Математички Билтен
**22** (XLVIII)
1998 (31-36)
Скопје, Македонија

ISSN 0351-336X

# МЕРЫ, ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ОТОБРАЖЕНИЙ ИНДУЦИРОВАННЫХ АФФИННЫМИ ОТОБРАЖЕНИЯМИ

Ч. Доличанин[1)], Антониевич А.Б.[2)] *, М. Стефанович[1)]

**Апстракт**

В работе получено явное описание множества $M(X,\alpha)$ мер инвариантных и эргодических относительно для отображение $\alpha$ индуцированных афинными отображениями.

Результати сформулировани в виде теоремы, приведенной на конце стати.

При исследовании неокорых классов функционально – дифференциальных уравнений с частными производными возникает следующая конструкция [1,2].

Пусть $g: R^m \to R^m$ – афинное отображение вида $g(x) = Ax + h$, где $A$ – заданная невырожденая матрица, $h$ – заданный вектор из $R^m$. Пусть $\overline{R}^m = R^m \cup \{\infty\}$ – компактификация $R^m$ бесконечно удаленной точкой,

$S^{m-1} = \{\zeta \in R^m: \|\zeta\| = 1\}$, $(m-1)$ – мерная сфера и пусть $\Omega = \overline{R}^m \times S^{m-1}$. Отображение $g$ индуцирует отображение $\alpha: \Omega \to \Omega$, действующее на формулы

* Partially suported by International Soros Science Education Programm.

$$\alpha(x,\zeta) = \big(g(x),\, \tilde\alpha(\zeta)\big),$$

где

$$\tilde\alpha(\zeta) = \frac{L\zeta}{\|L\zeta\|}, \;\; L = (A^t)^{-1}$$

– матрица, обратная и транспонированная к $A$.

Как показано в [1, 2], вопрос о нормальной разрешимости соотвествующих функционально – дифференциальных уравнений сводится к описанию множества мер на $\Omega$, инвариантных и эргодических относительно отображение $\alpha$.

Напомним, эта борелевская мера $\mu$ на компактном топологическом пространстве $X$ называется инвариантной относительно отображения $\alpha$, если для борелевского множества $E$ выполнено $\mu\big(\alpha^{-1}(E)\big) = \mu(E)$. Мера $\mu$ назиवается эргодической, если из того, что $\mu\big(\alpha^{-1}(E)\,\Delta E\big) = 0$ (здесь знак $\Delta$ – симетрическая разность множеств) следует, что $\mu(E) = 0$, либо $\mu(X\setminus E) = 0$. Через $M(X,\alpha)$ обозначим множество мер на $X$, инвариантных и эргодических относительно $\alpha$. К необходимости описаниая множества $M(X,\alpha)$, кроме исследования указанных функционально – дифференциальных уравнений приводят задачи теории динамических систем, спектральност теории операторов и другие вопросы [3.4].

Существование таких мер для любого $\alpha$ следует из известной теоремы Крылова – Боголюбова, однако описание $M(X,\alpha)$ в общем случае неэффективно. Поэтому представлаем интерес выделение конкретных классов отображений. для которих возможно явное описание множества $M(X,\alpha)$. В работе получено такое описание для отображеност $\alpha$, индуцированных аффиными отображениями.

Согласно теореме Радона, между мерами на компактном пространстве $X$ и непреривными линейными функционалами на пространстве $C(X)$ непреривных функций на $X$ существует взаимно однозначное соотвествие задаваемое равенством

$$\mu \to f_\mu(u) = \int\limits_X u(x)\,d\mu(x), \quad u \in C(X). \tag{1}$$

Обозначим через $F(X,\alpha)$ множество функционалов на $C(X)$, порожденых мерами из $M(X,\alpha)$ и описаем это множество.

В общем случае при описании множества $F(\Omega,\alpha)$ возникает много качественно различных вариантов и обозримого описания пока не получено.

Приведем здесь соотвествующий результат для типичного частного случая. Пусть $m = 5$ и матрица $A$ в некотором базисе может быть записана в виде

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 \cos\theta_1 & \lambda_1 \sin\theta_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_1 \sin\theta_1 & \lambda_1 \cos\theta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \cos\theta_2 & \lambda_2 \sin\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_2 \sin\theta_2 & \lambda_2 \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \tag{2}$$

где $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_1 \neq 0$ и числа $\theta_1/2\pi$ и $\theta_2/2\pi$, рационально независимы (последнее означает, что равенство $n_1 \cdot \theta_1 + n_2 \cdot \theta_2 = n_3 \cdot 2\pi$, где $n_1, n_2, n_3$ – целые числа, возможно только при $n_1 = n_2 = 0$). Матрицы такого вида являются типичными в том смысле, что в катгруппе $G\ L\ (R, 5)$ такие матрицы образуют множество второй категории в смысле Бэра, а дополнение до множества таких матриц меры нуль и является множеством первой категории.

Пусть $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \psi \le 2\pi$, $T_{\varphi,\psi}$ – $5 \times 5$ матрица вида

$$T_{\varphi,\psi} = \begin{pmatrix} T_\varphi & 0 & 0 \\ 0 & T_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Пусть $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*)$, где

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = [E - \lambda_1 T_{\theta_1}]^{-1} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_3^* \\ x_4^* \end{pmatrix} = [E - \lambda_2 T_{\theta_2}]^{-1} \begin{pmatrix} h_3 \\ h_4 \end{pmatrix}$$

$$x_5^* = \begin{cases} \dfrac{h_5}{l - \lambda_3}, & \lambda_3 \neq 1 \\ 0, & \lambda_3 = 1 . \end{cases}$$

Для каждой точки $(x, \zeta) \in X$ зададим непрерывный линейный функционал на $C(X)$ по правилу

$$f_{x,\zeta}(u) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x^* + T_{\varphi,\psi} x,\ T_{\varphi,\psi} \zeta)\, d\varphi\, d\psi \tag{3}$$

где полагаем $T_{\varphi,\psi}\infty = \infty$. Такие функционалы задают меры сосредоточенные на двумерных торах, вложенных в $X$, или, в случае вырождения, в зависимости от $(x\zeta)$, на окружностях или в точках.

Множество $F(\Omega, \alpha)$ состоит из функционалов вида (3) где $(x, \zeta)$ принадлежит некотором множеству $X_\alpha$, достаточно сложным образом зависящему от $\alpha$. Перейдем к описанию этой зависимости.

Матрице $A$ поставим в соотвествие набор чисел

$$\Gamma = \Gamma(\alpha) = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3),$$

где $\gamma_k = 1$, если $\lambda_k = 1$ и $\gamma_k = 0$ если $\lambda_k \neq 1$. Зададим множество $\Omega(\Gamma)$ в $R^5$ по правилу

$$\Omega(\Gamma) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)\},$$

где $x_1 = x_2 = 0$ если $\gamma_1 = 0$, $x_2 = x_3 = 0$ если $\gamma_2 = 0$ и $x_5 = 0$ если $\gamma_3 = 0$, а остальные координаты произвольные.

По матрице $A$ построим разбиение множества $\{1,2,3\}$ на классы, относя $R$ и $\zeta$ в один класс, если $\lambda_k = \lambda_5$. Каждому из пяти возможных разбиений $\Delta = \Delta(A)$ поставим в соотвествие подмножество $\Sigma(\Delta)$ из $S^{m-1}$, состоящее из векторов $\zeta$ указанного ниже вида:

1. $\Delta = \{(1),\ (2),\ (3)\}$

   $\Sigma(\Delta) = \{(\zeta_1\zeta_2, 0, 0, 0),\ (0, 0, \zeta_3, \zeta_4, 0),\ (0, 0, 0, 0, \zeta_5)\}$

2. $\Delta = \{(1,2),\ (3)\}$

   $\Sigma(\Delta) = \{(\zeta_1\zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, 0),\ (0, 0, 0, 0, \zeta_5)\}$

3. $\Delta = \{(1,3),\ (2)\}$

   $\Sigma(\Delta) = \{(\zeta_1\zeta_2, 0, 0, \zeta_5),\ (0, 0, \zeta_3, \zeta_4, 0)\}$

4. $\Delta = \{(1),\ (2,3)\}$

   $\Sigma(\Delta) = \{(\zeta_1\zeta_2, 0, 0, 0),\ (0, 0, \zeta_3, \zeta_4, \zeta_5)\}$

5. $\Delta = \{(1,2,3)\}$. $\Sigma(\Delta) = S^{m-1}$.

**Теорема 1.** *Пусть матрица $A$ имеет вид* (2), *где $\theta_1/2\pi$ и $\theta_2/2\pi$ рационально независимы, $\lambda_3 > 0$. Множество $F(\Omega, \alpha)$ имеет тогда вид*

$$F(\Omega, \alpha) = \{f_{(x,\zeta)}(u),\ (x, \zeta) \in X_\alpha\}$$

*где $X_\alpha = \{\infty\} \times \Sigma\big(\Delta(A)\big)$ в случае, когда $\lambda_3 = 1$ и $h_5 \neq 0$, и где во всех остальных случаях $X_\alpha = \big[\Omega\big(\Gamma(\alpha)\big) \cup \{\infty\}\big] \times \Sigma\big(\Delta(A)\big)$.*

*Заметим, что в этой формулировке теоремы содержится ровно* 20 *качественно различных случаев, возникающих при разных* $\Gamma$ *и* $\Delta$.

## Литература


[1] Антоневич А. Б., Лебедев А. Б.: *О непаровости функционально – дифференционального оператора с частными производными, содержащего линейное преобразование аргумента, Дифференциональные уравнения.* Мир, Т.18, Н6 с.987-996, 1982.

[2] Антоневич А. Б.: *Линейные функциональные уравнения. Операторный подход.* Минск, Университетское, 1988.

[3] Корифельд И. Л., Синай Я. Г., Фомин С. В.: *Эргодическая теория*, Москва, Наука, 1980.

[4] Holmos P.: *Lectures on ergodic theory*, Tokyo, 1953.

[5] Doličanin Ć., Antonevič A., Stefanović M.: *Invariant and ergodic measures in relation to movement of invariant, časopis "Journal of electronies and mathematics*, E.T.F. Priština, 81-84, 1996.

# МЕРКИ, ИНВАРИЈАНТНИ ВО ОДНОС НА ТРАНСФОРМАЦИЈА ИНДУЦИРАНИ СО АФИНИ ТРАНСФОРМАЦИИ

Ќ. Доличанин[1)], Антониевич А. Б.[2)] и М. Стефановиќ[1)]

## Резиме

Во работата е добиен експлицитен опис на множествата $M(X,\alpha)$ на мерки инваријантни и ергодички во однос на трансформација $\alpha$ индуцирани со афини трансформации.

Резултатите се формулирани во вид на теорема, којашто е наведена на крајот на темата.

1)
Univerzitet u Prištini
Elektrotehnički fakultet
Priština
Jugoslavija

2)
Belaruski državni univerzitet
Informatika i radioelektronika
Minsk
Belarus