Математички Билтен
19 (XLV)
1995 (17–24)
Скопје, Македонија

ISSN 0351–336X

GEOMETRISCHE THEORIE DER p–ANALYTISCHEN FUNKTIONEN

Čanak Miloš [1], Ljubomir Protić [2]

Abstract

In this paper the theory of vector fields and particularly, a notion of vector of deviation of analyticity in obtaining one classification of p–analytic functions.

1. Einführung

In seiner Monographie [1] hat G. Položij folgende Definition der p–analytishen Funktion eingeführt: Die Funktion $f(z, \overline{z}) = u + iv$ der komplexen Veränderlichen $z = x + iy$, $\overline{z} = x - iy$ nennt man die p–analytische Funktion mit der Charakteristik $p = p(x, y)$ im Gebiet G, wenn sie in diesem Gebiet definiert und eindeutig ist, und ihr reeller und imaginärer Teil, stetige partielle Ableitungen erster Ordnung nach x und y besitzen und folgendem System

$$u'_x = \frac{1}{p}\, v'_y\,, \qquad u'_y = -\frac{1}{p}\, v'_x \tag{1}$$

genügen. Diese Funktionen spielen in der Filtrationstheorie, Torsionstheorie der Rotationsflächen, achsensymmetrischen Elastizitätstheorie und speziell in der Theorie der elastischen Schalen eine wichtige Rolle.

Durch Substitution $v_0 = v/p$, wobei v_0 eine neue unbekannte Funktion ist, geht das System (1) in

$$u'_x - v'_{o_y} = \frac{p'_y}{p} v_0 \,, \qquad u'_y + v'_{o_x} = -\frac{p'_x}{p} v_0 \tag{2}$$

über. Wenn man die zweite Gleichung (2) mit i multipliziert und mit der ersten addiert, so erhält man die folgende komplexe Differentialgleichung

$$Df = -\frac{Dp}{2p}(f - \overline{f}) \,, \qquad (f = u + iv_0) \tag{3}$$

wobei

$$Df = \left(u'_x - v'_{0_y}\right) + i\left(u'_y + v'_{0_x}\right) = 2f'_{\overline{z}} \tag{4}$$

der bekannte Operator von Kolossov ist.

Parallel mit der Gleichung (3) betrachten wir auch die Gleichung

$$Df = -\frac{Dp}{2p} f \,. \tag{5}$$

Die allgemaine Lösung der Gleichung (5) hat die Form

$$f = Q(z) \cdot p^{-1/2} \tag{6}$$

(sieche [3]), webei $Q(z)$ beliebige analytische Funktion ist.

Auf Grund (6) führen wir in die Gleichung (3) die Substitution $V = f \cdot p^{1/2}$ ein. Dann geht diese Gleichung in

$$DV = \frac{Dp}{2p}\overline{V} \tag{7}$$

order

$$\left(v'_{1_x} - v'_{2_y}\right) + i\left(v'_{1_y} + v'_{2_x}\right) = \frac{p_x + ip'_y}{2p}(v_1 - iv_2) \,, \tag{8}$$

$$(V = v_1 + iv_2)$$

über. Durch Trennung des reellen und imaginären Teiles erhält man das folgende G Gleichungssystem

$$\begin{aligned} v'_{1_x} - v'_{2_y} &= a(x,\, y)v_1 + b(x,\, y)v_2 \\ v'_{1_y} + v'_{2_x} &= b(x,\, y)v_1 - a(x,\, y)v_2 \\ \left(a(x,\, y) = \frac{p'_x}{2p}\right.&,\quad \left. b(x,\, y) = \frac{p'_y}{2p}\right) . \end{aligned} \tag{9}$$

2. Operatoren β und μ

In seiner Monographie [2] hat A. Bilimović ausführlich eine geometrische Theorie der nichtanalytischen komplexen Funktionen $w(z,\ \overline{z}) = u(x,\ y) + iv(x,\ y)$ entwickelt. Die Grundlage dieser Theorie stellt die Mittelableitung

$$\mu(w) = \frac{1}{2}\left[u'_x + v'_y + i\left(v'_x - u'_y\right)\right] = \mu_1 + i \cdot \mu_2 \tag{10}$$

und die Abweichung von der analytizität

$$B(w) = \left(u'_x - v'_y\right) + i\left(u'_y + v'_x\right) = B_1 + iB_2\,, \tag{11}$$

wie auch die entsprechenden Vektoren

$$\overrightarrow{\mu} = \left[\frac{1}{2}\left(u'_x + v'_y\right)\right]\ \overrightarrow{i} + \left[\frac{1}{2}\left(v'_x - u'_y\right)\right]\ \overrightarrow{j} \tag{12}$$

$$\overrightarrow{B} = \left(u'_x - v'_y\right)\ \overrightarrow{i} + \left(u'_y + v'_x\right)\ \overrightarrow{j} \tag{13}$$

$$(\overrightarrow{\beta} = \frac{1}{2}\overrightarrow{B})$$

dar. Mit Hilfe der Operatoren μ und β lässt sich die Ableitung der nichtanalytischen Funktion in der gegebenen Richtung

$$\dot{w}^{(\theta)} = \mu(w) + \beta(w)\, e^{-2\theta i} \tag{14}$$

wie auch der entsprechende Vektor

$$\overrightarrow{\dot{w}^{(\theta)}} = \overrightarrow{\mu} + \overrightarrow{\beta}\ e^{-2\theta i} \tag{15}$$

ausdrücken.

Um das Gleichungssystem (1) in einer geometrischen Form zu darstellen, betrachten wir die folgende Matrizenidentität

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} u'_x + v'_y & u'_y - v'_x \\ v'_x - u'_y & u'_x + v'_y \end{pmatrix} + \\ &+ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} u'_x - v'_y & v_x + u'_y \\ v'_x + u'_y & -u'_x + v'_y \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{16}$$

Auf Grund (10), (11) und (16) finden wir die Werte

$$\begin{aligned} u'_x &= \mu_1 + b_1\,, \qquad u'_y = -\,\mu_2 + b_2 \\ v'_x &= \mu_2 + b_2\,, \qquad v'_y = \mu_1 - b_1 \\ (\mu &= \mu_1 + i\mu_2\,, \qquad \beta = b_1 + ib_2)\,. \end{aligned} \tag{17}$$

Wenn wir die Werte (17) in (1) einsetzen, so erhalten wir

$$\beta = K\,\overline{\mu} \tag{18}$$

order

$$\overrightarrow{\beta} = K\,\overrightarrow{\overline{\mu}} \tag{19}$$

mit $K = (1-p)/(1+p)$. Die Formel (19) stellt die Vektorform für die p–analytischen Funktionen (1) dar. Durch weitere Substitution (18) in (14) erhält man endlich die Ableitung der p–analytischen Funktion in gegebener Richtung

$$\dot{w}^{(\theta)} = \mu + K\,\overline{\mu}\,e^{-2\theta i}\,. \tag{20}$$

3. Eine Klassifikation der p–analytischen Funktionen

Man ersieht aus

$$\overrightarrow{B} = \operatorname{grad} v_1 + \overrightarrow{k} \times \operatorname{grad} v_2 = \left(v'_{1_x} - v'_{2_y}\right)\overrightarrow{i} + \left(v'_{1_y} + v'_{2_x}\right)\overrightarrow{j} \tag{21}$$

und (9) ebenfalls dass

$$\operatorname{div}\overrightarrow{B} = \nabla^2 v_1\,, \qquad \operatorname{rot}\overrightarrow{B} = \overrightarrow{k}\,\nabla^2 v_2$$

ist. Auf Grund dieser Relationen ist eine Klassifikation der p–analytischen Funktionen ermöglicht. Für $\nabla^2 v_1 = 0$, $\nabla^2 v_2 = 0$ ist das Vektorfeld von $\overrightarrow{B}$ ein Laplacesches Feld. Für $\nabla^2 v_1 = 0$, $\nabla^2 v_2 \neq 0$ ist das Feld ein quellenfreies(solenoidisches)Feld. Im Falle $\nabla^2 v_1 \neq 0$, $\nabla^2 v_2 = 0$ ist das Feld ein wirbelfreies, während für $\nabla^2 v_1 \neq 0$, $\nabla^2 v_2 \neq 0$ repräsentiert der Vektor $\overrightarrow{B}$ ein zusammengesetztes Feld. Betrachten wir jetzt alle diese Fälle.

I Laplace–sches Feld

Aus der Relationen $\operatorname{div}\overrightarrow{B} = \nabla^2 v_1 = 0$ und $\operatorname{rot}\overrightarrow{B} = \overrightarrow{k}\,\nabla^2 v_2 = 0$ folgt

$$v''_{1_{xx}} + v''_{1_{yy}} = 0\,, \qquad v''_{2_{xx}} + v''_{2_{yy}} = 0\,. \tag{22}$$

Wenn wir die erste Gleichung (9) nach x, die zweite nach y differenzieren und die beiden addieren, so erhalten wir mit Ausnützung der ersten Bedingung (22)

$$a\left(v'_{1_x} - v'_{2_y}\right) + b\left(v'_{2_x} + v'_{1_y}\right) + v_1(a'_x + b'_y) + v_2(b'_x - a'_y) = 0\,. \tag{23}$$

Andererseits, wenn wir die erste Gleichung (9) nach y, die zweite nach x differenzieren und die beiden subtrahieren, so erhalten wir mit Ausnützung der zweiten Bedingung (22)

$$a\left(v'_{1_y}+v'_{2_x}\right)+b\left(v'_{2_y}-v'_{1_x}\right)+v_1(a'_y-b'_x)+v_2(b'_y+a'_x)=0\,. \tag{24}$$

Durch Substitution der Werte $\left(v'_{1_x}-v'_{2_y}\right)$ und $\left(v'_{2_x}+v'_{1_y}\right)$ aus (9) in (23) und (24) ersieht man nach einer kürzeren Rechnung dass

$$\begin{aligned}\left(a^2+b^2+a'_x+b'_y\right)v_1+\left(b'_x-a'_y\right)v_2&=0\\ \left(a'_y-b'_x\right)v_1+\left(-a^2-b^2+b'_y+a'_x\right)v_2&=0\end{aligned} \tag{25}$$

oder wegen

$$a(x,y)=\frac{p'_x}{2p}\,,\qquad b(x,y)=\frac{p'_y}{2p}$$

auch

$$\begin{aligned}\frac{2pp''_{xx}+2pp''_{yy}-p'^2_x-p'^2_y}{4p^2}\cdot v_1&=0\\ \frac{2pp''_{xx}+2pp''_{yy}-3p'^2_x-3p'^2_y}{4p^2}\cdot v_2&=0\end{aligned} \tag{26}$$

gilt. Daraus folgt

$$\begin{aligned}&2\left(pp''_{xx}+pp''_{yy}\right)-\left(p'^2_x+p'^2_y\right)=0\\ &2\left(pp''_{xx}+pp''_{yy}\right)-3\left(p'^2_x+p'^2_y\right)=0\\ &(v_1\neq 0\quad v_2\neq 0)\,.\end{aligned} \tag{27}$$

Di erste und die zweite Bedingung (27) stellen ein lineares, homogenes System zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten $\left(pp''_{xx}+pp''_{yy}\right)$ und $\left(p'^2_x+p'^2_y\right)$ dar. Wegen $D=-4\neq 0$ existieren nur triviale Lösungen

$$p'^2_x+p'^2_y=0\,,\qquad pp''_{xx}+pp''_{yy}=0\,. \tag{28}$$

Die Bedingungen (28) sind dann und nur dann erfültt, wenn $p=c=$ const. gilt.

Umgekehrt, wenn wir annehmen dass $p=c$, so erhalten wir durch Substitution dieses Wertes in (9) und durch Differenzieren

$$v''_{1_{xx}}+v''_{1_{yy}}=v''_{2_{xx}}+v''_{2_{yy}}=0\,.$$

Daraus folgt der folgende

Satz **1**: Vektorfeld von $\overrightarrow{B}$ für das Gleichungssystem (9) ist dann und nur dann ein Laplacesches Feld, wenn $p=c=$ const. gilt.

Bemerkung **1**: Im speziellen Fall $c = 1$ reduziert das System (1) (wie auch das System (9)) auf

$$u'_x = v'_y\,, \qquad u'_y = -v'_x$$

und die p–analytischen Funktionen gehen in die gewöhnlichen analytischen Funktionen analytischen Funktionen über.

II Solenoidisches Feld

Wegen $\operatorname{div} \overrightarrow{B} = \nabla^2 v_1 = 0$, $\operatorname{rot} \overrightarrow{B} = \overrightarrow{k}\, \nabla^2 v_2 \neq 0$ ist nur die erste Bedingung (22) erfüllt. Auf Grund dieser Bedingung kann man die Gleichung (23) wie auch die erste Gleichung (25) erhalten. Wegen $a = p'_x/2p$, $b = p'_y/2p$ folgt dass

$$2pp''_{xx} + 2pp''_{yy} - p'^2_x - p'^2_y = 0 \tag{29}$$

gilt. Suchen wir die allgemeine Lösung der Gleichung (29) in der Form $p = f(h)$ wobei f zweimal differenzierbare, unbekannte Funktion ist und $h = h(x, y)$ beliebige, harmonische Funktion darstellt. Die Gleichung (29) geht dann in

$$\left(2ff'' - f'^2\right)\left(h'^2_x + h'^2_y\right) = 0 \tag{30}$$

über. Der zweite Faktor $\left(h'^2_x + h'^2_y\right)$ annuliert sich nur im Falle $h(x, y) = c$, und dann ist das Vektorfeld von $\overrightarrow{B}$ ein Laplacesches Feld. Darum muss

$$2ff'' - f'^2 = 0 \tag{31}$$

gelten. Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist

$$f = (c_1 h + c_2)^2 \tag{32}$$

und die allgemeine Lösung der Gleichung (29) wird durch die Formel

$$p(x, y) = [c_1 \cdot h(x, y) + c_2]^2 \tag{33}$$

gegeben, wobei $h(x, y)$ beliebige harmonische Funktion ist und c_1, c_2 beliebige, reelle Konstanten darstellen.

Umgekehrt, wenn wir annehmen dass $p = (c_1 h + c_2)^2$ gilt, so erhalten wir durch Substitution dieses Wertes in (9) und durch Differenzieren

$$v''_{1_{xx}} + v''_{1_{yy}} = 0\,.$$

Daraus folgt der folgende

Satz **2**: Vektorfeld von $\overrightarrow{B}$ für das Gleichungssystem (9) ist dann und nur dann ein solenoidisches Feld, wenn

$$p(x, y) = [c_1 \cdot h(x, y) + c_2]^2$$

gilt, wobei $h = h(x, y)$ beliebige harmonische Funktion ist.

Bemerkung **2**. Im speziellen Fall $h(x, y) = c =$ const. ist das Vektorfeld von $\overrightarrow{B}$ ein Laplacesches Feld und der Fall **2** reduziert sich auf den Fall **1**.

III Wirbelfreies Feld

Wegen div $\overrightarrow{B} = \nabla^2 v_1 \neq 0$, rot $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{k}\,\nabla^2 v_2 = 0$ ist nur die zweite Bedingung (22) erfüllt. Wenn wir das gleiche Verfahren wie im Falle **2** wiederholen, so erhalten wir die Gleichung

$$2pp''_{xx} + 2pp''_{yy} - 3p'^2_x - 3p'^2_y = 0\,. \tag{34}$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist

$$p(x, y) = [c_1 \cdot h(x, y) + c_2]^{-2} \tag{35}$$

und dann gilt auch der folgende.

Satz **3**: Vektorfeld von , $\overrightarrow{B}$ für das Gleichungssystem (9) ist dann und nur dann ein wirbelfreies Feld wenn

$$p(x, y) = (c_1 h + c_2)^{-2}$$

gilt, wobei $h = h(x, y)$ beliebige, harmonische Funktion ist.

IV Zusammengesetztes Feld

Diesem Fall entspricht die allgemeine Form des Systems (9). Wenn r Koeffizient $Dp/2p$ der kopmlexen Gleichung (7) analytisch ist, lässt sich die allgemeine Lösung dieser Gleichung durch die Metode der verallgemeinerten areolären Reihen (siehe [4]) finden.

References

[1] Položij, G.: *Teorija i primenenie p–analitičeskih funkcii*, Naukova Dumka, Kiev, 1973

[2] Bilimović, A.: *Sur la geometrie differentielle d'une function non analytique*, GLAS de l'Academie Serbe des sciences, t. CCXLII, N_o **19**, 1–81, 1960

[3] Fempl, S.: *Reguläre Lösungen eines Systems partieller Gleichungen*, Publications de l'Inst. Math. Beograd, tome **4**(18), 115–120, 1964

[4] Čanak, M.: *Systeme von Differentialgleichungen mit analytischen Koeffizienten und Methode der verallgemeinerten areolären Reihen*, Publications de l'Inst. Math. Beograd, tome **33**(47), 35–39, 1983

ГЕОМЕТРИСКА ТЕОРИЈА НА p–АНАЛИТИЧКИТЕ ФУНКЦИИ

Чанак Милош [1], Љубомир Протиќ [2]

Р е з и м е

Во овој труд теоријата на векторските полиња, и во посебен случај поимот на векторот на отстапувањето од аналитичноста, се применуваат за добивање една класификација на p–аналитичките функции.

[1] 1100 Beograd,
Brzakova 4
Jugoslavija

[2] 11000 Beograd,
Dr. Nike Miljanića 1
Jugoslavija

*) This research was supported by Science Fund of Serbia, grant number 0401A, through Matematički Institut.