Математички Билтен
19 (XLV)
1995 (37–42)
Скопје, Македонија

ISSN 0351–336X

ЗА ЕДНА ГЕНЕРАЛИЗАЦИЈА НА РАВЕНКАТА НА И. Н. ВЕКУА СО АНАЛИТИЧКИ ПО ОДНОС НА z, $\bar{z}$ КОЕФИЦИЕНТИ

Драган Димитровски [1], Милое Рајовиќ [2], Раде Стојиљковиќ [3]

Апстракт

Со методологијата на решавањето на равенката Векуа не мора исклучиво да се решаваат само равенки од елиптичен тип. Може да се покаже дека општата метода на ареоларни редови, аналитичката замена и аналитичките итерации важат за сите типови парцијални равенки со аналитички коефициенти.

Вовед

Општата система линеарни парцијални равенки од I–ви ред со две непознати функции $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ и со аналитички коефициенти по (x, y)

$$\begin{aligned} a_{11}\frac{\partial u}{\partial x} + a_{12}\frac{\partial u}{\partial y} + b_{11}\frac{\partial v}{\partial x} + b_{12}\frac{\partial v}{\partial y} + a_1 u + b_1 v = f_1 \\ a_{21}\frac{\partial u}{\partial x} + a_{22}\frac{\partial u}{\partial y} + b_{21}\frac{\partial v}{\partial x} + b_{22}\frac{\partial v}{\partial y} + a_2 u + b_2 v = f_2 , \end{aligned} \tag{1}$$

при услови за елиптичност [1]:

$$a > 0, \qquad \Delta > 0 \tag{2}$$

и при услови на симетрија

$$a_{12} = -a_{21} , \qquad a_{11} = a_{22} , \tag{3}$$

може да се трансформира во каноничен облик

$$\begin{aligned} U_x - V_y + a_* U + b_* V &= f \\ U_y - V_x + c_* U + d_* V &= g\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Ако воведеме комплексна функција

$$W = W(z, \overline{z}) = U(x, y) + iV(x, y) \tag{5}$$

$$z = x + iy, \qquad \overline{z} = x - iy$$

и за неа формални изводи

$$\frac{\partial W}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial W}{\partial x} + i\,\frac{\partial W}{\partial y}\right] = \frac{1}{2}\,[U_x - V_y + i(U_y + V_x)] \tag{6}$$

$$\frac{\partial W}{\partial z} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial W}{\partial x} - i\,\frac{\partial W}{\partial y}\right] = \frac{1}{2}\,[U_x + V_y - i(U_y - V_x)] \tag{7}$$

$$\frac{\partial \overline{W}}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial W}{\partial x} + i\,\frac{\partial \overline{W}}{\partial y}\right] = \frac{1}{2}\,[U_x + V_y + i(-V_x + U_y)] \tag{8}$$

$$\frac{\partial \overline{W}}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \overline{W}}{\partial x} - i\,\frac{\partial W}{\partial y}\right] = \frac{1}{2}\,[U_x - V_y - i(U_x + V_y)] \tag{9}$$

тогаш лесно се докажуваат следниве основни особини:

Теорема 1. Сите четири изводи (6)–(9) се линеарно независни.

Теорема 2. Важи дистрибувност на операцијата $\overline{W}$ како на обичен количник, така и на диференцијален количник и на парцијален извод, т.е. за изводите (6)–(9) важат врските:

$$\left(\overline{\frac{\partial W}{\partial \overline{z}}}\right) = \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} \tag{10}$$

$$\left(\overline{\frac{\partial W}{\partial z}}\right) = \frac{\partial \overline{W}}{\partial \overline{z}} \tag{11}$$

кои не се линеарни туку се *конјугациони*.

Со помош на овој апарат, системата (1) може да се напише во вид на една комплексна равенка со 4 изводи:

$$a\,\frac{\partial W}{\partial \overline{z}} + b\,\frac{\partial W}{\partial z} + c\,\frac{\partial W}{\partial \overline{z}} + d\,\frac{\partial \overline{W}}{\partial z} = AW + B\overline{W} + F\,, \tag{12}$$

каде a, b, c, d, A, B и F се некои дадени аналитички коефициенти од z, $\overline{z}$. Равенката (12) очигледно ја содржи во себе равенката Белтрами

$$\frac{\partial W}{\partial \overline{z}} = q(z, \overline{z}) \frac{\partial W}{\partial z}$$

и равенката Векуа

$$\frac{\partial W}{\partial \overline{z}} = A(z, \overline{z})W + B(z, \overline{z})\overline{W} + F(z, \overline{z}) . \tag{13}$$

Проширување на равенката Векуа

Се прашуваме во што се трансформира равенката Векуа (13) со *псевдолинеарната замена*

$$W = \alpha V + \beta \overline{V} + \gamma , \tag{14}$$

каде α, β и γ се аналитички функции од z и $\overline{z}$.

Со непосредна замена на (14) во (13) добиваме

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\partial V}{\partial \overline{z}} + \beta \frac{\partial \overline{V}}{\partial \overline{z}} =& V \left[A\alpha + B\overline{\beta} - \frac{\partial \alpha}{\partial z}\right] + \overline{V} \left[A\beta + B\overline{\alpha} - \frac{\partial \beta}{\partial \overline{z}}\right] + \\ &+ \left[F + A\gamma + B\overline{\gamma} - \frac{\partial \gamma}{\partial \overline{z}}\right] . \end{aligned} \tag{15}$$

Тоа значи, ако сме ја решиле (13), сме решиле и класи (15) за секоја аналитичка тројка (α, β, γ) т.е. можеме да најдеме V, како решение на (15), во вид

$$V = V(z, \overline{z};\ A, B, F, \alpha, \beta, \gamma) .$$

Од (14) наоѓаме со конјугација

$$V = \frac{1}{|\beta|^2 - |\alpha|^2} \left[-\overline{\alpha} W + \beta \overline{W} + (\overline{\alpha}\gamma - \overline{\gamma}\beta)\right] . \tag{16}$$

Според тоа, ако равенката Векуа (13) сме ја решиле на некој од начините во [2] или [3], на пример со метода на ареоларни редови или со метода на аналитичка замена или итерации,

$$a\beta + b\overline{\alpha} = 0\,. \tag{19}$$

Следува

Теорема 3. Општата равенка Векуа (18), при условот (19), е еквивалентна со равенката Векуа (13) преку псевдолинеарната смена (14′).

Линеарна равенка со 4 изводи

Да извршиме иста замена (14) во најопштата равенка (12). Добиваме

$$\begin{aligned}(a\alpha + b\overline{\beta})\frac{\partial W}{\partial \overline{z}} + (a\beta + b\overline{\alpha})\frac{\partial \overline{W}}{\partial \overline{z}} + (c\alpha + d\overline{\beta})\frac{\partial W}{\partial z} + (c\beta + d\overline{\alpha})\frac{\partial \overline{W}}{\partial z} = \\ = W\left(A\alpha + B\overline{\beta} - a\frac{\partial \alpha}{\partial z} - b\frac{\partial \overline{\beta}}{\partial z} - c\frac{\partial \alpha}{\partial z} - d\frac{\partial \overline{\beta}}{\partial z}\right) + \\ + \overline{W}\left(A\beta + B\overline{\alpha} - a\frac{\partial \beta}{\partial \overline{z}}\right) - b\frac{\partial \overline{\alpha}}{\partial \overline{z}} - c\frac{\partial \beta}{\partial z} - d\frac{\partial \overline{\alpha}}{\partial z} + \\ + \left(A\gamma + B\overline{\gamma} + F - a\frac{\partial \gamma}{\partial \overline{z}} - b\frac{\partial \overline{\gamma}}{\partial \overline{z}} - c\frac{\partial \gamma}{\partial z} - d\frac{\partial \overline{\gamma}}{\partial z}\right)\,,\end{aligned} \tag{20}$$

т.е. равенка од од исти тип. (20) содржи и равенка Векуа, Белтрами, но и многу други решливи аналогно по методите што ги препорачуваме. Така можеме да решиме во смисла на *општо решение*, без оглед на тип: елиптички, хиперболички, параболички или пошироки класи од елиптички тип на Векуа.

Врз основа на ова можат да се конструираат огромен број решливи равенки и илустрации.

Литература

[1] Векуа, И.Н.: *Обопщенные аналитические функции*, Физматгиз I–вое издание, Москва, 1958

[2] Илиевски, Б.: *Линеарни ареоларни равенки*, Докторска дисертација, Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Скопје, 1992

[3] Стојиљковиќ, Р.: *Неки квадратурни проблеми код ареоларних једначина*, Магистерска работа, Приштина, 1993

ON THE GENERALIZATION OF I.N. VEKUA EQUATION WITH ANALYTIC COEFFICIENTS IN $z, \bar{z}$

D. Dimitrovski [1], M. Rajović [2], Rade Stojiljković [3]

Summary

Equation with 4 derivates in treated (12) to be solved by:

I. areolar series method,

II. method of analytic change,

III. iteration method,

IV. substution method.

[1] Prirodno-matematichki fakultet
p.f. 162,
91000 Skopje
Makedonija

[2] Mašinski fakultet
Kraljevo
Jugoslavija

[3] Pedagoški fakultet
Gnilane
Jugoslavija