

SUR LA VALEUR ASYMPTOTIQUE D'UNE CLASSE DES INTÉGRALES DÉFINIES

par

S. ALJANČIĆ, R. BOJANIĆ et M. TOMIĆ (Beograd)

SOMMAIRE — Comportement asymptotique de l'intégrale $\int_a^b f(t) L(\lambda t) dt$, $\lambda \rightarrow \infty$, $L(t)$ étant une fonction à croissance lente.

1. INTRODUCTION. Dans la présente note nous allons étudier le comportement asymptotique de la fonction $\Phi(\lambda)$ définie par l'intégrale

$$\Phi(\lambda) = \int_a^b f(t) L(\lambda t) dt, \quad 0 \leq a < b \leq \infty, \quad \lambda \rightarrow \infty,$$

où $f(t)$ représente une fonction intégrable au sens de Lebesgue, tandis que $L(t)$ est une fonction à croissance lente, c-à-d. une fonction définie pour $t > 0$, positive, continue et telle qu'on ait

$$(1) \quad \frac{L(\lambda t)}{L(\lambda)} \rightarrow 1, \quad \lambda \rightarrow \infty \quad \text{pour chaque } t > 0 \text{ fixe,}$$

(voir J. Karamata [1, 2]). Certaines propriétés des fonctions à croissance lente, utilisées plus loin, seront mentionnées au № 3.

Le but de cette note est d'examiner sous quelles conditions a lieu la relation asymptotique

$$(2) \quad \Phi(\lambda) \sim L(\lambda) \int_a^b f(t) dt, \quad \lambda \rightarrow \infty,$$

en supposant la convergence de l'intégrale au second membre de (2) ou de même en supposant qu'elle n'est que $(C, 1)$ -sommable.

La relation (2) est presque triviale dans l'intervalle $0 < a < b < \infty$, en vertu de la propriété fondamentale (i) (№ 3) des fonctions à croissance lente. Nous considérons séparément deux cas: $a = 0$, $b < \infty$ et $a > 0$, $b = \infty$. Les théorèmes correspondants pour l'intervalle $(0, \infty)$ résultent comme une combinaison de ces deux cas.

2. RÉSULTATS¹⁾A. L'intervalle $(0, b)$, $b < \infty$.THÉORÈME 1. Soit $L(t)$ une fonction à croissance lente, et soit l'intégrale

$$\int_{+0}^b t^{-\eta} |f(t)| dt$$

convergente pour un $\eta > 0$.

Alors,

$$\int_{+0}^b f(t) L(\lambda t) dt \sim L(\lambda) \int_{+0}^b f(t) dt, \quad \lambda \rightarrow \infty,$$

en supposant l'existence de l'intégrale qui figure au premier membre.

B. L'intervalle (a, ∞) , $a > 0$.THÉORÈME 2. Soit $L(t)$ une fonction à croissance lente, et soit l'intégrale

$$\int_a^{\infty} t^{\eta} |f(t)| dt$$

convergente pour un $\eta > 0$.

Alors, l'intégrale

$$\int_a^{\infty} f(t) L(\lambda t) dt$$

existe et on a

$$\int_a^{\infty} f(t) L(\lambda t) dt \sim L(\lambda) \int_a^{\infty} f(t) dt, \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

THÉORÈME 3. Si $L(t)$ représente une fonction à croissance lente qui décroît d'une façon monotone, de la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{\infty} f(t) dt$$

résultent les deux assertions du théorème 2.

¹⁾ Si la propriété (1) a lieu pour $\lambda \rightarrow +0$, tous les théorèmes donnés au N° 2 restent valables (relativement au passage à la limite $\lambda \rightarrow +0$), en remplaçant l'intervalle $(0, b)$ par (a, ∞) et réciproquement, en tenant compte aussi du fait que les conditions de monotonie (etc.) de $L(t)$ sont à remplacer d'une façon adéquate.

THÉORÈME 4. Si $L(t)$ représente le produit de deux fonctions monotones, à croissance lente, alors de la convergence de l'intégrale

$$\int_a^{\infty} t^{\eta} f(t) dt$$

pour un $\eta > 0$ résultent les assertions du théorème 2.

THÉORÈME 5. Soit $L(t)$ une fonction à croissance lente, monotone, convexe et telle qu'on ait

$$L(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Soit de plus

$$\int_a^x f(t) dt = O(1), \quad x \rightarrow \infty,$$

et

$$\int_a^x \left(1 - \frac{t}{x}\right) f(t) dt \rightarrow A, \quad x \rightarrow \infty,$$

alors de l'existence de l'intégrale

$$\int_a^{\infty} f(t) L(\lambda t) dt,$$

résulte

$$\int_a^{\infty} f(t) L(\lambda t) dt \sim A L(\lambda), \quad \lambda \rightarrow \infty,$$

C. L'intervalle $(0, \infty)$.

THÉORÈME 6. Soit $L(t)$ une fonction à croissance lente et soit l'intégrale

$$\int_{+0}^{\infty} t^{\alpha} |f(t)| dt$$

convergente pour $-\alpha < x < \beta$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

Alors on a

$$\frac{1}{\lambda} \int_{+0}^{\infty} f\left(\frac{t}{\lambda}\right) L(t) dt \sim L(\lambda) \int_{+0}^{\infty} f(t) dt, \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

THÉORÈME 7. Soit $L(t)$ le produit de deux fonctions monotones à croissance lente. Alors on a pour $0 < \alpha < 2$

$$(3) \int_0^{\infty} L(t) t^{-\alpha} \sin xt \, dt \sim \Gamma(1 - \alpha) \cos \frac{\pi \alpha}{2} \frac{1}{x^{1-\alpha}} L\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \rightarrow +0.^{2)}$$

THÉORÈME 8. Soit $L(t)$ une fonction à croissance lente, monotone et convexe à partir d'un $t \geq t_0$, et telle qu'on ait

$$L(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Alors on a³⁾

$$(4) \int_0^{\infty} L(t) \sin xt \, dt \sim \frac{1}{x} L\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \rightarrow +0.$$

Théorème 6 résulte d'une combinaison des théorèmes 1 et 2. Pour les fonctions $f(t)$ d'un type spécial, ce théorème contient les théorèmes de K. Knopp ([3], p. 235 et [4]) relatifs au comportement asymptotique ($\lambda \rightarrow \infty$) des C_k, H_k et A -transformations de la fonction $L(t)$ ⁴⁾, c-à-d. des transformations de $L(t)$ définies par

$$\frac{k}{\lambda} \int_0^{\lambda} \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{k-1} L(t) \, dt, \quad \frac{1}{\Gamma(k)\lambda} \int_0^s \left(\log \frac{\lambda}{t}\right)^{k-1} L(t) \, dt,$$

$$\frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{-t/\lambda} L(t) \, dt.$$

Les théorèmes 7 et 8 sont des conséquences immédiates des théorèmes 1 et 4 respectivement 1 et 5.

²⁾ Un théorème de ce genre se trouve dans le livre de Titchmarsh ([5], p. 172), où $L(t)$ représente une fonction à variation bornée dans $(0, \infty)$, telle qu'il existe $\lim_{t \rightarrow \infty} L(t)$.

³⁾ Dans ce cas l'existence de l'intégrale qui figure dans (4) résulte de $L(t) \downarrow 0$ et du fait que $f(t) = \sin t$.

⁴⁾ J. Karamata [1, 2] a appelé $p(t)$ une fonction à croissance régulière, lorsque $p(\lambda t)/p(\lambda)$ tend pour $\lambda \rightarrow \infty$ vers une limite bien définie $h(t)$ (On constate alors, que cette fonction $h(t)$ est nécessairement égale à t^α , avec α réel, pour chaque $t > 0$ fixe). Les théorèmes de Knopp paraissent plus généraux que les nôtres, étant valables pour C_k, H_k et A -transformations d'une fonction à croissance régulière. Cependant, étant donné que, pour t suffisamment grand, on a $p(t) = t^\alpha L(t)$, de notre théorème 6 résulteront ces théorèmes de Knopp, en remplaçant $f(t)$ par $t^\alpha f(t)$, et en prenant alors $f(t)$ comme le noyau des transformations considérées.

En effet, posons dans l'intégrale qui figure dans (3) $x=1/\lambda$ et faisons le changement de variable $t/\lambda | t$. L'assertion du théorème 7 se réduit alors à

$$\int_0^{\infty} L(\lambda t) t^{-\alpha} \sin t dt \sim \Gamma(1-\alpha) \cos \frac{\pi\alpha}{2} L(\lambda), \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Étant donné que, dans l'intervalle $(0, 1)$, pour $\alpha < 2$, sont remplies les conditions du théorème 1, ainsi que dans $(1, \infty)$, pour $\alpha > 0$, les conditions du théorème 4, on a

$$\begin{aligned} \int_0^1 L(\lambda t) t^{-\alpha} \sin t dt &= \int_0^1 + \int_1^{\infty} \sim \\ &\sim L(\lambda) \int_0^1 t^{-\alpha} \sin t dt + L(\lambda) \int_1^{\infty} t^{-\alpha} \sin t dt = \\ &\sim L(\lambda) \int_0^{\infty} t^{-\alpha} \sin t dt, \end{aligned}$$

C. Q. F. D.

De la même manière, l'assertion du théorème 8 se réduit à

$$\int_0^{\infty} L(\lambda t) \sin t dt \sim L(\lambda), \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Dans l'intervalle $(0, 1)$ sont remplies les conditions du théorème 1. Or, de

$$\left| \int_a^{\infty} \sin t dt \right| \leq 2 \quad \text{et} \quad \int_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right) \sin t dt \rightarrow 1, \quad x \rightarrow \infty,$$

résultent les conditions du théorème 5, d'où finalement

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} L(\lambda t) \sin t dt &\sim L(\lambda) \int_0^1 \sin t dt + L(\lambda)^{(C)} \int_1^{\infty} \sin t dt = \\ &\sim L(\lambda)^{(C)} \int_0^{\infty} \sin t dt = \\ &\sim L(\lambda), \end{aligned}$$

où $^{(C)}\int_a^{\infty}$ signifie la somme de Cesàro d'ordre 1 de l'intégrale \int_a^{∞} .

Au № 4 nous donnerons les démonstrations des théorèmes 1—5.

Nous remarquons en outre que nous avons obtenu d'abord les théorèmes 7 et 8. C'est M. Karamata qui nous a suggéré les formes générales de ces théorèmes. Nous lui devons aussi quelques autres perfectionnements dans leurs démonstrations.

3. PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS À CROISSANCE LENTE. Nous aurons besoin dans les démonstrations des théorèmes 1—5 de plusieurs propriétés des fonctions à croissance lente. Les propriétés (i—iv) sont connues (v. J. Karamata [1, 2]). Mais il semble que les propriétés (v) et (vi) ne soient connues, aussi donnerons nous leurs démonstrations à la fin de ce paragraphe.

(i) *Le passage à la limite (1) qui, en réalité, définit la classe de fonctions à croissance lente, a lieu uniformément par rapport à t dans chaque intervalle (a, b) , $a > 0$, $b < \infty$.*

(ii) *Si $L^*(t) \sim L(t)$, $t \rightarrow \infty$, alors $L^*(t)$ est de même une fonction à croissance lente.*

(iii) *Si $\gamma > 0$, on a*

$$t^\gamma L(t) \rightarrow \infty, \quad t^{-\gamma} L(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

(iv) *Soit $\alpha > 0$, et posons*

$$L_1(x) = x^{-\alpha} \operatorname{Max}_{0 \leq t \leq x} \{t^\alpha L(t)\}, \quad L_2(t) = x^\alpha \operatorname{Max}_{x \leq t < \infty} \{t^{-\alpha} L(t)\}.$$

Alors $L_k(t) \sim L(t)$, $t \rightarrow \infty$ ($k = 1, 2$), et d'après (ii) $L_k(t)$, $k = 1, 2$ sont aussi des fonctions à croissance lente. Évidemment $x^\alpha L_1(x)$ croît tandis que $x^{-\alpha} L_2(t)$ décroît, les deux d'une façon monotone.

(v) *Soit $L(t)$ le produit de deux fonctions monotones, à croissance lente, $\bar{L}(t)$ et $\underline{L}(t)$. Alors on a pour $\eta > 0$,*

$$\int_{\Delta}^{\infty} |d\{t^{-\eta} L(\lambda t)\}| < M \Delta^{-\eta} L(\lambda \Delta),$$

où M ne dépend pas de λ et Δ .

Démonstration. Soit, par exemple, $\bar{L}(t)$ une fonction croissante et $\underline{L}(t)$ une fonction décroissante. On a

$$\begin{aligned} \int_{\Delta}^{\Delta_1} |d\{t^{-\eta} L(\lambda t)\}| &\leq \eta \int_{\Delta}^{\Delta_1} t^{-\eta-1} L(\lambda t) dt + \int_{\Delta}^{\Delta_1} t^{-\eta} |dL(\lambda t)| = \\ &\leq \eta \int_{\Delta}^{\Delta_1} t^{-\eta-1} L(\lambda t) dt + \int_{\Delta}^{\Delta_1} t^{-\eta} \underline{L}(\lambda t) d\bar{L}(\lambda t) + \\ &\quad + \int_{\Delta}^{\Delta_1} t^{-\eta} \bar{L}(\lambda t) d\{-\underline{L}(\lambda t)\} = \\ &\leq \eta J_1 + J_2 + J_3. \end{aligned}$$

Nous allons évaluer ces trois intégrales. On trouve pour J_1 , en vertu de la propriété (iv),

$$\begin{aligned} J_1 &\leq \int_{\Delta}^{\infty} t^{-\eta-1} L(\lambda t) dt \leq \\ &\leq \lambda^{\eta/2} \int_{\Delta}^{\infty} t^{-1-\eta/2} (\lambda t)^{-\eta/2} L(\lambda t) dt \leq \\ &\leq \lambda^{\eta/2} \text{Max}_{\Delta \leq t < \infty} \{(\lambda t)^{-\eta/2} L(\lambda t)\} \cdot \int_{\Delta}^{\infty} t^{-\eta/2-1} dt \leq \\ &\leq \frac{2}{\eta} \Delta^{-\eta} L_2(\lambda \Delta), \end{aligned}$$

où $L_2(t) \sim L(t)$, $t \rightarrow \infty$, et par suite

$$(5) \quad J_1 \leq \frac{M_1}{\eta} \Delta^{-\eta} L(\lambda \Delta).$$

Pour l'intégrale J_2 on trouve

$$\begin{aligned} J_2 &\leq \underline{L}(\lambda \Delta) \int_{\Delta}^{\Delta_1} t^{-\eta} d\bar{L}(\lambda t) \leq \\ &\leq \underline{L}(\lambda \Delta) \left\{ \Delta_1^{-\eta} \bar{L}(\lambda \Delta_1) + \eta \int_{\Delta}^{\infty} t^{-\eta-1} \bar{L}(\lambda t) dt \right\}, \end{aligned}$$

et d'après (5)

$$J_2 \leq \Delta_1^{-\eta} \bar{L}(\lambda \Delta_1) \underline{L}(\lambda \Delta) + M_2 \Delta^{-\eta} \bar{L}(\lambda \Delta) \underline{L}(\lambda \Delta).$$

Enfin

$$\begin{aligned} J_3 &\leq \lambda^\eta \operatorname{Max}_{\lambda \Delta \leq t \leq \lambda \Delta_1} \{t^{-\eta} \bar{L}(t)\} \int_{\Delta}^{\Delta_1} d\{-L(\lambda t)\} \leq \\ &\leq \lambda^\eta \operatorname{Max}_{\lambda \Delta \leq t < \infty} \{t^{-\eta} \bar{L}(t)\} \underline{L}(\lambda \Delta) = \\ &\leq \Delta^{-\eta} \bar{L}_2(\lambda \Delta) \underline{L}(\lambda \Delta) \leq \\ &\leq M_3 \Delta^{-\eta} L(\lambda \Delta). \end{aligned}$$

Dès lors on a

$$\int_{\Delta}^{\Delta_1} |d\{t^{-\eta} L(\lambda t)\}| \leq M \Delta^{-\eta} L(\lambda \Delta) + \Delta_1^{-\eta} \bar{L}(\lambda \Delta_1) \underline{L}(\lambda \Delta),$$

et, en faisant $\Delta_1 \rightarrow \infty$, en vertu de la propriété (iii), résulte l'assertion,

(vi) *Si la fonction à croissance lente $L(t)$ admet une dérivée monotone $L'(t)$, alors*

$$\frac{tL'(t)}{L(t)} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Démonstration. De $L(xt)/L(t) \rightarrow 1$, $t \rightarrow \infty$, résulte que à chaque $\varepsilon > 0$ correspond un nombre entier $t_0 = t_0(\varepsilon)$ tel que

$$(6) \quad |L(xt) - L(t)| < \varepsilon L(t), \quad t > t_0 \quad (x > 1).$$

D'autre part on a

$$(7) \quad |L(xt) - L(t)| = t(x-1) |L'(\xi)|, \quad t \leq \xi \leq xt.$$

$|L'(t)|$ est de même une fonction monotone et par suite elle atteint dans une des extrémités de l'intervalle (t, xt) sa valeur minimale. Donc, d'après (7), on a

$$|L(xt) - L(t)| \geq t(x-1) |L'(t)|,$$

lorsque $|L'(t)|$ croît, ou bien

$$|L(xt) - L(t)| \geq t(x-1)|L'(xt)|,$$

lorsque $|L'(t)|$ décroît. En vertu de l'inégalité (6), nous obtenons alors

$$\left| \frac{tL'(t)}{L(t)} \right| < \frac{\varepsilon}{x-1}, \quad t > t_0,$$

respectivement

$$\left| \frac{xtL'(xt)}{L(xt)} \right| < \varepsilon \frac{x}{x-1} \frac{L(t)}{L(xt)}, \quad t > t_0,$$

C. Q. F. D.

4. DÉMONSTRATION DES THÉORÈMES 1-5.

4.1. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1. De la propriété (iv) des fonctions à croissance lente (N^o 3) résulte d'abord

$$\begin{aligned} \left| \int_0^b f(t) L(\lambda t) dt \right| &\leq \lambda^{-\eta} \int_0^b t^{-\eta} |f(t)| (\lambda t)^\eta L(\lambda t) dt = \\ &\leq \lambda^{-\eta} \text{Max}_{0 < t \leq \lambda b} \{t^\eta L(t)\} \int_0^b t^{-\eta} |f(t)| dt \leq \\ &\leq M b^\eta L_1(\lambda b), \quad \eta > 0, \end{aligned}$$

où M ne dépend pas de λ , et $L_1(t)$ est de même une fonction à croissance lente, telle que $L_1(t) \sim L(t)$, $t \rightarrow \infty$.

Pour démontrer la relation asymptotique du théorème 1, nous partons de ($0 < \delta < b$)

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{L(t)} \int_0^b f(t) L(\lambda t) dt - \int_0^b f(t) dt \right| &\leq \\ &\leq \left| \int_\delta^b f(t) \left\{ \frac{L(\lambda t)}{L(\lambda)} - 1 \right\} dt \right| + \frac{1}{L(\lambda)} \left| \int_0^\delta f(t) L(\lambda t) dt \right|. \end{aligned}$$

La deuxième intégrale au second membre peut être, d'après (8), majorée par

$$M \delta^\eta \frac{L_1(\delta\lambda)}{L(\lambda)}, \quad \eta > 0 \quad \text{où} \quad L_1(t) \sim L(t), \quad t \rightarrow \infty,$$

et en vertu de la propriété (i) des fonctions à croissance lente, on a

$$\limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{L(\lambda)} \int_0^b f(t) L(\lambda t) dt - \int_{\delta}^b f(t) dt \right| < M \delta^{\eta}, \quad \eta > 0.$$

Le second membre de cette inégalité peut être choisi aussi petit que l'on veut, avec δ suffisamment petit, ce qui achève la démonstration du théorème 1.

4.2. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2. La convergence (absolue) de l'intégrale $\int_a^{\infty} f(t) L(\lambda t) dt$ résulte, en tenant compte de la propriété (iv), de

$$\begin{aligned} \int_a^{\infty} |f(t)| L(\lambda t) dt &\leq \lambda^{\eta} \int_a^{\infty} t^{\eta} |f(t)| (\lambda t)^{-\eta} L(\lambda t) dt \leq \\ &\leq \lambda^{\eta} \operatorname{Max}_{a\lambda \leq t < \infty} \{t^{-\eta} L(t)\} \int_a^{\infty} t^{\eta} |f(t)| dt \leq \end{aligned}$$

$$(9) \quad \leq M a^{-\eta} L_2(a\lambda), \quad \eta > 0,$$

où $L_2(t) \sim L(t)$, $t \rightarrow \infty$, est une fonction à croissance lente, car d'après (iii) $a^{-\eta} L_2(a\lambda) \rightarrow 0$, $a \rightarrow \infty$.

Pour démontrer la relation asymptotique du théorème 2, nous partons de ($\Delta > a$)

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{L(\lambda)} \int_a^{\infty} f(t) L(\lambda t) dt - \int_a^{\Delta} f(t) dt \right| \leq \\ &\leq \left| \int_a^{\Delta} f(t) \left\{ \frac{L(\lambda t)}{L(\lambda)} - 1 \right\} dt \right| + \frac{1}{L(\lambda)} \left| \int_{\Delta}^{\infty} f(t) L(\lambda t) dt \right|. \end{aligned}$$

La deuxième intégrale au second membre de cette inégalité est, d'après (9), au plus égale à

$$M \Delta^{-\eta} \frac{L_2(\lambda \Delta)}{L(\lambda)}, \quad \eta > 0, \quad \text{où } L_2(t) \sim L(t), \quad t \rightarrow \infty.$$

L'inégalité précédente se réduit, en tenant compte de (i), par un passage à la limite $\lambda \rightarrow \infty$, à

$$\limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{L(\lambda)} \int_a^{\infty} f(t) L(\lambda t) dt - \int_a^{\Delta} f(t) dt \right| \leq M \Delta^{-\eta}, \quad \eta > 0,$$

qui est la relation asymptotique du théorème 2, étant donné que le second membre peut être aussi petit que l'on veut.

4.3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3. L'existence de l'intégrale $\int_a^\infty f(t) L(\lambda t) dt$ résulte de

$$\left| \int_{\Delta}^{\Delta_1} f(t) L(\lambda t) dt \right| \leq L(\lambda \Delta) \operatorname{Max}_{\Delta \leq x < \Delta_1} \left| \int_{\Delta}^x f(t) dt \right|.$$

En utilisant l'inégalité

$$\left| \int_{\Delta}^{\infty} f(t) L(\lambda t) dt \right| \leq L(\lambda \Delta) \operatorname{Max}_{\Delta \leq x < \infty} \left| \int_{\Delta}^x f(t) dt \right|,$$

qui s'obtient de la précédente par un passage à la limite $\Delta_1 \rightarrow \infty$, on trouve

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{L(\lambda)} \int_a^{\infty} f(t) L(\lambda t) dt - \int_a^{\Delta} f(t) dt \right| \leq \\ & \leq \left| \int_a^{\Delta} f(t) \left\{ \frac{L(\lambda t)}{L(\lambda)} - 1 \right\} dt \right| + \frac{L(\lambda \Delta)}{L(\lambda)} \operatorname{Max}_{\Delta \leq x < \infty} \left| \int_{\Delta}^x f(t) dt \right|. \end{aligned}$$

Faisant tendre $\lambda \rightarrow \infty$ on obtient, grâce à (i),

$$\limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{L(\lambda)} \int_a^{\infty} f(t) L(\lambda t) dt - \int_a^{\Delta} f(t) dt \right| \leq \operatorname{Max}_{\Delta \leq x < \infty} \left| \int_{\Delta}^{\infty} f(t) dt \right|,$$

qui représente la relation asymptotique donnée dans le théorème 3, en tenant compte du fait que le second membre peut être aussi petit que l'on veut, grâce à l'hypothèse que ladite intégrale est convergente.

4.4. DEMONSTRATION DU THÉORÈME 4. Posons

$$F(t) = \int_a^t u^{\eta} f(u) du, \quad \eta > 0.$$

On trouve par une intégration par parties

$$\begin{aligned} \int_{\Delta}^{\Delta_1} f(t) L(\lambda t) dt &= \int_{\Delta}^{\Delta_1} t^{\eta} f(t) t^{-\eta} L(\lambda t) dt = \\ &= \Delta_1^{-\eta} L(\lambda \Delta_1) F(\Delta_1) - \Delta^{-\eta} L(\lambda \Delta) F(\Delta) - \int_{\Delta}^{\Delta_1} F(t) d\{t^{-\eta} L(\lambda t)\}. \end{aligned}$$

En vertu de la propriété (v) des fonctions à croissance lente, l'existence de l'intégrale $\int_a^\infty t f(t) L(\lambda t) dt$ résulte de

$$(10) \quad \left| \int_{\Delta}^{\Delta_1} f(t) L(\lambda t) dt \right| \leq M' \Delta_1^{-\eta} L(\lambda \Delta_1) + M' \Delta^{-\eta} L(\lambda \Delta)$$

et tenant compte de (iii) et de l'hypothèse sur la convergence de l'intégrale $\int_a^\infty t^\eta f(t) dt$.

Pour en déduire la relation asymptotique du théorème 4, nous utiliserons l'inégalité

$$\left| \int_{\Delta}^{\infty} f(t) L(\lambda t) dt \right| \leq M' \Delta^{-\eta} L(\lambda \Delta)$$

qui découle de (10) en faisant $\Delta_1 \rightarrow \infty$. Cette dernière inégalité entraîne

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{L(\lambda)} \int_a^\infty f(t) L(\lambda t) dt - \int_a^\Delta f(t) dt \right| &\leq \\ &\leq \left| \int_a^\Delta f(t) \left\{ \frac{L(\lambda t)}{L(\lambda)} - 1 \right\} dt \right| + M' \Delta^{-\eta} \frac{L(\Delta \lambda)}{L(\lambda)} \end{aligned}$$

d'où, en faisant tendre $\lambda \rightarrow \infty$, on obtient

$$\limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{L(\lambda)} \int_a^\infty f(t) L(\lambda t) dt - \int_a^\Delta f(t) dt \right| \leq M' \Delta^{-\eta}, \quad \eta > 0,$$

ce qui se réduit à l'assertion du théorème 4, en prenant Δ suffisamment grand.

4.5 DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 5. Selon la définition des fonctions à croissance lente on a

$$L(t\lambda) - L(\lambda) = o\{L(\lambda)\}, \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad t > 0,$$

et l'assertion du théorème 5 se réduit alors à

$$R(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^\infty f(t) L(\lambda t) dt - A L(\lambda a) = o\{L(\lambda)\}, \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

En tenant compte de

$$-\frac{\lambda}{L(\lambda a)} \int_a^\infty L'(\lambda t) dt = 1,$$

l'hypothèse $\int_a^x f(t) dt = O(1)$, $x \rightarrow \infty$, nous permet d'obtenir, par une intégration par parties,

$$R(\lambda) = \lambda \int_a^\infty \Phi(t) L'(\lambda t) dt,$$

où nous avons posé

$$\Phi(t) = A - \int_a^t f(u) du.$$

La condition

$$\int_a^x \left(1 - \frac{t}{x}\right) f(t) dt \rightarrow A, \quad x \rightarrow \infty$$

du théorème (5) se réduit alors à

$$\begin{aligned} \Psi(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{x} \int_a^x \Phi(t) dt = \\ &= \left(1 - \frac{a}{x}\right) A - \frac{1}{x} \int_a^x dt \int_a^t f(u) du = \end{aligned}$$

$$(11) \quad = A - \frac{1}{x} \int_a^x \left(1 - \frac{t}{x}\right) f(t) dt - \frac{a}{x} A \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty.$$

En introduisant la fonction Ψ dans $R(\lambda)$ on trouve, par une nouvelle intégration par parties,

$$\begin{aligned} R(\lambda) &= \lambda \int_a^\infty \{t \Psi(t)\}' L'(\lambda t) dt = \\ &= -\lambda^2 \int_a^\infty t \Psi(t) L''(\lambda t) dt = \\ &= -\lambda^2 \left\{ \int_a^\Delta + \int_\Delta^\infty \right\} = \\ (12) \quad &= J_1 + J_2. \end{aligned}$$

Évaluons maintenant J_1 et J_2 . On trouve

$$\begin{aligned} |J_1| &\leq \lambda^2 |\Psi(\xi_1)| \int_a^\Delta t L''(\lambda t) dt = & (a \leq \xi_1 \leq \Delta) \\ &\leq \lambda |\Psi(\xi_1)| \int_a^\Delta t \{L'(\lambda t)\}' dt = \\ &\leq |\Psi(\xi_1)| \{\lambda \Delta L'(\lambda \Delta) - \lambda a L'(\lambda a) - L(\lambda \Delta) + L(\lambda a)\}, \end{aligned}$$

et de la même manière

$$\begin{aligned} |J_2| &\leq \lambda^2 |\Psi(\xi_2)| \int_\Delta^\infty t L''(\lambda t) dt = & (\Delta \leq \xi_2 < \infty) \\ &\leq |\Psi(\xi_2)| \{-\lambda \Delta L'(\lambda \Delta) + L(\lambda \Delta)\}. \end{aligned}$$

Donc, en tenant compte de la définition et de la propriété (vi) des fonctions à croissance lente, le passage à la limite $\lambda \rightarrow \infty$ dans l'inégalité (12) nous donne

$$\limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{|R(\lambda)|}{L(\lambda)} \leq |\Psi(\xi_2)|,$$

ce qui se réduit à l'assertion du théorème 5, étant donné que le second membre peut être rendu, d'après (11), arbitrairement petit, en choisissant Δ , et par suite ξ_2 , arbitrairement grand.

(Reçu le 18 février 1953)

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. Karamata — Sur un mode de croissance régulière des fonctions. *Mathematica (Cluj)* 4 (1930), p. 38—53.
- [2] ——— Sur un mode de croissance régulière. *Bull. de Soc. Math. de France* 61 (1933), p. 55—62.
- [3] K. Knopp — Über eine Erweiterung des Äquivalenzsatzes der C- und H-Verfahren und eine Klasse regulär wachsender Funktionen. *Math. Zeit.* 49 (1943), p. 219—255.
- [4] ——— Zwei Abelsche Sätze *Publ. de l'Inst. math. de l'Acad. serbe des sci.* 4 (1952), p. 89—94.
- [5] E. C. Titchmarsh — Introduction to the Theory of Fourier Integrals. Oxford 1948.