Зборник радова С.А.Н. XLIII — Математички институт С.А.Н. књ. 4, 1955
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences XLIII
Institut Mathématique № 4, 1955

С. АЉАНЧИЋ, Р. БОЈАНИЋ и М. ТОМИЋ

ДВА СТАВА О АСИМПТОТСКОМ ПОНАШАЊУ ТРИГОНОМЕТРИСКИХ РЕДОВА

Асимптотско понашање тригонометриског реда $\Sigma a_\nu \sin \nu x$ за $x \to +0$, када су коефицијенти a_ν облика $a_\nu = \nu^{-\alpha} L(\nu)$, $0 \leqslant \alpha < 2$, где је $L(t)$ споро промењљива функција.

1. Асимптотско понашање тригонометриског реда

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \sin \nu x$$

кад $x \to +0$, у случају када су коефицијенти a_ν монотони и задовољавају услов

$$a_n \sim n^{-\alpha}, \quad n \to \infty, \quad 0 < \alpha < 1,$$

испитивао је Hardy [1, 2]. Између осталог он је показао да је

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2\,\Gamma(\alpha) \sin \alpha\pi/2}\, x^{\alpha-1}, \quad x \to +0.$$

Heywood [3] је показао да ова асимптотска релација важи за $0 < \alpha < 2$.

Овде ћемо дати два става који проширују класу тригонометриских редова за које важе сличне асимптотске ралације. Та проширења добијају се увођењем класе споро промењљивих функција.

За функцију $L(t)$ кажемо да је споро промењљива ако је дефинисана за $t \geqslant 0$, позитивна и

$$\frac{L(\lambda t)}{L(t)} \to 1, \quad t \to \infty,$$

за свако утврђено $\lambda > 0$ [4].

СТАВ 1. *Нека је* $0 < \alpha < 2$ *и нека је* $L(t)$ *производ две монотоне споро промењљиве функције. Тада тригонометриски ред*

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} L(\nu)\, \nu^{-\alpha} \sin \nu x$$

конвергира за $0 < x < 2\pi$ *и*

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2\,\Gamma(\alpha)\sin\alpha\pi/2}\, x^{\alpha-1} L\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \to +0.$$

СТАВ 2. *Нека је* $L(t)$ *конвексна споро променљива функција која* $\to 0$ *кад* $t \to \infty$. *Тада је*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} L(\nu)\sin\nu x \sim \frac{1}{x} L\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \to +0.$$

Из става 2, например, следи за $L(t) = \log t$

$$\sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{\sin\nu x}{\log\nu} \sim \frac{1}{x\log(1/x)}, \quad x \to +0,$$

док код Zygmund-a [5, стр. 116] постоји само

$$\frac{A}{x\log(1/x)} < \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{\sin\nu x}{\log\nu} < \frac{B}{x\log(1/x)}, \quad x \to +0, \quad 0 < A < B.$$

Аналогни резултати за ред

$$^1/_2\, a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos\nu x$$

следе из чињенице де је за $x \neq 0$

$$^1/_2\, a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos\nu x = \frac{1}{2\sin x} \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_{\nu-1} - a_{\nu+1})\sin\nu x.$$

2. Најважније особине споро променљивих функција које ће нам бити потребне за доказ наведених ставова су следеће:

(i) *Ако је* $0 < a \leqslant \lambda \leqslant b < \infty$, *тада*

$$\frac{L(\lambda t)}{L(t)} \to 1, \quad t \to \infty,$$

униформно по λ.

(ii) *Ако је* $L^*(t) \sim L(t)$, $t \to \infty$, *тада је и* $L^*(t)$ *споро променљива функција.*

(iii) *Ако је* $\gamma > 0$, *тада*

$$t^{\gamma} L(t) \to \infty, \quad t^{-\gamma} L(t) \to 0, \quad t \to \infty.$$

(iv) *Нека је* $\alpha > 0$ *и*

$$L^{(1)}(t) = t^{-\alpha} \max_{0 \leqslant x \leqslant t} \{x^{\alpha} L(x)\}, \quad L^{(2)}(t) = t^{\alpha} \max_{t \leqslant x < \infty} \{x^{-\alpha} L(x)\}.$$

Тада је $L^{(k)}(t) \sim L(t)$, $t \to \infty$ $(k=1,2)$, *и према* (ii), $L^{(k)}(t)$, $k=1,2$, *су такође споро променљиве функције. Функција* $t^{\alpha} L^{(1)}(t)$ *очевидно монотоно расте, док* $t^{-\alpha} L^{(2)}(t)$ *монотоно опада.*

(v) *Ако је* $L(n)$ *производ две споро променљиве функције и* $\eta > 0$ *тада је*

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} |\nu^{-\eta} L(\nu) - (\nu+1)^{-\eta} L(\nu+1)| \leqslant M(\eta)\, n^{-\eta} L(n). \tag{1}$$

Све особине споро променљивих функција које смо навели **познате су (в.** [4]), осим последње, и због тога ћемо овде дати **њен доказ.**

Нека је $L(n) = a_n b_n$ и нека $a_n \uparrow$, а $b_n \downarrow$. Ставимо $L_n = L(n)$. **Тада** је

$$\begin{aligned}
&\sum_{\nu=n}^{m} \nu^{-\eta} L_\nu - (\nu+1)^{-\eta} L_{\nu+1} | \leqslant \\
&\leqslant \sum_{\nu=n}^{m} L_\nu \{\nu^{-\eta} - (\nu+1)^{-\eta}\} + \sum_{\nu=n}^{m} (\nu+1)^{-\eta} |L_\nu - L_{\nu+1}| \leqslant \\
&\leqslant \sum_{\nu=n}^{m} L_\nu \{\nu^{-\eta} - (\nu+1)^{-\eta}\} + \sum_{\nu=n}^{m} (\nu+1)^{-\eta} b_\nu \{a_{\nu+1} - a_\nu\} + \\
&\qquad + \sum_{\nu=n}^{m} (\nu+1)^{-\eta} a_{\nu+1} \{b_\nu - b_{\nu+1}\} = S_1 + S_2 + S_3 .
\end{aligned}$$

Оценићемо сваку од ових сума посебно. Најпре је

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{\nu=n}^{m} \nu^{-\eta/2} L_\nu \, \nu^{-\eta/2} \left\{1 - \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^{-\eta}\right\} \leqslant \\
&\leqslant \operatorname*{Max}_{n \leqslant \nu < \infty} \{\nu^{-\eta/2} L_\nu\} \int_{n-1}^{\infty} t^{-\eta/2} \left\{1 - \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{-\eta}\right\} dt \leqslant \\
&\leqslant M(\eta)\, n^{-\eta/2} L_n^{(2)} (n-1)^{-\eta/2},
\end{aligned}$$

где је $L_n^{(2)} \sim L_n$, $n \to \infty$. Према томе је

$$S_1 \leqslant M(\eta)\, n^{-\eta} L_n . ^{*)} \tag{2}$$

---

*) Константе M које се јављају у разним неједначинама не морају бити увек исте.

Како $b_n \downarrow$, то је даље

$$S_2 \leqslant b_n \sum_{\nu=n}^{m} (\nu+1)^{-\eta}(a_{\nu+1}-a_\nu) =$$

$$\leqslant b_n \sum_{\nu=n}^{m} \{\nu^{-\eta}-(\nu+1)^{-\eta}\}\, a_\nu + b_n\{m^{-\eta}a_m - n^{-\eta}a_n\} \leqslant$$

$$\leqslant b_n \sum_{\nu=n}^{m} \{\nu^{-\eta}-(\nu+1)^{-\eta}\}\, a_\nu + m^{-\eta}a_m b_n,$$

па је према (2)

$$S_2 \leqslant M(\eta)\, n^{-\eta} L_n + m^{-\eta} a_m b_n. \tag{3}$$

Најзад је

$$S_3 \leqslant \sum_{\nu=n}^{m} (\nu+1)^{-\eta} a_{\nu+1}\{b_\nu - b_{\nu+1}\} \leqslant$$

$$\leqslant \underset{n \leqslant \nu < \infty}{\mathrm{Max}} \{\nu^{-\eta} a_\nu\} \sum_{\nu=n}^{\infty} \{b_\nu - b_{\nu+1}\} =$$

$$\leqslant n^{-\eta} a_n^{(2)} b_n,$$

где је $a_n^{(2)} \sim a_n,\ n \to \infty$, па је

$$S_3 \leqslant M(\eta)\, n^{-\eta} L_n. \tag{4}$$

На основу процена (2), (3) и (4) добијамо да је

$$\sum_{\nu=n}^{m} |\nu^{-\eta} L_\nu - (\nu+1)^{-\eta} L_{\nu+1}| \leqslant M(\eta)\, n^{-\eta} L_n + m^{-\eta} a_m b_n.$$

Одавде коначно следи неједначина (1) кад пустимо да $m \to \infty$.

3. Доказ става 1. (i) На основу особине (v) споро променљивих функција, конвергенција тригонометриског реда којим је дефинисана функција $f(x)$ следи из

$$\left|\sum_{\nu=n+1}^{m} L(\nu)\, \nu^{-\alpha} \sin \nu x\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sin x/2}\left\{\sum_{\nu=n+1}^{m} |\nu^{-\alpha}L(\nu) - (\nu+1)^{-\alpha}L(\nu+1)| + \right.$$

$$\left. + (n+1)^{-\alpha} L(n+1) + (m+1)^{-\alpha} L(m+1)\right\} \leqslant \tag{5}$$

$$\leqslant \frac{M}{\sin x/2}\{(n+1)^{-\alpha}L(n+1) + (m+1)^{-\alpha}L(m+1)\},$$

јер на основу особине (iii) споро променљивих функција, десна страна неједначине (5) тежи нули када n **и** $m \to \infty$ **независно један од другог.**

(ii) **за доказ става** 1 потребна нам је следећа Hardy-ева [2] **процена**

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{-\alpha} \sin \nu x = \frac{\pi}{2\Gamma(\alpha)\sin \alpha\pi/2} x^{\alpha-1} + o(x^{\alpha-1}), \quad x \to 0, \quad 0 < \alpha < 2.$$

Нека је $q = [1/x]$. Како је $L(q) \sim L(1/x)$, $x \to 0$, и како је

$$\frac{x^{1-\alpha}}{L(q)} \sum_{\nu=1}^{\infty} L(\nu)\, \nu^{-\alpha} \sin \nu x - \frac{\pi}{2\Gamma(\alpha)\sin \alpha\pi/2} =$$

$$= x^{1-\alpha} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{\frac{L(\nu)}{L(q)} - 1\right\} \nu^{-\alpha} \sin \nu x + o(1) =$$

$$= S(x, \alpha) + o(1), \quad x \to 0,$$

то је довољно показати да

$$S(x, \alpha) \to 0, \quad x \to 0, \quad 0 < \alpha < 2.$$

Нека је $0 < \delta < 1 < \Delta < \infty$. Ставимо $p = [\delta/x]$ и $r = [\Delta/x]$. Тада је

$$S(x, \alpha) = x^{1-\alpha} \left(\sum_{\nu=1}^{p} + \sum_{\nu=p+1}^{r} + \sum_{\nu=r+1}^{\infty}\right) \left\{\frac{L(\nu)}{L(q)} - 1\right\} \nu^{-\alpha} \sin \nu x,$$

па је

$$|S(x, \alpha)| \leqslant \frac{x^{1-\alpha}}{L(q)} \left|\sum_{\nu=1}^{p} L(\nu)\, \nu^{-\alpha} \sin \nu x\right| + x^{1-\alpha} \left|\sum_{\nu=1}^{p} \nu^{-\alpha} \sin \nu x\right| +$$

$$+ x^{1-\alpha} \left|\sum_{\nu=p+1}^{r} \left\{\frac{L(\nu)}{L(q)} - 1\right\} \nu^{-\alpha} \sin \nu x\right| +$$

$$+ \frac{x^{1-\alpha}}{L(q)} \left|\sum_{\nu=r+1}^{\infty} L(\nu)\, \nu^{-\alpha} \sin \nu x\right| + x^{1-\alpha} \left|\sum_{\nu=r+1}^{\infty} \nu^{-\alpha} \sin \nu x\right| =$$

$$\leqslant \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4 + \Sigma_5 . \tag{6}$$

Проценићемо сваку од сума Σ_i посебно.

Нека је $\alpha < \beta < 2$. Водећи рачуна о томе да је $\sin x \leqslant x$, $x \geqslant 0$ и о особини (iv) споро промењљивих функција, налазимо

$$\Sigma_1 \leqslant \frac{x^{2-\alpha}}{L(q)} \sum_{\nu=1}^{p} \nu^{1-\alpha} L(\nu) =$$

$$\leqslant \frac{x^{2-\alpha}}{L(q)} \sum_{\nu=1}^{p} \nu^{\beta-\alpha} L(\nu) \cdot \nu^{1-\beta} \leqslant$$

(7) $$\leqslant \frac{x^{2-\alpha}}{L(q)} \operatorname*{Max}_{1 \leqslant \nu \leqslant p} \{\nu^{\beta-\alpha} L(\nu)\} \cdot \sum_{\nu=1}^{p} \nu^{1-\beta} \leqslant$$

$$\leqslant M \frac{x^{2-\alpha}}{L(q)} p^{\beta-\alpha} L^{(1)}(p)\, p^{2-\beta} \leqslant$$

$$\leqslant M (p\,x)^{2-\alpha} \frac{L(p)}{L(q)}.$$

За Σ_2 лако добијамо процену

(8) $$\Sigma_2 \leqslant x^{2-\alpha} \sum_{\nu=1}^{p} \nu^{1-\alpha} < M (p\,x)^{2-\alpha}.$$

Даље је

$$\Sigma_3 \leqslant x^{1-\alpha} \operatorname*{Max}_{p+1 \leqslant \nu \leqslant r} \left| \frac{L(\nu)}{L(q)} - 1 \right| \cdot \sum_{\nu=p+1}^{r} \nu^{-\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant x^{1-\alpha} \operatorname*{Max}_{p+1 \leqslant \nu \leqslant r} \left| \frac{L(\nu)}{L(q)} - 1 \right| \cdot \int_p^r t^{-\alpha}\, dt,$$

па је

(9) $$\Sigma_3 \leqslant \begin{cases} \dfrac{(r\,x)^{1-\alpha} - (p\,x)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \cdot \operatorname*{Max}_{p+1 \leqslant \nu \leqslant r} \left| \dfrac{L(\nu)}{L(q)} - 1 \right|, & \alpha \neq 1, \\[2ex] \log \dfrac{r}{p} \cdot \operatorname*{Max}_{p+1 \leqslant \nu \leqslant r} \left| \dfrac{L(\nu)}{L(q)} - 1 \right|, & \alpha = 1. \end{cases}$$

Када у (5) пустимо да $m \to \infty$, добићемо неједначину

$$\left| \sum_{\nu=n+1}^{\infty} L(\nu)\, \nu^{-\alpha} \sin \nu x \right| \leqslant \frac{M}{\sin x/2} (n+1)^{-\alpha} L(n+1)$$

па је према томе

(10) $$\Sigma_4 \leqslant M \frac{x}{\sin x/2} (r\,x)^{-\alpha} \frac{L(r+1)}{L(q)}.$$

Најзад, парцијалним сабирањем добијамо

$$
(11) \qquad \begin{aligned}
\Sigma_5 &\leqslant \frac{x^{1-\alpha}}{\sin x/2}\left\{\sum_{\nu=r+1}^{\infty} |\nu^{-\alpha}-(\nu+1)^{-\alpha}| + (r+1)^{-\alpha}\right\} < \\
&< 2\,\frac{x^{1-\alpha}}{\sin x/2}\,(r\,x)^{-\alpha}.
\end{aligned}
$$

Користећи процене (7—11) неједначина (6) постаје

$$
\begin{aligned}
|S(x,\alpha)| \leqslant M \Bigg\{ &(p\,x)^{2-\alpha}\,\frac{L(p)}{L(q)} + (p\,x)^{2-\alpha} + \\
&+ \frac{x}{\sin x/2}\,(r\,x)^{-\alpha}\,\frac{L(r+1)}{L(q)} + \frac{x}{\sin x/2}\,(r\,x)^{-\alpha}\Bigg\} + \\
&+ \begin{cases} \dfrac{(r\,x)^{1-\alpha}-(p\,x)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\cdot \operatorname*{Max}_{p+1\leqslant \nu\leqslant r}\left|\dfrac{L(\nu)}{L(q)}-1\right|, & \alpha\neq 1, \\[2ex] \log\dfrac{r}{p}\cdot \operatorname*{Max}_{p+1\leqslant \nu\leqslant r}\left|\dfrac{L(\nu)}{L(q)}-1\right|, & \alpha = 1. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Ако овде пустимо да $x \to 0$ и водимо рачуна о значењу величина p, q, r добићемо

$$
(12) \qquad \limsup_{x=0} |S(x,\alpha)| \leqslant M\{\delta^{2-\alpha} + \Delta^{-\alpha}\},
$$

јер, према особини (i) споро променљивих функција

$$
\operatorname*{Max}_{p+1\leqslant \nu\leqslant r}\left|\frac{L(\nu)}{L(q)}-1\right| \to 0 \quad \text{када} \quad x\to 0.
$$

Како величине δ и Δ подлежу једино ограничењу да је $0<\delta<1$ и $1<\Delta<\infty$, то када у (12) пустимо да $\delta\to 0$ и $\Delta\to\infty$, добијамо коначно

$$
\limsup_{x=0} |S(x,\alpha)| \leqslant 0, \quad 0<\alpha<2,
$$

тј.

$$
S(x,\alpha)\to 0, \quad x\to 0, \quad 0<\alpha<2.
$$

Тиме је став 1 доказан.

4. Доказ става 2. Нека је $0 < \delta < 1$ и $p = [\delta/x]$, $q = [\pi/2x]$. Тада је

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} L(\nu) \sin \nu x =$$

$$(13) \qquad = \left(\sum_{\nu=1}^{p-1} + \sum_{\nu=p}^{q} + \sum_{\nu=q+1}^{\infty}\right) L(\nu) \sin \nu x =$$

$$= S_1(x) + S_2(x) + S_3(x).$$

Нека је даље $0 < \eta < 1$. Прво је

$$S_1(x) = \sum_{\nu=1}^{p-1} L(\nu) \sin \nu x \leqslant$$

$$\leqslant \operatorname*{Max}_{1 \leqslant \nu \leqslant p} \{\nu^{\eta} L(\nu)\} \sum_{\nu=1}^{p} \nu^{-\eta} \leqslant$$

$$\leqslant p^{\eta} L^{(1)}(p) \int_0^p t^{-\eta}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{1-\eta} p\, L^{(1)}(p).$$

Како је $L^{(1)}(p) \sim L(1/x)$, $x \to 0$, то је

$$S_1(x) \leqslant \delta M(\eta) \frac{1}{x} L\left(\frac{1}{x}\right),$$

тј.

$$(14) \qquad S_1(x) = o\left\{\frac{1}{x} L\left(\frac{1}{x}\right)\right\}, \quad x \to 0,$$

јер δ можемо изабрати произвољно мало.

Следећа сума $S_2(x)$ даје уствари асимптотско понашање функције $f(x)$ кад $x \to 0$. Да би смо то доказали приметимо најпре да је

$$(15) \qquad \begin{aligned} S_2(x) - \frac{1}{x} L\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} L(q) - \frac{1}{x} L\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x} L(q) \left\{x \sum_{\nu=p}^{q} \sin \nu x - 1\right\} + \\ + \sum_{\nu=p}^{q} \{L(\nu) - L(q)\} \sin \nu x. \end{aligned}$$

Како је

$$x \sum_{\nu=p}^{q} \sin \nu x - 1 = \left\{\cos(p - {}^1/_2)\, x - \cos(q - {}^1/_2)\, x - \frac{2}{x} \sin\frac{x}{2}\right\} \Big/ \frac{2}{x} \sin \frac{x}{2}$$

и

$$\left|\sum_{\nu=p}^{q}\{L(\nu)-L(q)\}\sin\nu x\right| \leqslant \{L(p)-L(q)\}(q-p+1)=$$
$$\leqslant \frac{1}{x}L(q)\left\{\frac{L(p)}{L(q)}-1\right\}(q-p+1)x \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{x}L\left(\frac{1}{x}\right)\left\{\frac{L(p)}{L(q)}-1\right\}\left(\frac{\pi}{2}-\delta+2x\right),$$

то је према (15)

$$\left|\frac{S_2(x)}{1/x\,L(1/x)}-1\right| \leqslant 1-\frac{L(q)}{L(1/x)}+$$
$$+\frac{\left|\frac{2}{x}\sin\frac{x}{2}-\cos\left(p-\frac{1}{2}\right)x+\cos\left(q-\frac{1}{2}\right)x\right|}{\frac{2}{x}\sin\frac{x}{2}}$$
$$+\left(\frac{\pi}{2}-\delta+2x\right)\left\{\frac{L(p)}{L(q)}-1\right\},$$

па је с обзиром на особину (i) споро промењивих функција

$$\limsup_{x=0}\left|\frac{S_2(x)}{1/x\,L(1/x)}-1\right| \leqslant 1-\cos\delta.$$

То значи да је

$$S_2(x)=\frac{1}{x}L\left(\frac{1}{x}\right)+o\left\{\frac{1}{x}L\left(\frac{1}{x}\right)\right\},\quad x\to 0, \tag{16}$$

јер у претходној неједначини δ можемо изабрати произвољно мало.

Код процене последње суме долази до изражаја претпоставка о конвексности функције $L(n)$. Најпре је

$$\begin{aligned} S_3(x) &= \sum_{\nu=q+1}^{\infty} L(\nu)\sin\nu x = \\ &= \cos qx\sum_{\nu=1}^{\infty}L(q+\nu)\sin\nu x+\sin qx\sum_{\nu=1}^{\infty}L(q+\nu)\cos\nu x. \end{aligned} \tag{17}$$

Парцијалним сабирањем добијамо

$$S_3^*(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}L(q+\nu)\sin\nu x=$$
$$=\frac{1}{\sin x/2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\{L(q+\nu)-L(q+\nu+1)\}\sin(\nu+1)\frac{x}{2}\sin\nu\frac{x}{2}.$$

Одавде следи

$$|S_3^*(x)| \leqslant \frac{1}{\sin x/2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \{L(q+\nu) - L(q+\nu+1)\} =$$

(18)
$$\leqslant \frac{1}{\sin x/2} L(q+1) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\pi}{2} L\left(\frac{1}{x}\right),$$

јер је $\sin x \geqslant 2x/\pi$ за $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$.

Два узастопна делимична сабирања дају

$$S_3^{**}(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} L(q+\nu) \cos \nu x =$$

$$= \frac{1}{4\sin^2 x/2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \{L(q+\nu) - 2L(q+\nu+1) + L(q+\nu+2)\} \sin^2(\nu + {}^1/_2)\, x.$$

Због конвексности функције $L(n)$ је

$$|S_3^{**}(x)| \leqslant \frac{1}{4\sin^2 x/2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \{L\, q+\nu) - 2L(q+\nu+1) + L(q+\nu+2)\} =$$

$$\leqslant \frac{L(q) - L(q+1)}{4\sin^2 x/2}.$$

За монотоно опадајући споро промењљив низ је за довољно велико p

$$0 \leqslant L(q) - L(2q) \leqslant \varepsilon L(q).$$

Како је

$$L(q) - L(2q) = \{L(q) - L(q+1)\} +$$

$$+ \{L(q+1) - L(q+2)\} + \ldots + \{L(2q-1) - L(2q)\},$$

и како је за свако $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ због конвексности функције $L(n)$

$$L(q+\nu) - L(q+\nu+1) \geqslant L(q) - L(q+1),$$

то је

$$q\{L(q) - L(q+1)\} \leqslant L(q) - L(2q) \leqslant \varepsilon L(q),$$

па је за довољно мало x

$$|S_3^{**}(x)| \leqslant \varepsilon \frac{1}{4\sin^2 x/2} \frac{1}{q} L(q) \leqslant \varepsilon \frac{\pi^2}{4qx} \frac{1}{x} L\left(\frac{1}{x}\right)$$

тј.

(19) $$S_3^{**}(x) = o\left\{\frac{1}{x} L\left(\frac{1}{x}\right)\right\}, \quad x \to 0.$$

Из (17), (18) и (19) добијамо да је

(20) $$S_3(x) = \cos q\, x\, S_3^{*}(x) + \sin q\, x\, S_3^{**}(x) = o\left\{\frac{1}{x} L\left(\frac{1}{x}\right)\right\}, \quad x \to 0$$

јер је $\cos q\, x = o(1)$, $x \to 0$.

Коначно из (13), (14), (16) и (20) следи

$$f(x) = \frac{1}{x} L\left(\frac{1}{x}\right) + o\left\{\frac{1}{x} L\left(\frac{1}{x}\right)\right\}, \quad x \to 0,$$

а тиме је став 2 доказан.

(Саопштено на седници Мат. инст. 13-II-1953)

НАВОДИ

[1] G. H. Hardy — A theorem concerning trigonometrical series. *Journal London Math. Soc.*, **3** (1928), 12—13.

[2] ——————— Some theorems concerning trigonometrical series of a special type. *Proc. London Math. Soc.*, **32** (1931), 441—8.

[3] P. Heywood — Note on a theorem of Hardy on trigonometrical series. *Journal London Math. Soc.*, **29** (1954), 373—8.

[4] J. Karamata — Sur un mode de croissance régulière. *Bull. de Soc. Math. de France*, **61** (1933), 55—62.

[5] A. Zygmund — Trigonometrical Series, Warszawa 1935.