Год. збор. матем. фак.
28 (17—26) 1977

ЗА РЕДУЦИРАНИТЕ $\overline{\lambda}$-2-ПОЛУГРУПИ

Б. Трпеновски, П. Кржовски

Во работава се дава еден опис на структурата на редуцираните $\overline{\lambda}$-2-полугрупи. Натаму, за да се добие подобар внатрешен увид во структурата на овие 2-полугрупи, преку елементарните симетрични и несиметрични 2-потполугрупи, се анализираат случаите кога две такви 2-потполугрупи имаат заеднички по еден, односно два неидемпотентни елементи.

1. Во [3] и [4] се разгледувани n-полугрупи што претставуваат обопштување на класата полугрупи изучувана во трудовите [1] и [2]. При описот на структурата на n-полугрупите од споменатиот вид, воведен е поимот за редуцирана n-полугрупа од тој вид. Во [3] можат да се најдат некои особини за овие n-полугрупи, но подетален опис на нивната структура не е даден. Како што ќе видиме во овој труд, чија цел е да се опише структурата на редуцираните 2-полугрупи, редуцираните n-полугрупи од видот за кој станува збор можат да имаат интересна структура; за неа во никој случај не може да се каже дека е тривијална, дури и во случајот $n=2$ на кој ние ќе се ограничиме.

Да ги изнесеме нужните дефиниции (за општиот случај тие можат да се најдат во [3]). Нека S е 2-*полугрупа*, т. е. S е непразно множество во кое е дефинирана тернарна операција, ќе ја означуваме со $(\ldots)$ со особината: за секои $x, y, z, u, v \in S$,

$$((xyz)\ uv) = (x\ (yzu)\ u) = (xy\ (zuv)).$$

S ја викаме λ-2-*полугрупа* ако и само ако секоја 2-полугрупа од S е лев идеал, т.е. $(Q \subseteq S,\ Q^3 \subseteq Q) \Rightarrow S^2 Q \subseteq Q$. Ќе претпоставиме дека S содржи барем еден идемпотент; тогаш секоја циклична 2-потполугрупа од S содржи единствен идемпотент ([3], Theorem 1 (iii). Идемпотентот што го содржи цикличната 2-потполугрупа $< x >$ ќе го означиме со e_x. (Множеството од сите идемпотенти од S ќе го означуваме се E). S ја викаме *редуцирана* $\overline{\lambda}$-2-*полугрупа* ако и само ако таа содржи идемпотенти и е λ-2-полугрупа со особината $x^3 = (xxx) = e_x$ за секој $x \in S$.

2. Редуцираната $\overline{\lambda\text{-}2}$-полугрупа S ја викаме *тривијална* ако за секои $x, y, z \in S$, $(xyz) = e_z$. Во бинарниот случај редуцираната λ-полугрупа секогаш е тривијална. Во општ случај, за $n > 1$, постојат редуцирани $\overline{\lambda\text{-}2}$-полугрупи што не се тривијални. Еден пример за тоа може да се најде во [3]. Овде, за $n = 2$, ќе изнесеме уште два примера за нетривијални редуцирани $\overline{\lambda\text{-}2}$-полугрупи.

Претходно ќе ја докажеме следнава

Лема 1. *Нека е S редуцирана $\overline{\lambda\text{-}2}$-полугрупа тогаш:*

(*а*) *Ако барем еден од елементите x, y, z е идемпотент, тогаш $(xyz) = e$;*

(*б*) *за кои било $x, y \in S$, $(xxy) = e_y$ и $(xyy) = e_y$.*

Доказ. Да го докажеме најнапред (б); првото од тие равенства следува од Lemma 4 од [3]. Поради редуцираноста на S имаме дека $(xyy) = y$ или $(xyy) = e_y$; ако е $(xyy) = y$, тогаш, со оглед на првото равенство, имаме:

$$y = (xyy) = (x\,(xyy)\;y) = (xx\,(yyy)) = (xxe_y) = e_y.$$

Да го докажеме (а): поради редуцираноста на S имаме $(xye_z) = e_z$, а потоа, имајќи го предвид и (б) добиваме:

$$(xe_y\,z) = (x\,(yyy)\,z) = (xy\,(yyz)) = (xye_z) = e_z;$$

$$(e_x\,yz) = ((xxx)\,yz) = (x\,(xxy)\,z) = (xe_y\,z) = e_z.$$

Оваа лема, без да се повикуваме експлицитно, покрај другото е ползувана и во забелешката што следува по првиот од подолу изнесените примери.

Пример 1. Нека е $S = \{x, y, z, e_x, e_y, e_z\}$. Ако ставиме $(uyv) = v$ ако $u, v \in \{x, z\}$; $(yuy) = y$ ако $u \in \{x, z\}$ и $(uvw) = e_w$ во сите други случаи, ќе добиеме дека S е редуцирана $\overline{\lambda\text{-}2}$-полугрупа во која e_w се идемпотенти што соодветствуваат на $w \in \{x, y, z\}$.

Вака дефинираната 2-полугрупа ќе ја викаме елементарна симетрична $\overline{\lambda\text{-}2}$-полугрупа.

Забелешка: Асоцијативноста во S може да се установи со директна проверка; од сите можни 243 петорки, во 63 — кога ист елемент се појави барем три пати едноподруго — асоцијативноста е очигледна, а од останатите 180, поради симетрија меѓу x и z, треба да се разгледаат само половина. При тоа, во сите можни „производи" за секоја од петките $xyxyx$, $xyzyx$, $zyzyx$, $zyxyx$ се добива вредноста y; за секоја од петките $yxyxy$, $yxyzy$, $zyzyzy$ и $yzyxy$ се добива вредноста x; за секоја од петките $xyxyz$, $xyzyz$, $zyzyz$ и $zyxyz$ се добива вредноста z, а во сите други случаи, за секој од трите „производи" се добива вредноста e_w каде w е последниот елемент во петката (на пример: $((zyx)\ yx) = (xyx) = x$; $(z\,(yxy)\,x) = (zyx) = x$; $(zy\,(xyx)) = (zyx) = x$).

Пример 2. Пак нека е $S = \{x, y, z, e_x, e_y, e_z\}$, но тернарната операција сега ја дефинираме со: $(xyz) = z$, $(xyx) = x$, $(yxy) = y$ и $(uvw) = e_w$ во сите други случаи. Овде е полесно, одошто во примерот 1, да се провери асоцијативноста; дека S е $\overline{\lambda}$-2-полугрупа, редуцирана, лесно се гледа, при што e_x, e_y, e_z се идемпотенти. Во овој случај за S ќе велиме дека е елементарна несиметрична редуцирана λ-2-полугрупа.

Да го отпочнеме изучувањето на структурата на редуцираните $\overline{\lambda}$-2-полугрупи. Ќе претпоставиме дека S е нетривијална $\overline{\lambda}$-2-полугрупа, т.е. дека постојат $x, y, z \in S$ што не се идемпотенти и, такви што е $(xyz) \neq e_w$.

Да дефинираме едно пресликување f од S^3 во $\{0,1\}$ на следниов начин:

$$f(x, y, z) = 1 \iff (xyz) = z,$$

$$f(x, y, z) = 0 \iff (xyz) = e_z.$$

Ќе изнесеме неколку особини за f. Направо од Лемата 1 и дефиницијата на f следува дека:

(*i*) *$f(x, y, z) = 0$ во секој од случаите: а) барем еден од $x, y, z \in E$, б) $x = y$ или $y = z$.*

(*ii*) *ако $f(x, y, z) = 1$ и $f(y, z, u) = 0$ тогаш*

$f(z, u, v) = 0$ за кој било $v \in S$.

Доказ. По претпоставка имаме $(xyz) = z$ и $(yzu) = e_u$; добиваме:

$$(zuv) = ((xyz)\,uv) = (x\,(yzu)\,v) = e_v$$

(Лема 1), така што $f(z, u, v) = 0$.

На ист начин се докажува и

(*iii*) *ако $f(z, u, v) = 1$ и $f(y, z, u) = 0$ тогаш*

$f(x, y, z) = 0$ за кој било $x \in S$,

(*iv*) *ако $f(y, z, u) = 1$, $f(x, y, z) = 0$ тогаш*

$f(x, u, v) = 0$ за кој било $v \in S$

(*v*) *ако $f(y, z, u) = 1$ и $f(x, u, v) = 0$ тогаш*
$f(x, y, v) = 0$,

(*vi*) *ако $f(x, y, z) = 1$, $f(z, u, v) = 0$ тогаш*
$f(x, u, v) = 0$,

(*vii*) *ако* $f(x, y, z) = f(y, z, u) = f(z, u, v) = 1$ *тогаш* $f(x, u, v) = f(x, y, v) = 1$.

Натаму, да ставиме $S^* = S \setminus E$, каде E е множеството од сите идемпотенти во S, тогаш $S = S^* \cup E$, каде унијата е дисјунктна. Ако за секој $x \in S$ ставиме $g(x) = e_x \in E$, тогаш $g : S \to E$ ќе биде сурекција таква што $(x, y, z) = g(z)$ ако и само ако $f(x, y, z) = 0$ и за секој $u \in E$, $g(u) = u$.

Обратно, нека S^* и E се дисјунктни непразни множества и $S = S^* \cup E$. Нека $f : S^3 \to \{0, 1\}$ е пресликување што ги поседува особините (i) — (vii) и $g : S \to E$ сурекција, таква што $g(u) = u$ за секој $u \in E$.

Во S дефинираме тернарна операција [ ] *на следниов начин:*

$$[xyz] = \begin{cases} z \text{ ако и само ако } f(x, y, z) = 1 \\ g(z) \text{ во другите случаи.} \end{cases}$$

Тогаш S ќе биде редуцирана $\overline{\lambda}$*-2-полугрупа.*

Доказ. Да докажеме дека S е 2-полугрупа.

Најнапред, за секој $u \in E$ имаме $[uuu] = g(u) = u$ зашто $f(u, u, u) = 0$. Така, елементите од E се идемпотенти. Поради (*i*) и дефиницијата на g, ниеден елемент од S^* не може да биде идемпотент.

За кој било $x, y, z, u, v \in S$ да ставиме

$[[xyz]\, uv] = p$, $[x\,[yzu]\, v] = q$, $[xy\,[zuv]] = r$,

и да ги разгледаме следниве случаи:

1) $[xyz] = z$, $[yzu] = g(u)$

2) $[xyz] = g(z)$, $[yzu) = g(u)$

3) $[xyz] = g(z)$, $[yzu] = u$

4) $[xyz] = z$, $[yzu] = u$

за 1) добиваме:

$$q = [x\,[yzu]\, v] = [xg(u)\, v] = g(v)$$

зашто, според (*i*) и напред изнесената особина за E се добива $f(x, g(u), v) = 0$ бидејќи $f(x, y, z) = 1$ и $f(y, z, u) = 0$ според (*ii*) е $f(z, u, v) = 0$ па $[zuv] = g(v)$, т. е.

$$p = [[xyz]\, uv] = [zuv] = g(v);$$

конечно, со оглед на предното, имаме

$$r = [xy\,[zuv]] = [xyg\,(v))] = g\,(v)$$

бидејќи, пак според (i), $f(x, y, g\,(v)) = 0$.

Така добиваме, во овој случај, дека $p = q = r = g\,(v)$.

На сличен начин, и во останатите случаи, се добива дека $p=q=r$ при што:

— во случајот 2) за секој од подслучаите $[zuv] = v$ и $[zuv] = g\,(v)$ се добива $p = q = r = g\,(v)$;

— во случајот 3) за секој од послучаите $[zuv] = v$ и $[zuv] = g\,(v)$ се добива $p = q = r = g\,(v)$;

— во случајот 4) за подслучајот $[zuv] = g\,(v)$ се добива $p=q=r=g(v)$ а за подслучајот $[zuv] = v$ се добива $p = q = r = v$. На тој начин **е** докажана асоцијативноста на $[\ \ ]$, а од дефиницијата на оваа операција веднаш се гледа дека S е редуцирана $\overline{\lambda}$-2-полугрупа.

Да го сумираме изнесеното во следнава

Теорема. *Ако S е редуцирана $\overline{\lambda}$-2-йолугруйа шогаш може да се дефинира пресликување $f : S^3 \to \{0,1\}$ шшо ги има особинише (i) — (vii) и сурекција $g : S \to E$ шаква шшо $(x, y, z) = g\,(z)$ ако и само ако $f\,(x, y, z)=0$. и $g\,(u) = u$ за секој $u \in E$ каде E е множесшвошо од идемйошенши во S*

Обрашно, ако S^* и E се дисјункшни множесва и ако йосшојаш пресликувања; $f : S^3 \to \{0,1\}$, $S = S^* \cup E$, со особинише (i) — (vii) и сурекција $g : S \to E$ со особинаша $g\,(u) = u$ за секој $u \in E$ шогаш, ако сшавиме

$$[xyz] = \begin{cases} z \text{ ако и само ако } f(x, y, z) = 1 \\ g\,(z) \text{ ако и само ако } f\,(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

S ќе биде редуцирана $\overline{\lambda}$-2-йолугруйа йо однос на ойерацијаша $[\ \ ]$. ▌

3. За да се добие подобар внатрешен увид во структурата на редуцираните $\overline{\lambda}$-2-полугрупи, ќе погледаме што се случува кога две елементарни 2-потполугрупи имаат заеднички по еден, односно два неидемпотентни елементи.

Ако ги погледнеме елементарните 2-потполугрупи од напред изнесените примери, ќе забележиме дека и во двата случаја (симетричниот и несиметричниот) тие содржат 2-потполугрупа $S_{xy}=\{x, y, e_x, e_y\}$ во која: $(xyx) = x$, $(yxy) = y$ и $(uvw) = e_w$ во сите други случаи.

Лема 2. *Нека S_{yx} и S_{uv} се 2-йошйолугруйи од S одредени на горнион начин. Ако пресекош на S_{xy} и S_{uv} содржи неидемйошеншен елеменш, шогаш S_{xy} и S_{uv} се 2-йошйолугруйи од исша елеменшарна симешрична 2-йошйолугруйа; ако е, на пример, $x = u$ и шогаш S_{xy} и S_{uv} се 2-йошйолугруйи од S_{yxv} во која ойерацијаша е одредена со: $(pxq) = q$ ако $p, q \in \{y, v\}$, $(xpx) = x$ ако $p \in \{y, v\}$ и $(p, q, r) = e_r$ во сише други случаи.*

Доказ. Од $y = (yxy)$ и $x = (xvx)$ следува дека $y = (y(xvx)y) = ((yxv)xv)$; од последното следува дека $(yxv) = v$ зашто во спротивниот случај (т.е. за $(yxv) = e_v$) ќе се добие $y = e_y$. Сега од $(yxv) = v$ добиваме дека $(vxy) = ((yxv)xy) = (y(xvx)y) = (yxy) = y$. ∎

Натаму за 2-полугрупата од примерот 1 ќе велиме дека е симетрична 2-полугрупа генерирана од (x, y, z); овде (x, y, z) ја посмараме како подредена тројка поради тоа што не сите три елементи се симетрично застапени при дефинирањето на операцијата во симетричните 2-потполугрупи, тројките (x, y, z) и (z, y, x) генерираат иста 2-полугрупа, но при било кој друг распоред на x, y и z се добива 2-полугрупа што не се совпаѓа со онаа што е генерирана од именуваните две подредени тројки. Слично, за 2-полугрупата од примерот 2 ќе велиме дека е несиметрична 2-полугрупа генерирана од (x, y, z); овде дури и (z, y, x) генерира несиметрична 2-полугрупа што е различна од онаа генерирана од (x, y, z). При тоа, подреденоста треба да укаже само на тоа како дефинирана операцијата, додека ако е дадена редуцираната $\overline{\lambda}$-2-полугрупа S и ако $x, y, z \in S$, тогаш 2-потполугрупата $\{x, y, z, e_x, e_y, e_z\}$ е потполно определена, па во таа смисла во наредните разгледувања ќе ги анализираме разните можни комбинации од по 3 елементи, а не варијациите нивни.

Лема 3. *Нека* (x, y, z) *и* (u, v, w) *генерираат елементарни симетрични 2-потполугрупи на* $\overline{\lambda}$*-2-полугрупата* S. *Тогаш:*

(*i*) *ако* $x = u$ *тогаш секоја од следниве тројки:* (y, x, v), (x, y, w), (x, v, z), (y, z, w), (z, y, w), (y, w, v) *и* (z, v, w) *генерира елементарна симетрична 2-потполугрупа, додека* (x, z, w) *генерира тривијална потполугрупа од* S;

(*ii*) *ако* $x = v$, *тогаш елементарна симетрична 2-потполугрупа генерира секоја од тројките* (y, x, u), (y, x, w), (x, w, z), (x, u, z), (y, z, u), (y, z, w) *и* (w, z, u), *додека* (y, u, w) *генерира тривијална 2-потполугрупа;*

(*iii*) *ако* $y = v$ *тогаш секоја од тројките* (x, y, u), (x, y, w) (z, y, u) *и* (z, y, w) *генерира елементарна симетрична 2-потполугрупа, а секоја од тројките* (z, u, w), (x, u, w), (x, z, w) *и* (x, z, u) *генерира тривијална 2-потполугрупа.*

Доказ. (i) Ако ги разгледаме 2-потпулугрупите S_{xy} и S_{uv} определени на почетокот на оваа точка, според лемата 2 ќе добиеме дека (y, x, v) генерира елементарна симетрична 2-потполугрупа од S. Натаму,

$$(xyw) = (xy(xvw)) = ((xyx)vw) = (xvw) = w,$$

$$(wyx) = (w(vxy)x) = ((wvx)yx) = (xyx) = x,$$

$$(ywy) = (yw(yxy)) = (y(wyx)y) = (yxy) = y, \ (wyw) = w,$$

зашто од $(wyw) = e_w$, според лемата 1, би добиле

$$y\,(ywy) = ((ywy)\,wy) = (y\,(wyw)\,y) = (ye_w\,y) = e_y.$$

Така, имајќи предвид дека $x = u$ (па според тоа $(xwx)=e_x$ и $(wxw)=e_w$) добиваме дека и (x, y, w) генерира елементарна симетрична 2-потполугрупа. Ако ја примениме лемата 2 на S_{yw} (2-потполугрупа од таа што е генерирана од (x, y, w)) и S_{zy} (2-потполугрупа од генерираната од (x, y, z)) ќе добиеме дека и (z, y, w) генерира елементарна симетрична 2-потполугрупа. На сличен наичн, со разгледување на 2-потполугрупите генерирани од:

а) (x, v, z) и (x, y, z), б) (x, v, w) и (y, v, z),

в) (x, y, w) и (x, v, w), г) (x, v, w) и (x, v, z)

ќе добиеме дека елементарни симетрични 2-потполугрупи генерираат:

а) (y, z, v), *b*) (x, v, z), в) (y, v, w), г) (z, v, w).

Дека (x, z, w) генерира тривијална 2-потполугрупа следува од таму што, ако го претпоставиме спротивното, тогаш S_{zw} и S_{zv} ќе бидат 2-потполугрупи од елементарната симетрична 2-потполугрупа генерирана од (v, z, w) (според Лемата 2, земајќи предвид и г)); од последново следува $(wzw) = w$, а со оглед на г) имаме $(wzw) = e_w$, а тоа претставува противречност.

Доказите за (ii) и (iii) не ги изнесуваме, зашто можат на ист начин да се спроведат. ∎

Забелешки: 1) Во лемата 3 разгледувани се само сите можни тројки при кои сите елементи се рзлични, зашто преку нив може да се добие информација и за случаите кога 2 елементи од тројката се исти (ако сите елементи се исти — 2-потполугрупата генерирана од тројката е тривијална).

2) Разгледани се само 3 случаи, зашто за $x = w$, $z = u$ и $z = w$, поради симетрија, добиваме резултат како во (i), за $z = v$, $y = u$ и $y=w$ добиваме резултат како во (ii). Работејќи во иста смисла како и во претходната лема, можат да се докажат:

Лема 4. *Нека* (x, y, z) и (u, v, w) *генерираат несиметрични елементарни 2-потполугрупи на* $\overline{\lambda}$*-2-полугрупата* S. Тогаш:

(*i*) *ако* $x = u$ *тогаш* (y, x, v) *генерира симетрична елементарна 2-потполугрупа;* (x, v, z) *и* (x, y, w) *генерираат несиметрични елементарни 2-потполугрупи, додека другите подредени тројки генерираат тривијални 2-потполугрупи;*

(*ii*) *ако* $x = v$ *тогаш* (u, x, y) *генерира симетрично,* $(\mathbf{x}, \mathbf{u}, z)$ *и* (y, x, w) *генерираат несиметрични, а сите други подредени тројки генерираат тривијални 2-потполугрупи,* (*iii*) *ако* $x = w$ *шоїаш сиїе йодредени ӣројки їенеараат ӣривијални 2-йоӣйолуїруйи,*

(*iv*) *ако* $y = v$ *шоїаш* (x, y, u) *їенерира симеӣрична,* (u, y, z) *и* (x, y, w) *несимеӣрични, а сиїе друїи йодредени ӣројки їенерираат ӣривијални 2-йоӣйолуїруйи*

(*v*) *ако* $y = w$ *шоїаш сиїе йодредени ӣројки їенерираат ӣривијални 2-йоӣйолуїруйи,*

(*vi*) *ако* $z = w$ *шоїаш* (v, u, y), (u, v, x), (y, x, v) *и* (x, y, u) *їенерираат симеӣрични, а* (x, v, z) и (u, y, z) *їенерираат несимеӣрични 2-йоӣйолуїруйи, а во осӣанаӣиїе случаи ӣривијални.* ∎

Лема 5. *Нека* (x, y, z) *їенерира елеменӣарна симеӣрична, а* (u, v, w) *елеменӣарна несимеӣрична 2-йоӣйолуїруйа од* λ*-2-йолуїруйаӣа S. Тоїаш:*

(*i*) *ако* $x=u$ *шоїаш* (y, x, v), (z, v, x) *и* (y, z, v) *їенерараат симеӣрични,* (x, y, w), (z, y, w) *и* (z, v, w) *несимеӣрични 2-йоӣйолуїруйи,*

(*ii*) *ако* $x = v$ *шоїаш* (y, x, u), (x, u, z) и (y, z, u) *їенерираат симеӣрични,* (y, x, w), (y, z, w) и (u, z, w) *несимеӣрични, а во осӣанаӣиїе случаи ӣривијални 2-йоӣйолуїруйи,*

(*iii*) *ако* $x = w$ *шоїаш сиїе йодредени ӣројки їенерираат ӣривијални 2-йоӣйолуїруйи,*

(*iv*) *ако* $y = u$ *шоїаш* (x, y, v) *и* (y, z, v) *їенерираат симеӣрични,* (x, y, w) *и* (y, z, w) *їенерираат несимеӣрични, а осӣанаӣиїе ӣројки їенерираат ӣривијални 2-йоӣйолуїрйи,*

(*v*) *ако* $y = v$ *шоїаш* (x, y, u) и (z, y, u) *їенерираат симеӣрични,* (z, y, w) *и* (u, y, w) *несимеӣрични, а сиїе друїи йодредени ӣројки-ӣривијални 2-йоӣйолуїруйи,*

(*vi*) *ако* $y = w$, *шоїаш сиїе йодредени ӣројки їенерираат ӣривијални 2-йоӣйолуїруйи.* ∎

Да видиме, сега, што се случува ако во две 2-потполугрупи, два неидемпотентни елементи од едната се еднакви со два неидемпотентни елементи од другата 2-потполугрупа.

Лема 6. *Нека* (x, y, z) *и* (u, v, w) *їенерираат симеӣрични 2-йоӣйолуїруйи од S. Тоїаш:*

(*i*) *ако* $x = u$ *и* $y = v$, *шоїаш и* $z = w$;

(*ii*) *ако* $x = u$ *и* $z = w$ *шоїаш* (y, x, v) *и* (y, z, v) *їенерираат симеӣрични 2-йоӣйолуїруйи од S;*

(*iii*) *ако* $x = v$ *и* $y = u$ *шоїаш* (x, w, z) и (y, z, w) *їенерираат симеӣрични 2-йоӣйолуїруйи од* **S**.

Доказ. (i) Поради $x = u$, според Лема 3 имаме дека (y, z, w) генерира симетрична 2-потполугрупа, така што $(yzw) = w$, а поради $y = v$, пак според Лема 3, симетрична 2-потполугрупа генерира и (z, y, w) од каде се добива дека $(yzw) = e_w$ што противречи на претходното ако $z \neq w$.

(ii) Од четирите елементи x, y, z, v ги имаме следниве комбинации од по 3 различни елементи: $\{x, y, z\}$, $\{x, y, v\}$, $\{x, z, v\}$ и $\{y, z, v\}$. Елементите од првата и третата тројка се оние од дадените 2-потполугрупи генерирани со (x, y, z) и (u, v, w). Според Лемата 3, во секој од случаите $x = u$ и $z = w$ се добива дека (y, x, v) и (y, z, v) генерираат симетрични 2-потполугрупи.

(iii) Ист доказ како и за (ii). ∎

Да забележиме дека и овде е работено во соглсност со забелешките изнесени по Лемата 2.

Натаму, без доказ, зашто е слично како и погоре, ќе ги наведеме резултатите што се добиваат како двете дадени 2-потполугрупи се несиметрични, односно, ако едната од нив е симетрична, а другата несиметрична.

Лема 7. *Нека* (x, y, z) и (u, v, w) *генерираат несиметрични 2-потполугрупи од S. Тогаш:*

(*i*) *ниеден од следниве случаи не е можен:*

$x = u,\ y = w;\ x = v,\ y = u;\ x = v,\ y = w;\ x = v,\ z = u;$

$x = v,\ z = w;\ x = w,\ y = u;$

(*ii*) *во секој од следниве случаи останатите тројки генерираат тривијални 2-потполугрупи:* $x = u,\ y = v;\ x = w,\ z = u;\ x = w,\ z = v;\ y = w,\ z = v;$

(*iii*) *ако* $y = v$ *и* $z = w$ *тогаш мора и* $x = u;$

(*iv*) *ако* $x = u$ *и* $z = w$ *тогаш* (y, x, v) *генерира симетрична, а* (x, v, z) *генерира несиметрична елементарна 2-потполугрупа од S.* ∎

Лема 8. *Нека* (x, y, z) *генерира симетрична, а* (u, v, w) *несиметрична 2-потполугрупа од S. Тогаш можен е само случајот* $x = u,\ y = w$ *(или, симетрично,* $x = v,\ y = u$*. При* $x = u,\ y = w$*, покрај дадените, тројката* (x, y, w) *генерира несиметрична, а* (x, z, v) *тривијална 2-потполугрупа од S.*

ЛИТЕРАТУРА

[1] N. Kimura, T. Tamura, R. Merkel, Semigroups in which all subbsemigroups are left ideals, Canad. I. Math., 17, N. 1, 1965, 52—62.

[2] Шугов Э. Г., Полугруппи с идеельними подполугруппами, Мат. Сб. Т. 57, бр. 2, 1962, 179—188.

[3] B. Trpenovski, On a class of n-semigroups, Билтен ДМФ на СРМ, Т. 24, 1973, 73—80.

[4] B. Trpenovski, n-Semigroups with idempotents in which all λ-subsemigrousn are left ideals, Годишен Зборник на СРЛ, кн. 7, 1974, 5—11.

B. Trpenovši, P. Kržovski

ON REDUCED -λ SEMIGROUPS

(Summary)

In this paper we give a description of the structure of reduced $\overline{\lambda\text{-}2}$-semigroups introduced in (3). After the introduction of the elementary symmetric and nonsymmetric $\overline{\lambda\text{-}2}$-subsemigroupswe analise the cases when two elementary $\overline{\lambda\text{-}2}$-subsemigroups have in their intersection one or two elements which are not idempotents.