SUR L'ORDRE DE GRANDEUR DE LA TRANSFORMÉE DE SINUS DE FOURIER

par

R. BOJANIĆ et M. TOMIĆ (Beograd)

SOMMAIRE — On démontre l'inégalité $At^{-1}f(t^{-1}) < F(t) < Bt^{-1}f(t^{-1})$ pour t suffisamment petit, où $F(t) = \int_{+0}^{\infty} f(x) \sin tx \, dx$ et $f(t) \downarrow 0$.

1. Dans [1] P. Hartman et A. Wintner ont démontré le théorème:

Si $f(x)$ est une fonction positive, qui tend d'une façon monotone vers zéro, avec $x \to \infty$, et telle que l'intégrale

$$F(t) = \int_0^{\infty} f(x) \sin tx \, dx,^{1)} \tag{1}$$

existe, alors

$$\lim_{t \to 0} \frac{F(t)}{t} = \int_0^{\infty} x f(x) \, dx, \tag{2}$$

où l'intégrale au second membre de (2) *peut aussi être infinie.*

Dans [2] E. C. Titchmarsh a montré que, sous des hypothèses restreintes sur la fonction $f(x)$, on peut obtenir même le comportement asymptotique de $F(t)$ sous la forme suivante ([2], p. 173):

Si $f(x)$ et $f'(x)$ sont intégrables dans tout intervalle fini qui ne contient pas le zéro, si $x^{\alpha+1}f'(x)$ est borné pour chaque x, et $f(x) \sim x^{-\alpha}$ avec $x \to \infty$, alors

$$F(t) \sim \Gamma(1-\alpha) \cos \frac{\pi\alpha}{2} \cdot \frac{1}{t^{1-\alpha}}, \quad t \to 0. \tag{3}$$

En collaboration avec S. Aljančić, nous avons montré que dans le théorème mentionné de Titchmarsh, l'hypothèse $f(x) \sim x^{-\alpha}$, $x \to \infty$ peut

---

1) Il suffit qu'on ait par exemple $\int_0^1 x f(x) \, dx < \infty$

être remplacée par une autre. Nous avons démontré le théorème suivant.

De $f(x) = x^{-\alpha} L(x)$, $0 < \alpha < 2$ *où* $L(x)$ *représente une fonction à croissance lente*[2] *qui croît d'une façon monotone, résulte,*

$$F(t) \sim \Gamma(1-\alpha) \cos \frac{\pi\alpha}{2} \cdot \frac{1}{t^{1-\alpha}} L\left(\frac{1}{t}\right), \quad t \to 0. \tag{4}$$

En même temps nous avons montré que la relation asymptotique a lieu pour $\alpha = 0$, mais, dans ce cas, la fonction $L(t)$ est une fonction à croissance lente, monotone et convexe qui tend vers zéro. Les résultats de ce travail seront publiés ultérieurement.[3]

Dans la présente note nous allons donner un théorème qui est en quelque sorte une transition entre le théorème de Hartman-Wintner et les relations asymptotiques (3) et (4). En d'autres termes ce théorème donne l'ordre de grandeur de la transformée de Fourier en supposant sur la fonction $f(x)$ moins que ne le fait la relation asymptotique.

Nous démontrerons dans § 2 le théorème suivant:

Soit $0 < f(x) \downarrow 0$, *avec* $x \to \infty$, *et telle que l'intégrale* (1) *existe. Si, pour un* k, $0 < k < 2$, $x^k f(x) \uparrow \infty$, $x \to \infty$, *alors on aura, pour* t *suffisamment petit,*

$$0 < A \frac{1}{t} f\left(\frac{1}{t}\right) \leqslant F(t) \leqslant B \frac{1}{t} f\left(\frac{\pi}{t}\right).$$

Si outre ces hypothèses il existe un α, $0 < \alpha < k < 2$, *tel que* $x^\alpha f(x) \downarrow 0$, *alors les inégalités précédentes ont lieu pour chaque* t.

Dans § 2 nous allons donner d'abord une démonstration du théorème Hartman-Wintner, différente sous certain égard de celle donnée par ces auteurs, et d'où la première partie de notre théorème découle comme une conséquence immédiate. De cette démonstration on voit aussi que l'hypothèse $x^k f(x) \uparrow \infty$ résulte d'une manière tout à fait naturelle, si l'on veut obtenir le résultat plus précis que celui donné par Hartman-Wintner relatif au comportement asymptotique de $F(t)$. La seconde partie du théorème (avec l'hypothèse $x^\alpha f(x) \downarrow 0$), peut être aussi obtenue indépendamment de la première partie par une simple évaluation de l'intégrale trigonométrique (1).

---

[2] Pour la définition et les propriétés de fonctions à croissance lente voir [3] et [4].

[3] Ces Publications p. 81.

2. Dans la démonstration du théorème Hartman-Wintner il est évidemment suffisant de considérer le cas

$$\int_0^X x f(x)\, dx \to \infty, \quad X \to \infty.$$

De $f(x) \downarrow 0$ il s'ensuit

$$F(t) \geqslant \left\{ \int_0^{1/\lambda(t)} + \int_{1/\lambda(t)}^{\pi/t} + \int_{\pi/t}^{2\pi/t} \right\} f(x) \sin tx\, dx = I_1 + I_2 + I_3, \tag{5}$$

où $\lambda(t)$ représente une fonction continue et positive mais arbitraire, qui tend vers zéro avec $t \to 0$.

Soit maintenant, pour $t < 1$,

$$\lambda(t) = \operatorname{Max}\left\{t,\ \sqrt{f\left(\frac{\pi}{t}\right)}\right\}, \tag{6}$$

alors on a

$$\frac{t}{\lambda(t)} \leqslant 1, \qquad f\left(\frac{\pi}{t}\right) \cdot \frac{1}{\lambda^2(t)} \leqslant 1. \tag{7}$$

De l'inégalité $\cos u > 1 - u^2/2$, et de (7) résulte

$$I_2 = \int_{1/\lambda(t)}^{\pi/t} f(x) \sin tx\, dx \geqslant \frac{1}{t} f\left(\frac{\pi}{t}\right)\left\{-\cos\pi + \cos\frac{t}{\lambda(t)}\right\} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{t} f\left(\frac{\pi}{t}\right)\left\{2 - \frac{t^2}{2\lambda^2(t)}\right\} \geqslant \frac{2}{t} f\left(\frac{\pi}{t}\right) - \frac{t}{2},$$

et

$$0 > I_3 = \int_{\pi/t}^{2\pi/t} f(x) \sin tx\, dx \geqslant -\frac{2}{t} f\left(\frac{\pi}{t}\right).$$

De là on déduit

$$I_2 + I_3 > -\frac{t}{2},$$

ce qui donne selon (5)

(8) $$\frac{F(t)}{t} \geqslant \int_0^{1/\lambda(t)} x f(x) \frac{\sin tx}{tx}\, dx - \frac{1}{2}.$$

D'après (7) on a $t/\lambda(t) \leqslant 1$, et, étant donné que $\sin tx/tx$ décroît d'une façon monotone pour $0 \leqslant tx \leqslant t/\lambda(t) \leqslant 1$, on a de (8)

$$\frac{F(t)}{t} \geqslant \sin 1 \int_0^{1/\lambda(t)} x f(x)\, dx - \frac{1}{2},$$

d'où résulte le théorème de Hartman-Wintner, c. à. d.

$$\liminf_{t \to \infty} \frac{F(t)}{t} = \infty,$$

en tenant compte que $\lambda(t) \to 0$, pour $t \to 0$.

Pour en déduire la borne inférieure dans la première partie de notre théorème remarquons que, de $x^k f(x) \uparrow \infty$, $0 < k < 2$, $x \to \infty$, il s'ensuit $x^k f(x) > C$, ce qui donne, en vertu de (7), $\lambda(t) = t$.

L'inégalité (8) pour t suffisamment petit donne maintenant (c. à. d. dans le cas $x^k f(x) > C$)

$$F(t) \geqslant \int_0^{1/t} f(x) \sin tx\, dx - \frac{t}{2} \geqslant$$

$$\geqslant \int_{1/2t}^{1/t} f(x) \sin tx\, dx \geqslant f\left(\frac{1}{t}\right) \int_{1/2t}^{1/t} \sin tx\, dx =$$

$$\geqslant A \frac{1}{t} f\left(\frac{1}{t}\right).$$

Si l'on a de plus $x^\alpha f(x) \downarrow 0$, $x \to \infty$, $0 < \alpha < k < 2$, alors de $f(x) \downarrow 0$ résulte pour chaque t

$$F(t) \geqslant \int_0^{2\pi/t} f(x) \sin tx \, dx = \left\{ \int_0^{\pi/t} + \int_{\pi/t}^{2\pi/t} \right\} x^\alpha f(x) \frac{\sin tx}{x^\alpha} dx =$$

$$\geqslant \left(\frac{\pi}{t}\right)^\alpha f\left(\frac{\pi}{t}\right) \int_0^{\pi/t} \frac{\sin tx}{x^\alpha} dx + \left(\frac{\pi}{t}\right)^\alpha f\left(\frac{\pi}{t}\right) \int_{\pi/t}^{2\pi/t} \frac{\sin tx}{x^\alpha} dx,$$

c. à. d.

$$F(t) \geqslant \frac{\pi^\alpha}{t} f\left(\frac{\pi}{t}\right) \int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx = A' \frac{1}{t} f\left(\frac{\pi}{t}\right) > 0,$$

où

$$A' = \pi^\alpha \int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx > 0 \quad \text{pour} \quad 0 < \alpha < 2.$$

De la même manière, dans les deux cas, on obtient la borne supérieure, à savoir de $f(x) \downarrow 0$ et $x^k f(x) \uparrow \infty$ résulte pour chaque t

$$F(t) \leqslant \int_0^{\pi/t} x^k f(x) \frac{\sin tx}{x^k} dx \leqslant \left(\frac{\pi}{t}\right)^k f\left(\frac{\pi}{t}\right) \int_0^{\pi/t} \frac{\sin tx}{x^k} dx =$$

$$\leqslant \frac{\pi^k}{t} f\left(\frac{\pi}{t}\right) \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x^k} dx = B \frac{1}{t} f\left(\frac{\pi}{t}\right),$$

où

$$B = \pi^k \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x^k} dx > 0 \quad \text{pour} \quad 0 < k < 2,$$

ce qui démontre complétement le théorème.

(Reçu le 29 septembre 1954)

BIBLIOGRAPHIE

[1] Philip Hartman and Aurel Wintner — On the behaviour of Fourirer sine transforms near the origin. *Proc. Amer. Math. Soc.* **2** (1951), p. 398—400.

[2] E. C. Titchmarsh — Introduction to the Theory of Fourier Integrals. Oxford 1948.

[3] J. Karamata — Sur un mode de croissance régulière. *Bull. de Soc. Math. de France* **LXI** (1933), p. 55—62.

[4] J. Korevaar, T. van Ardenne-Ehrenfest and N. G. de Bruijn — A note on slowly convergent oscillating functions. *Nieuw Archief voor Wiskunde* **XXIII** (1949), p. 77--86.