_i \cap A_j.$$

Во работата [2] се поставува прашањето дали тие услови се доволни. Следниот пример покажува дека асоцијативите од една фамилија можат да бидат меѓусебно изоморфни и да ги исполнуваат горните два услова, но сепак фамилијата да не биде изоморфно-компатибилна. Со тоа се дава негативен (делумен) одговор на поставеното прашање.

Пример 2. Нека A и B се множества определени на следниов начин:

$$A = \{(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in Q,\ 0 \leqslant a_1 < +\infty,\ \ 0 \leqslant a_2 \leqslant 1\},$$

$$B = \{b_1, b_2) \mid b_1, b_2 \in Q,\ 0 \leqslant b_1 \leqslant 1,\ \ 0 \leqslant b_2 < +\infty\},$$

каде што со Q е означено множеството на рационалните броеви. Да дефинираме операција $*_1$ во A со:

$$(x_1, x_2) *_1 (y_1, y_2) = (\{x_1 + y_1\}, \{x_2 + y_2\})$$

и $*_2$ во B со истиот пропис како $*_1$, при што $\{x\}$ означувa дробен дел од x, т.е. $\{x\} = x - [x]$. Бидејќи $\{x - [y]\} = \{x\}$ за кои било ненегативни броеви x и y, добиваме дека

$$\{x + \{y + z\}\} = \{x + y + z - [y + z]\} = \{x + y + z\} =$$
$$= \{x + y - [x + y] + z\} = \{\{x + y\} + z\},$$

од што заклучуваме дека операцијата $*_i$ $(i = 1, 2,)$ е асоцијативна. Јасно е дека фамилијата полугрупи $A(*_1)$, $B(*_2)$ е компатибилна, т.е.

$$(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in A \cap B \Rightarrow (x_1, x_2) *_1 (y_1, y_2) = (x_1, x_2) *_2 (y_1, y_2).$$

Пресликувањата φ_{XY}: $X \to Y$, дефинирани со: $(x_1, x_2)\ \varphi_{XY} = (x_2, x_1)$ за $X \neq Y$ и $\varphi_{XX} = 1_X$ $(X, Y = A, B)$ се изоморфизми. Потоа имаме:

$$A *_1 (A \cap B) \subseteq A \cap B, \quad B *_2 (A \cap B) \subseteq A \cap B.$$

Меѓутоа, фамилијата полугрупи, $\{A, B\}$, со системот изоморфизми $\{\varphi_{XY} \mid X, Y = A, B\}$ не е изоморфно-компатибилна, бидејќи за $(x_1, x_2) \in A \cap B$ имаме $(x_1, x_2)\ \varphi_{AB} = (x_2, x_1)$, а во општ случај $(x_2, x_1) \neq \neq (x_1, x_2)$, т.е. не е исполнет вториот дел од условот (iii)

2. Во овој дел ќе испитаме како се пренесува редуцибилноста од асоцијативите на една изоморфно-компатибилна фамилија врз нивната оперативна унија и обратно. Претходно ќе ја докажеме следнава лема:

Лема 2. *Ако n-асоцијативот $A(\omega)$ е оперативната унија на изоморфно-компатибилната фамилија n-асоцијативи $A_i(\omega_i)$, $i \in I$, тогаш:*

$$A_i^n x_i = A^n x_i,^{2)} \quad \text{за секој } x_i \in A_i, \tag{2.1}$$

и, освен тоа, следниве искази се еквивалентни:

а) $A_i^n x_i$ *е максимален член на фамилијата* $\{A_i^n a_i \mid a_i \in A_i\} = \mathcal{F}_i$.

б) $A_i^n x_i \varphi_{ij}$ *е максимален член на фамилијата* $\{A_j^n a_j \mid a_j \in A_j\} = \mathcal{F}_j$.

в) $A^n x_i$ *е максимален член на фамилијата* $\{A^n a \mid a \in A\} = \mathcal{F}$.

---

[2]) Понатаму симболот за операцијата обично ќе го изоставаме таму каде што е јасно дека не ќе има недоразбирање. Така, на пример, ќе пишуваме $A^n_i x_i$ наместо $A_i^n x_i \omega_i$ и слично.

Доказ. Прво, јасно е дека $A_i{}^n x_i \subseteq A^n x_i$. Ако $a = a_{i_1} \cdots a_{i_n} x_i \omega$ е произволен елемент од $A^n x_i$, тогаш

$$a = a_{i_1} \varphi_{i_1 i} \cdots a_{i_n} \varphi_{i_n i} x_i \omega_i \in A_i{}^n x_i ,$$

што значи $A^n x_i \subseteq A_i{}^n x_i$. Според тоа, равенството (2.1) е точно.

Бидејќи $\varphi_{ij}: A_i \to A_j$ е изоморфизам, а изоморфизмите ја пренесуваат максималноста, следува дека а) $\Leftrightarrow$ б).

Јасно е дека $\mathcal{F}_i$ е потфамилија на $\mathcal{F}$, па ако $A^n x_i$ е максимален член во $\mathcal{F}$, тогаш, имајќи го предвид (2.1), заклучуваме дека $A_i{}^n x_i$ е максимален член во $\mathcal{F}_i$, т.е. в) $\Rightarrow$ а).

Да покажеме дека а) $\Rightarrow$ в). Нека $A_i{}^n x_i$ е максимален член во $\mathcal{F}_i$. Да претпоставиме дека

$$A^n x_i \subseteq A^n y_j \quad \text{во } \mathcal{F} \tag{2.2}$$

и да ставиме $x_i \varphi_{ij} = x_j$. Од (2.2), според (2.1), добиваме

$$A_i{}^n x_i \subseteq A_j{}^n y_j. \tag{2.3}$$

Бидејќи $A_i{}^n x_i \subseteq A_i$ и $A_j{}^n y_j \subseteq A_j$, од (2.3) добиваме $A_i{}^n x_i \subseteq A_i \cap A_j$, па за секој $a_{i_1} \cdots a_{i_n} x_i \omega_i \in A_i{}^n x_i$, според (iii), имаме

$$(a_{i_1} \cdots a_{i_n} x_i \omega_i) \varphi_{ij} = a_{i_1} \cdots a_{i_n} x_i \omega_i, \text{ т.е.}$$

$$A_j{}^n x_j = (A_i{}^n x_i) \varphi_{ij} = A_i{}^n x_i \subseteq A_j{}^n y_j$$

што, поради а) $\Leftrightarrow$ б), повлекува $A_j{}^n x_j = A_j{}^n y_j = A_i{}^n x_i$; според (2.1) имаме

$$A^n x_i = A^n y_j ,$$

што значи $A^n x_i$ е максимален во $\mathcal{F}$.

Со тоа го комплетиравме доказот на лемата 2.

За еден асоцијатив $A(\omega)$ велиме дека е *редуцибилен*, ако максималните членови на фамилијата $\mathcal{F} = \{A^n a \mid a \in A\}$ го покриваат A, т.е. ако $\bigcup\limits_{t \in T} A^n t = A$ или, накратко,

$$A^n T = A, \tag{2.4}$$

каде што $T = \{t \in A \mid A^n t \text{ максимален член во } \mathcal{F}\}$ (в. и [3]).

Следната теорема покажува дека редуцибилноста на асоцијативите во една изоморфно-компатибилна фамилија повлекува редуцибилност на асоцијативот што е нивна оперативна унија, и обратно. Имено:

Теорема 3. *Оперативната унија A на една изоморфно-компатибилна фамилија асоцијативи $\{A_i(\omega_i)|i \in I\}$ е редуцибилен асоцијатив, ако и само ако е редуцибилен секој асоцијатив од таа фамилија.*

(Поради изоморфизмот, доволно е да се претпостави редуцибилност само на еден асоцијатив од фамилијата.)

Доказ. Нека $A_i(\omega_i)(i \in I)$ е редуцибилен и нека $\{A_i^n t_i | t_i \in T_i\}$ е системот од сите максимални членови на фамилијата $\mathcal{F}_i = \{A_i^n a_i | a_i \in A_i\}$. Од тоа, според лемата 2, следува дека

$$\{A^n t \mid t \in T = \bigcup_{j \in I} T_i \varphi_{ij}\}$$

ги содржи сите максимални членови на фамилијата $\mathcal{F} = \{A^n \mid a \in A\}$. Поради $A_i^n T_i = A_i$ имаме:

$$\begin{aligned} A^n T = (\bigcup_j T_i \varphi_{ij}) &= \bigcup_j A^n (T_i \varphi_{ij}) = [\text{според } (2.1)] \\ &= \bigcup_j A_j^n (T_i \varphi_{ij}) = \bigcup_j (A_i \varphi_{ij})^n (T_i \varphi_{ij}) = \\ &= \bigcup_j (A_i^n T_i) \varphi_{ij} = [A_i \text{ е редуцибилен}] \\ &= \bigcup_j A_i \varphi_{ij} = \bigcup_j A_j = A, \end{aligned}$$

што значи оперативната унија A на дадената изоморфно-компатибилна фамилија е редуцибилен асоцијатив.

Обратно, да претпоставиме сега дека асоцијативот A е редуцибилен. Нека $\{A^n t | t \in T\}$ е системот од сите максимални членови на фамилијата $\{A^n a | a \in A\}$. Бидејќи $A = \bigcup_i A_i$ и $T \neq \emptyset$, постои $j \in I$ таков што $T \cap A_j = T_j \neq \emptyset$, а поради $A_i = A_j \varphi_{ji}$ и $T_i = T_j \varphi_{ji}$ за секој $i \in I$, заклучуваме дека $T_i (= T \cap A_i)$ е непразно множество за секој $i \in I$. Според лемата 2, системот $\{A_i^n t_i \mid t_i \in T_i\}$ се состои од сите максимални членови на фамилијата $\{A_i^n a_i \mid a_i \in A_i\}$.

Треба да покажеме дека асоцијативот $A_i (i \in I)$ е редуцибилен, т.е.

$$A_i^n T_i = A_i. \tag{2.4}$$

Нека u е произволен елемент од A_i. Поради $A_i \subseteq A = A^n T$, постои $t_j \in T_j \subseteq T$ (за некој $j \in I$), таков што

$$u \in A^n t_j = A_j^n t_j \subseteq A_j.$$

Од тоа следува дека

$$u \varphi_{ij} \in (A_j t_j) \varphi_{ji} = A_i^n t_i (\text{при што } t_i = t_j \varphi_{ji}).$$

Бидејќи $u \in A_i \cap A_j$, според (iii) имаме $u\varphi_{ji} = u$, па значи

$$u \subset A_i^n\, t_i \subseteq A_i^n\, T_i, \text{ т.е.}$$
$$A_i \subseteq A_i^n\, T_i\,.$$

Бидејќи е, јасно, $A_i^n\, T_i \subseteq A_i$, од сето тоа следува дека $A_i = A_i^n\, T_i$, т.е. дека асоцијативот A_i е редуцибилен.

Со тоа теоремата 3 е докажана.

3. Во овој дел ќе испитаме еден вид асоцијативи што се унии на фамилија подасоцијативи од специјален тип.

Теорема 4. *Нека A е n-асоцијатив и $\mathcal{F} = \{A_i \mid i \in I\}$ фамилија леви идеали во A со следниве особини:*

(а) $A = \bigcup\limits_i A_i$,

(б) *во секој A_i важи законот за кратење оддесно,*

(в) *секој A_i има неутрален елемент e_i, при што*

$$(\forall\, i, j \in I)\, e_i\, e_j^n = e_j.$$

Тогаш пресликувањето $\varphi_{ij}\colon A_i \to A_j$ дефинирано со:

$$a_i\,\varphi_{ij} = a_i\, e_j^n \tag{3.1}$$

е изоморфизам од A_i на A_j и $\varphi_{ji} = (\varphi_{ij})^{-1}$ е изоморфизам од A_j на A_i; фамилијата $\mathcal{F}$ е изоморфно-компатибилна и A е оперативната унија на таа фамилија.

Доказ. Бидејќи A_j е лев идеал во A, јасно е дека φ_{ij} е пресликување од A_i во A_j. Нека $a_0, a_1, \ldots, a_n \in A_i$. Тогаш

$$\begin{aligned}(a_0\, a_1 \cdots a_n)\,\varphi_{ij} &= a_0 a_1 \cdots a_n\, e_j^n = a_0 \cdots a_{n-1}\,(a_n\,\varphi_{ij}) = \\ &= a_0 \cdots a_{n-1}\, e_j^n\,(a_n\,\varphi_{ij}) = a_0 \cdots (a_{n-1}\,\varphi_{ij})\,(a_n\,\varphi_{ij}) = \cdots = \\ &= (a_0\,\varphi_{ij})\,(a_1\,\varphi_{ij}) \cdots (a_n\,\varphi_{ij})\end{aligned}$$

што значи φ_{ij} е хомоморфизам. Ќе покажеме дека φ_{ij} е биекција. Нека x_i е произволен елемент од A_i. Имаме:

$$\begin{aligned}x_i\, e_j^n\, e_i^n &= (x_i\, e_i^n)\, e_j^n\, e_i^n = x_i\,(e_i^n\, e_j)\, e_j^{n-1}\, e_i^n = \\ &= x_i\,(e_j^n\,(e_i^n\, e_j)\, e_j^{n-1}\; e_i^n = x_i\, e_j^n\, e_i^n\, e_j^n\, e_i^n,\end{aligned}$$

па кратејќи оддесно со $e_j^n\, e_i^n$, добиваме

$$x_i = x_i\, e_j^n\, e_i^n = x_i\,\varphi_{ij}\,\varphi_{ji}. \tag{3.2}$$

На ист начин добиваме

$$x_j = x_j \varphi_{ji} \varphi_{ij}. \tag{3.3}$$

Од (3.2) и (3.3) следува дека $\varphi_{ij}: A_i \to A_j$ е биекција и дека $(\varphi_{ij})^{-1} = \varphi_{ji}$. Зачи, φ_{ij} е изоморфизам.

Ќе покажеме сега дека фамилијата $\{\varphi_{ij} \mid i, j \in I\}$ ги има особините (i)—(iii). Од $a_i e_i^n = a_i$ следува дека $a_i \varphi_{ii} = a_i$, т.е. (i). Поради $e_j e_k^n = e_k$ од (в), добиваме:

$$\begin{aligned} x_i \varphi_{ik} = x_i e_k^n = x_i e_k e_k^{n-1} = x_i e_j e_k^n e_k^{n-1} = \\ = x_i e_j e_k e_k^{n-1} e_k^{n-1} = x_i e_j e_j e_k^n e_k^{n-2} = \cdots = \\ = x_i e_j^n e_k^n = x_i \varphi_{ij} \varphi_{jk} \end{aligned}$$

што значи дека важи (ii). Множеството $A_{ij} = A_i \cap A_j$, ако не е празно, е лев идеал во A (како пресек на леви идеали), па A_{ij} е лев идеал и во A_i и во A_j. Потоа, бидејќи e_i и e_j се неутрални елементи во A_i и A_j соодветно, имаме:

$$(\forall x \in A_{ij})\, x \varphi_{ij} = x e_j^n = x = x e_i^n = x \varphi_{ji},$$

т.е. и условот (iii) е исполнет. Значи $\mathcal{F}$ е изоморфно-компатибилна фамилија.

Да покажеме дека A е оперативната унија на $\mathcal{F}$. Нека

$a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}, a_j \in A$, $a_{i_\nu} \in A_{i_\nu}$, $a_j \in A_j$. Имаме:

$$\begin{aligned} a_{i_1} \cdots a_{i_n} a_j = a_{i_1} \cdots a_{i_n} e_j^n a_j = a_{i_1} \cdots (a_{i_n} \varphi_{i_n j}) a_j = \\ = a_{i_1} \cdots a_{i_{n-1}} e_j^n (a_{i_n} \varphi_{i_n j}) a_j = \cdots = \\ = (a_{i_1} \varphi_{i_1 j}) \cdots (a_{i_n} \varphi_{i_n j}) a_j, \end{aligned}$$

што значи производите во A се добиваат според (1.1).

Со тоа теоремата е докажана.

ЛИТЕРАТУРА

[1] R. H. Bruck, *A Survey of Binary Systems*, Springer Verlag, 1958.

[2] Ѓ. Чупона, *За некои компатибилни фамилии полугрупи*, Год. зб. на ПМФ — Скопје, кн. 14 (1963), 5—14.

[3] Н. Целакоски, *Редуцибилни асоцијативи*, Билтен на ДМФ на СР Македонија, 24 (1973) 51—557.

ISOMORPHICALLY COMPATIBLE COLLECTIONS OF ASSOCIATIVES

Naum Celakoski

(S u m m a r y)

1. A collection $\{A_i(\omega_i)|i\in I\}$ of n-associatives *) is said to be isomorphically compatible if there is a system of mappings $\{\varphi_{ij}|i,j\in I\}$, where φ_{ij} is an isomorphism from A_i onto A_j, such that the following properties are satisfied:

(i) $\varphi_{ii}=1_{A_i}$,

(ii) $\varphi_{ij}\varphi_{jk}=\varphi_{ik}$,

(iii) If $A_{ij}=A_i\cap A_j=A_{ij}\neq\emptyset$, then A_{ij} is a left ideal in A_i and A_j, such that $(\forall\, x\in A_{ij})\, x\varphi_{ij}=x\varphi_{ji}=x$.

If $\{A_i(\omega)|i\in I\}$ is an isomorphically compatible collection, then it is compatible (i.e. $x_0, x_1,\dots, x_n\in A_i\cap A_j\Rightarrow x_0x_1\cdots x_n\omega_i=x_0x_1\cdots x_n\omega_j$).

Let $A=\bigcup\limits_i A_i$ and define an $(n+1)$-ary operation ω on A in the following way:

$$x_1\cdots x_n\, y\,\omega=x_1\varphi_{i_1j}\cdots x_n\varphi_{i_nj}\, y\,\omega_j, \tag{1}$$

$x_\nu\in A_{i_\nu}$, $y\in A_j$. Then:

$A(\omega)$ is an associative. Every A_i is a left ideal in A. The associative $A(\omega)$ does not depend (up to isomorphism) on the system of isomorphisms $\{\varphi_{ij}|i,j\in I\}$.

Further on, $A(\omega)$ will be called the union of the given isomorphically compatible collection of associatives.

2. If $\{A_i|i\in I\}$ is an isomorphically compatible collection of associatives, then $A_i\subseteq A_j$, for some $i,j\in I$, implies $A_i=A_j$ and $\varphi_{ik}=\varphi_{jk}$ for every $k\in I$. We say that $\{A_i|i\in I\}$ is refined if $A_i\neq A_j$ for $i\neq j$. If the members of a refined isomorphically compatible collection are left simple, then any two of them are disjoint.

Any collection $\{A_i|i\in I\}$ of isomorphic and disjoint n-associatives is isomorphically compatible. The union of that collection is isomorphic with the n-associative $S(\sigma)$, defined by

$$S=A_k\times I,\quad (x_0,\, i_0)\cdots(x_n\ i_n)\,\sigma=(x_0\cdots x_n\omega_k,\ i_n)$$

where k is any fixed element of I and $x_0,\dots, x_n\in A_k$.

3. An associative A is said to be reducible if the maximal members of the collection $\mathcal{F}=\{A^n a|a\in A\}$ form a covering of A.

---

*) A non-empy set S is said to be an n-associative if an $(n+1)$-ary associative operation on S is defined.

The union $A(\omega)$ of an isomorphically compatible collection of associatives $A_i(\omega_i)$, $i \in I$, is reducible if and only if every associative $A_i(\omega_i)$ is reducible.

4. Let A be an n-associative and $\mathcal{J} = \{A_i | i \in I\}$ a collection of left ideals in A with the following properties:

(a) $A = \bigcup_i A_i$,

(b) $A_i \, (i \in I)$ is right cancelative,

(c) $A_i \, (i \in I)$ has an identity element e_i, such that $e_i e_j^n = e_j$.

Then the mapping $\varphi_{ij}: A_i \to A_j$ defined by $a_i \varphi_{ij} = a_i e_j^n$ is an isomorphism, $\varphi_{ji} = (\varphi_{ij})^{-1}$, $\mathcal{J}$ is an isomorphically compatible collection and A is the union of $\mathcal{J}$.

декември 1973, Скопје