Год. збор. Матем. фак.
30 (29 — 33) 1979

# ЗА БИИДЕАЛНИТЕ $n$-ПОЛУГРУПИ

*П. Кржовски*

Нека $S$ е $n$-полугрупа* при што $n \geqslant 2$. За $n$-потполугрупата $B$ од $S$ велиме дека е биидиеал во $S$ ако $BS^{n-1}B \subseteq B$, Една $n$-полугрупа $S$ ја викаме биидеална ако секоја нејзина $n$-потполугрупа е биидеал. Во оваа работа главно се обопштуваат резултатите од работата [1] од бинарен на $n$-арен случај.

Најпрво ќе изнесеме неколку својства за биидеалните $n$-полугрупи кои претставуваат посебен интерес за оваа класа $n$-полугрупи од една страна, а од друга страна вршат припрема за докажување на главниот резултат. Во 9 претпоставуваме дека $S$ го поседува својството: за секој $a \in S$, $< a >$ содржи идемпотент. Главниот резултат на оваа работа е својството за декомпозиција на овие $n$-полугрупи во унипотенти бидеални $n$-полугрупи.

За $n$-полугрупата $S$ велиме дека е антикомутативна ако за некои $a_i \in S$, $i = 1,2, \ldots, n-1$,

$$xa_1 a_2 \ldots a_{n-1} y = y a_1 a_2 \ldots a_{n-1} x \Rightarrow x = y$$ (Б. Трпеновски [3]).

**1.** *За една $n$-полугрупа $S$ следните услови се еквивалентни:*

(i) *$S$ е антикомутативна.*

(ii) *$xy_1 y_2 \ldots y_{n-1} x = x$ е идентитет во $S$.*

(iii) *$x^{n+1} = x$, $xy_1 y_2 \ldots y_{n-1} z = xu_1 u_2 \ldots u_{n-1} z$ се идентитети од $S$.*

(iv) *Постои антикомутативна полугрупа (бинарна) $S\,(*)$ таква што*

$$x_0 \; x_1 \ldots x_n = x_0 * \; x_1 * \ldots * \; x_n = (x_n * \; x_n).$$

---

*) т. е. $S$ е алгебра со една асоцијативна $(n+1)$ — арна операција.

**Доказ:** Овие еквивалености лесно следат од [3].

Како последица од 1. III) се добива следнава особина:

**2.** *Една идемпотентна n-полугрупа $E$ е антикомутативна ако и само ако за секои $e, f_1, \ldots, f_{n-1}, g \in E$ е*

$$ef_1 \ldots f_{n-1}\; g = e^n\; g = eg^n.$$

Очигледно е дека:

**3.** *Секоја n-потполугрупа од една бидеална n-полугрупа е бидеална n-полугрупа.*

**4.** *Ако $S$ е бидиеална n-полугрупа, тогаш за секој $a \in S$, $aS^{n-1}\, a \subseteq \langle a \rangle$. Обратно ако, за секој $a \in S$, $aT^{n-1}\, a \subseteq \langle a \rangle$ и ако $B$ е n-подгрупа од $S$, тогаш $B$ е бидеал во $S$.*

**Доказ:** Нека претпоставиме дека $S$ е бидеална $n$-полугрупа тогаш $aS^{n-1}\, a \subseteq \langle a \rangle\; S^{n-1} \langle a \rangle \subseteq \langle a \rangle$.

Обратно нека $a, b \in B$; тогаш постојат $x_1, x_2, \ldots, x_n \in B$ такви што $b = x_1\, x_2, \ldots, x_n\, a$, а оттука се добива

$$aS^{n-1}\, b = aS^{n-1}\, (x_1\, x_2 \ldots x_n\, a) = aS^{n-2}\, (Sx_1\, x_2 \ldots x^n)\, a \subseteq$$

$$\subseteq aS^{n-2}\, S^{n+1}\, a \subseteq aS^{n-1}\, a \subseteq \langle a \rangle,$$

Од каде, поради $\langle a \rangle \subseteq B$ кога $a \in B$, следува $BS^{n-1}\, B \subseteq B$. ■

**5.** *Ако множеството $E_s$ од идемпотенти на $S$ е непразно, тогаш $E_s$ е идеал на $S$ и $E_s$ е антикомутативна n-полугрупа.*

**Доказ:** Ако е $e \in E_s$ и $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} \in S$ тогаш според 4 $ex_1\, x_2 \ldots x_{n-1}\, e = e$. Ако е $f = x_1\, x_2 \ldots x_i\, ex_{i+1} \ldots x_n$ тогаш

$$f^{n+1} = x_1 \ldots x_i\, [ex_{i+1} \ldots x_n\, (x_1\, x_2 \ldots x_i\, ex_{i+1} \ldots x_n)^{n-1}\, x_1 \ldots$$

$$\ldots x_i\, e]\, x_{i+1} \ldots x_n = x_1 \ldots x_i\, ex_{i+1} \ldots x_n = f \text{ т. е. } f \in E_s.$$

Значи $E_s$ е идеал на $S$, а дека $E_s$ е антикомутативна следува од $ex_1 \ldots x_{n-1}\, e = e$. ■

**6.** *Секоја бидеална n-полугрупа $S$ е периодична при што за секој $a \in S$, индексот $r_a \leqslant 3$.*

**Доказ:** Нека $a \in S$ и нека $B = \{a^{n+1}, a^{2n+1}, a^{4n+1}, \ldots\}$. $B$ е $n$—потполугрупа од $\langle a \rangle$ па имаме

$$a^{3n+1} = a^{n+1}\, a^{n-1}\, a^{n+1} \in BS^{n-1}\, B \subseteq B$$

што значи дека $a^{2n+1} = a^{ns+1}$ за некој $s \neq 3$, т. е. $a^{3n+1}$ е во периодичниот дел на $<a>$ од што следува дека $r_a \leqslant 3$. ∎

Како последица од претходната особина добиваме

**7.** *Ако во* $<a>$ *има идемпотент, тогаш* $|<a>| \leqslant 4$.

**Доказ:** Ако $e_a \in <a>$ е идемпотент, тогаш $e_a$ е неутрален елемент во периодичниот дел $K_a$ од $<a>$. Од тоа, како и од 4 се добива: ако $x \in K_a$, тогаш

$x = e_e \dots e_a \; xe_a \dots e_a = e_a$. ∎

**8.** *Нека* $e \in E_s$ *и нека* $S(e) = \{x \in S \mid e \in <x>\}$ *тогаш* $S(e)$ *е* $n$*-потполугрупа на* $S$ *и притоа* **e** *е нула во* $S(e)$.

**Доказ:** Нека $x_1, \dots, x_n \in S(e)$. Тогаш $ex_1 \, x_2 \dots x_n = x_n^{pn+1} \, x_1 \, x_2 \dots$
$\dots x_n = x_n^{pn} \, (x_n \; x_1 \; x_2 \dots x_n)$,

бидејќи $x_n \, x_1 \, x_2 \dots x_n \in <x_n>$ имаме $x_n \; x_1 \dots x_n = x_n^{kn+1}$ па

$ex_1 \, x_2 \dots x_n = x_n^{pk} \; x_1 \dots x_n) = x_n^{pn} \, x_n^{kn+1} = x_n^{(p+k_1)\;n+1} = e.$

Слично се покажува дека $x_1 \, x_2 \dots x_n \; e = e$, а тогаш

$$x_1 \, x_2 \dots x_{i-1} \; ex_i \dots x_n = x_1 \; x_2 \dots x_{i-1} \; e^{n+1} \; x_i \dots x^n =$$

$$= (x_1 \; x_2 \dots x_{i-1} \; e^{n-i+2}) \; e^{i-1} \; x_i \dots x_n = e^i \; x_i \dots x_n = e.$$

Нека $x_0, x_1, \dots, x^n \in S \; (e)$ и нека $z = x_0 \, x_1 \dots x_n$. Тогаш според предходниов резултат имаме:

$$ze^{n-1} \; z = x_0 \dots x_n \; e^{n-1} \; x_0 \dots x_n = e$$

а од друга страна, според 4 добиваме дека $e = ze^{n-1} \; z \in <z>$ т. е. $z \in S \; (e)$. ∎

Да забележеме дека $S(e)$ е најголемата унипотентна $n$-потполугрупа од $S$ која го содржи $e$ како идемпотент. Навистина, нека $M$ е унипотентна $n$-потполугрупа од $S$ која го содржи $e$. Ако $x \in M$, тогаш $<x> \subseteq M$. Според тоа, $<x>$ содржи еден идемпотент $f$. Бидејќи $M$ е унипотентна имаме $f = e$ па $x \in S \; (e)$ и $M \subseteq S \; (e)$.

**9.** *Нека* $S$ *е биидеална* $n$*-полугрупа таква што* $<a>$ *има идемпотент за секој* $a \in S$. *Тогаш* $S = \bigcup_{e \in E_s} S(e)$ *и* $\{S(e) \mid e \in E_s\}$ *е фамилија дисјунктни* $n$*-потполугрупи од* $S$ *при што* $S \; (e_0) \; S \; (e_1) \dots S \; (e_n) \subseteq S \; (e_0 e_1 \dots e_n) = S(e_0^{\,n} e_n) = S \; (e_0 e^n)$.

**Доказ:** нека $S(e)$ и $S(f)$ се две унипотентни $n$-полугрупи и нека $x \in S(e) \cap S(f)$; тогаш постојат природни броеви p и q такви што $x^{pn+1} = e$ и $x^{qn+1} = f$. Ќе покажеме дека $e = f$. Навистина ако $p = q$, предходното равенство е очигледно. Нека $p < q$ тогаш

$$f = x^{pn+1} = x^{pn+1}\ x^{(q-p)} = ex^{(p-1)\,n} = e \text{ (особина 8).}$$

Нека $z = x_0\, x_1 \ldots x_n$ каде што $x_0 \in S(f_0)$, $x_1 \in S(f_1), \ldots, x_n \in S(f_n)$. Тогаш

$$z^n\, x_0 = x_0\, x_1 \ldots x_n\ z^{n-1}\ x_0 \in x_0\ S^n\ S^{n-1}\ x_0 \subseteq x_0\ S^{n-1}\ x_0 \subseteq < x_0 >$$

па

$$z^n\ x_0 = x_0^{p_0 n+1}.$$

Оттука,

$$z^{n+1} = z^n\ z = z^n\ x_0\ x_1 \ldots x_n = x_0^{p_0 n+1}\ x_1\ x_2 \ldots x_n,$$

$$z^{2n+1} = z^n\ z^{n+1} = z^n\ x_0^{p_0 n+1}\ x_1\ x_2 \ldots x_n = z^n\ x_0\ x_0^{p_0 n}\ x_1\ x_2 \ldots x_n =$$
$$= x_0^{2p_0 n+1}\ x_1\ x_2 \ldots x_n.$$

Продолжувајќи така добиваме

$$z^{pn+1} = x_0^{tn+1}\ x_1\ x_2 \ldots x_n = x_0^{mn+1}\ x_0^{(t-m)\,n}\ x_1\ x_2 \ldots x_n =$$
$$= f_0\, x_0^{(t-m)\,n}\ x_1\ x_2 \ldots x_n = f_0\ x_1\ x_2 \ldots x_n$$

каде $m$ е таков што $x_0^{mn+1} = f_0$, а $f_0\ x_1\ x_2 \ldots x_n$, според **5**, е идемпотент.

Така добиваме дека $z \in S(f_0\ x_1\ x_2 \ldots x_n)$.

На сличен начин се добива дека $z \in S(x_0\ x_1 \ldots x_{n-1}\ f_n)$.

Според претходно докажаното, имаме дека

$$f_0\ x_1\ x_2 \ldots x_n = x_0\ x_1 \ldots x_{n-1}\ f_n.$$

Сега, лесно се добива дека

$$(f_0\, f_1 \ldots f_n)^n\ (x_0 \ldots x_{n-1}\ f_n) = f_0^n\ f_n,$$

$$(x_0 \ldots x_{n-1}\ f_n)\ (f_0\, f_1 \ldots f_n)^n = f_0^n\ f_n,$$

а оттука, од антикомутативноста, според 2, следува ддка

$$f_0\ x_1 \ldots x_n = f_0\ f_1 \ldots f_n = f_0^n\ f_n. \blacksquare$$

## ЛИТЕРАТУРА

1] Трпеновски Л. Б.: За една класа полугрупи. Годишен зборник на Електромашинскиот факултет на Универзитетот во Скопје кн. 2 (1986) 5-8.

2] Трпеновски Л. Б.: За некои $n$-полугрупи што се унии од $n$-групи. Билтен на друштвото на математичарите и физичарите од СР Македонија книга XVI (1965) 11-17.

[3] Трпеновски Л. Б.: Антикомутативни $n$-групоиди. Годишен зборник на Електромашински факултет во Скопје кн. 1 (1967)

[4] Trpenovski L. B.: On a class of $n$-semigroups. Билтен на друштвото на математичарите и физичарите од СР Македонија XXIV (1973) 73-80.

[5] Clifford H. A. and, Preston B. G.: The algebraic Theory of semigroups Vol. I American Math. Society 1961.

*P. Križovski*

# ON BIIDEALS $n$-SEMIGROUPS

## Summary

Let $S$ be an $n$-semigroup i. e. an algebra with an $n+1$-ary operation. A sub semigroup B of $S$ is said to be a biideal of $S$ if the inclusion $BS^n-B \subseteq B$ holds.

An $n$-semigroup $S$ is a biideal $n$-semigroup if every $n$-subsemigroup of $S$ is a biideal.

An $n$-semigroup $S$ is said to be anticommutative if for some $a \in S$

$$xa_1 a_2 \dots a_{n-1} y = ya_1 a_2 \dots a_{n-1} x \Rightarrow x = y.$$

The following conditons on an $n$-semigroup $S$ are equivalent

i) $S$ is anticommutative

ii) $xy_1 y_2 \dots y_{n-1} x = x$ is an indentity on $S$.

iii) $xy^{n+1} = x,\ xy_1 y_2 \dots y_{n-1}\, z = xu_1 u_2 \dots u_{n-1} z$ are identities on $S$.

iv) There exists an anticommutative (binary) semigroup $S$ $(*)$ such that $x_0 x_1 \dots x_n = x_0 * x_1 * \dots * x_n = (x_0 * x_n)$.

If $S$ is a biideal $n$-semigroup, then for every a $\in S$, a$S^{n-1}$a $\subseteq <$a$>$. If the set $E_s$ of idempotents is non-empty, then $E_s$ is an ideal of $S$ and $E_s$ is anticommutative $n$-semigroup. Every biideal $n$-semigroup is periodic and if $r_a$ is the index of an element a $\in S$ the $r_a \leqslant 3$.

Let e $\in E_s$ and let $S(e) = \{x \in S \mid e \in <x>\}$, then $S(e)$ is an $n$-subsemigroup of $S$ and e is a zero of $S(e)$ $S.(e)$is a maximal unipotent $n$-semigroup which contains e.

If $S$ is a biideal $n$-semigroup such that for every a $\in S$, $<a>$ contains an idempotent, then $S = \bigcup_{e \in E_s} S(e)$, and $e \neq f \Rightarrow S(e) \cap S(f) = \varnothing$. If $e_0, e_1 \dots e_n \in E_s$ then

$$S(e_0)\, S(e_1) \dots S(e_n) \subseteq S(e_0 e_1 \dots e_n).$$