

SUR L'INTÉGRABILITÉ DE CERTAINES SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES

par

S. ALJANČIĆ (Beograd), R. BOJANIĆ (Skoplje) et M. TOMIĆ (Beograd)

SOMMAIRE — Les conditions nécessaires et suffisantes pour l'intégrabilité de $x^{-\gamma} L(1/x) g(x)$ et $x^{-\gamma} L(1/x) f(x)$, où $g(x)$ et $f(x)$ représentent les séries trigonométriques à coefficients monotones, $L(x)$ étant une fonction à croissance lente.¹⁾

1. INTRODUCTION. Soit $\lambda_n \downarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Alors les séries

$$g(x) = \sum_1^{\infty} \lambda_n \sin nx \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{1}{2} \lambda_0 + \sum_1^{\infty} \lambda_n \cos nx$$

sont des fonctions continues dans $\delta \leq x \leq 2\pi - \delta$ pour chaque $\delta > 0$, mais pas nécessairement intégrables-L dans $(0, \pi)$.

Boas [2] a montré que pour $0 < \gamma \leq 1$, $x^{-\gamma} g(x) \in L(0, \pi)$ si et seulement si $\sum n^{\gamma-1} \lambda_n$ converge. Il est bien connu, d'après Young [7], que ce résultat reste valable aussi pour $\gamma = 0$. Heywood [4] a déduit que ceci a lieu aussi pour $1 < \gamma < 2$ et, en utilisant une remarque de Hartman et Wintner [3], que pour $\gamma > 2$ ce n'est plus vrai.

Les résultats analogues ont lieu pour $f(x)$. Ainsi, Boas dans la même note a montré que de $\lambda_n \downarrow 0$, $0 < \gamma < 1$, on a $x^{-\gamma} f(x) \in L(0, \pi)$ si et seulement si la série $\sum n^{\gamma-1} \lambda_n$ converge. Pour $\gamma \geq 1$ il est nécessaire d'introduire les hypothèses supplémentaires sur la convergence de $\sum \lambda_n$ et supposer que $f(0) = 0$. Dans le cas $\gamma = 1$, et en supposant qu'on ait à partir d'un certain rang $\lambda_n \downarrow$, le même auteur a montré que $x^{-1} f(x) \in L(0, \pi)$ dans le cas où et seulement dans ce cas là la série $\sum \lambda_n \log n$ converge. Le résultat pour $\gamma = 1$ est un cas exceptionnel car, comme l'a montré Heywood [4], on a pour $1 < \gamma < 3$, $x^{-\gamma} f(x) \in L(0, \pi)$ dans le

¹⁾ Pour la définition de ces fonctions voir (1).

seul cas où $\sum n^{\gamma-1} \lambda_n$ converge. De plus, le dernier auteur en démontrant ceci, n'admet que la positivité des coefficients λ_n à partir d'un certain rang. Il a montré aussi que pour $\gamma \geq 3$ la conclusion n'est plus valable.

Nous nous proposons ici de généraliser les résultats de Young, Boas et Heywood en remplaçant dans lesdits théorèmes la puissance $x^{-\gamma}$ par $x^{-\gamma} L(1/x)$, et respectivement $n^{\gamma-1}$ par $n^{\gamma-1} L(n)$, où $L(x)$ désigne une fonction à croissance lente.

D'après Karamata [5] une fonction $L(x)$, positive et continue, définie pour $x \geq 0$, est une fonction à croissance lente si

$$(1) \quad \frac{L(tx)}{L(x)} \rightarrow 1, \quad x \rightarrow \infty,$$

pour chaque $t > 0$ fixe. Nous désignons dans la présente note toujours par $L(x)$ une fonction à croissance lente.²⁾

THÉORÈME 1. Si $\lambda_n \downarrow 0$ et $0 < \gamma < 2$, alors $x^{-\gamma} L(1/x) g(x) \in L(0, \pi)$ si et seulement si $\sum n^{\gamma-1} L(n) \lambda_n$ converge.

THÉORÈME 2. Soit $L(x)$ convexe et non décroissant. Si $\lambda_n \downarrow 0$, alors $L(1/x) g(x) \in L(0, \pi)$ si et seulement si $\sum n^{-1} L(n) \lambda_n$ converge.

THÉORÈME 3. Si $\lambda_n \downarrow 0$ et $0 < \gamma < 1$, alors $x^{-\gamma} L(1/x) f(x) \in L(0, \pi)$ si et seulement si $\sum n^{\gamma-1} L(n) \lambda_n$ converge.

THÉORÈME 4. Soit $L(x)$ convexe et non décroissant. Si, à partir d'un certain rang, λ_n décroît, $\sum \lambda_n$ converge et $f(0) = 0$, alors $x^{-1} L(1/x) f(x) \in L(0, \pi)$ si et seulement si $\sum n^{-1} L(n) \Lambda_n$, où l'on a posé $\Lambda_n = \sum_n^{\infty} \lambda_n$, converge.

THÉORÈME 5. Si, à partir d'un certain rang, $\lambda_n \geq 0$, $\sum \lambda_n$ converge, $f(0) = 0$ et $1 < \gamma < 3$, alors $x^{-\gamma} L(1/x) f(x) \in L(0, \pi)$ si et seulement si $\sum n^{\gamma-1} L(n)$ converge.

Pour $L(x) \equiv 1$ les théorèmes 1, 2, 3, et 5 se réduisent aux théorèmes analogues de Young, Boas et Heywood. Pour $L(x) \equiv 1$ la série mentionnée au théorème 4 se réduit à $\sum n^{-1} \Lambda_n$; cette série est équiconvergente

²⁾ Des fonctions à croissance lente sont, par exemple: $\log x$, $\log \log x$, $(\log x)^\alpha$, $(\log \log x)^\alpha, \dots$, chaque fonction $F(x)$ qui a une limite lorsque $x \rightarrow \infty$, $\log x + \sin \pi x$, $\log x + \sin \log x$, $\frac{1}{x} \int_0^x \frac{dt}{\log t}$, etc.

avec $\sum \Delta \Lambda_n \log n = \sum \lambda_n \log n$ ([9], § 5.13). Ainsi, le théorème 4 contient le théorème correspondant de Boas (théorème 3 de [2]). Et même, dans le cas général, où $L(x) \neq 1$, on peut formuler le théorème 4 de la manière semblable, si $L(x)$ satisfait à la condition supplémentaire

$$(2) \quad x \{L(x+a) - L(x)\} \asymp 1, \quad a > 0.^3)$$

Dans ce cas, la série $\sum n^{-1} L(n) \Delta_n$, qui figure dans le théorème 4, peut être remplacée par $\sum \{L(n)\}^2 \lambda_n$. L'équiconvergence de ces deux séries sera démontrée au N° 3.7.

En démontrant son théorème 1 ([2], p. 219), qui correspond à notre théorème 1, avec $L(x) \equiv 1$, $0 < \gamma < 1$, Boas utilise dans la première partie de sa démonstration seulement la monotonie des coefficients λ_n . Quant à la seconde partie, il n'utilise que le fait qu'ils sont positifs. Nous n'insisterons pas sur ce point, quoique, en employant le procédé de Boas pour la démonstration de notre théorème 1 on puisse arriver à la même conclusion. Heywood a étendu le théorème de Boas à l'intervalle $1 < \gamma < 2$, en réduisant la série de sinus pour $1 < \gamma < 2$ en une série de cosinus pour l'intervalle $0 < \gamma < 1$, et en appliquant le théorème correspondant de Boas (qui correspond à notre théorème 3 avec $L(x) \equiv 1$). Nous allons donner une démonstration directe valable pour tout intervalle $0 < \gamma < 2$.

Le N° 2 contient les propriétés des fonctions à croissance lente utilisées dans la présente note. Nous allons démontrer quelques unes de ces propriétés, car il nous semble qu'elles ne soient pas connues.

2. PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS À CROISSANCE LENTE. Pour la démonstration des propriétés (i-iv) voir Karamata [5]. En particulier, une démonstration directe de la propriété (i) a été faite par J. Korevaar, T. v. Ardenne-Ehrenfest et N. G. de Bruijn [6]. La démonstration de la propriété (v) se trouve dans notre note [1].

(i) *Le passage à la limite (1), qui définit la classe de fonctions à croissance lente, a lieu uniformément par rapport à $t \in (a, b)$, $0 < a < b < \infty$.*

(ii) *Si $f(x) \sim L(x)$, $x \rightarrow \infty$, alors $f(x)$ est de même une fonction à croissance lente.⁴⁾*

³⁾ La notation $f \asymp 1$ désigne $0 < m \leq f \leq M$. On voit que le logarithme itéré, par exemple, satisfait à la condition (2); ce n'est pas le cas si $L(x)$ est une puissance quelconque du logarithme.

⁴⁾ $f \sim g$ signifie que $f/g \rightarrow 1$.

(iii) Si $\alpha > 0$, on a

$$x^\alpha L(x) \rightarrow \infty \quad \text{et} \quad x^{-\alpha} L(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty.$$

(iv) Soit $\alpha > 0$ et posons

$$\underline{L}_1(x) = x^\alpha \operatorname{Min}_{0 \leq t \leq x} \{t^{-\alpha} L(t)\}, \quad \bar{L}_1(x) = x^{-\alpha} \operatorname{Max}_{0 \leq t \leq x} \{t^\alpha L(t)\};$$

$$\underline{L}_2(x) = x^{-\alpha} \operatorname{Min}_{x \leq t < \infty} \{t^\alpha L(t)\}, \quad \bar{L}_2(x) = x^\alpha \operatorname{Max}_{x \leq t < \infty} \{t^{-\alpha} L(t)\}.$$

Alors, $\bar{L}_k(x) \sim L(x)$, $x \rightarrow \infty$ ($k = 1, 2$), c. à. d., d'après (ii), $\bar{L}_k(x)$ ($k = 1, 2$) sont aussi des fonctions à croissance lente. Les fonctions $x^{-\alpha} \bar{L}_1(x)$ et $x^{-\alpha} \bar{L}_2(x)$ sont non croissantes, tandis que $x^\alpha \underline{L}_1(x)$ et $x^\alpha \underline{L}_2(x)$ sont des fonctions non décroissantes.

(v) Soit $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Si l'intégrale

$$\int_{+0}^{\infty} x^\alpha |f(x)| dx$$

converge pour $-\alpha < \alpha < \beta$, on a

$$\int_{+0}^{\infty} f(x) L(\lambda x) \sim L(\lambda) \int_{+0}^{\infty} f(x) dx, \quad \lambda \rightarrow \infty^5).$$

(vi) Si $L(x)$ est convexe, alors pour chaque $a > 0$ fixe

$$x \left\{ \frac{L(x+a)}{L(x)} - 1 \right\} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty.$$

⁵⁾ Dans la présente note nous utilisons la relation asymptotique

$$\int_{c/\lambda}^{\infty} f(x) L(\lambda x) dx \sim L(\lambda) \int_{+0}^{\infty} f(x) dx \quad \text{pour un } c > 0 \text{ fixe.}$$

Or, celle-ci est une conséquence immédiate de la relation mentionnée sous (v), car pour $0 < \eta < \alpha$, en tenant compte de (iv) et (ii), on a

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{L(\lambda)} \int_{+0}^{c/\lambda} f(x) L(\lambda x) dx \right| &\leq \frac{\lambda^{-\eta}}{L(\lambda)} \int_{+0}^{c/\lambda} x^{-\eta} |f(x)| (\lambda x)^\eta L(\lambda x) dx \leq \\ &\leq \frac{\lambda^{-\eta}}{L(\lambda)} \operatorname{Max}_{0 \leq x \leq c} \{x^\eta L(x)\} \int_{+0}^{c/\lambda} x^{-\eta} |f(x)| dx \rightarrow 0, \quad \lambda \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Démonstration. L'hypothèse de $L(x)$ convexe implique sa monotonie. Supposons que $L(x)$ croît d'une façon monotone et posons $n = [x]$. Alors,

$$(3) \quad 0 \leq L(x + na) - L(x) = \varphi(x) L(x),$$

où, en vertu de (i),

$$\varphi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{L(x + na)}{L(x)} - 1 \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty.$$

D'autre part on a

$$L(x + na) - L(x) = \{L(x + na) - L(x + (n-1)a)\} + \dots \\ \dots + \{L(x + 2a) - L(x + a)\} + \{L(x + a) - L(x)\}.$$

En partant de l'hypothèse de convexité de $L(x)$, c. à. d. du fait que

$$\Delta_a^2 L(x) \equiv L(x) - 2L(x + a) + L(x + 2a)$$

est de signe constant, on obtient

$$L(x + a) - L(x) \leq \quad \text{ou} \quad \geq L(x + 2a) - L(x + a),$$

suivant que

$$\Delta_a^2 L(x) \geq 0 \quad \text{ou bien} \quad \Delta_a^2 L(x) \leq 0.$$

De (4) résulte alors

$$L(x + na) - L(x) \geq \begin{cases} n \{L(x + a) - L(x)\} & \text{si } \Delta_a^2 L(x) \geq 0, \\ n \{L(x + na) - L(x + (n-1)a)\} & \text{si } \Delta_a^2 L(x) \leq 0. \end{cases}$$

D'après (3) on a, donc,

$$(5) \quad 0 \leq n \{L(x + a) - L(x)\} \leq \varphi(x) L(x) \quad \text{si } \Delta_a^2 L(x) \geq 0$$

et

$$0 \leq n \{L(x + na) - L(x + (n-1)a)\} \leq \varphi(x) L(x) \quad \text{si } \Delta_a^2 L(x) \geq 0.$$

De la dernière inégalité il résulte

$$\{x + (n-1)a\} \{L(x + na) - L(x + (n-1)a)\} < M_1 \varphi(x) L(x),$$

et, étant donné que de (i) on déduit

$$L(x) = \frac{L(x)}{L(x + (n-1)a)} \cdot L(x + (n-1)a) < M_2 L(x - (n-1)a);$$

on constate finalement que pour $\Delta_a^2 L(x) \leq 0$, on a

$$(6) \quad 0 \leq \{x + (n-1)a\} \{L(x + na) - L(x + (n-1)a)\} < \\ < M_3 \varphi(x) L(x - (n-1)a).$$

De (5) et (6), en tenant compte de $n \sim x$, il résulte que pour chaque fonction convexe et croissante on a

$$0 \leq x \{L(x+a) - L(x)\} < \varepsilon(x)L(x),$$

où $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ avec $x \rightarrow \infty$.

La même démonstration subsiste si l'on suppose que $L(x)$ est une fonction convexe décroissante.

(vii) Pour $\alpha > 0$ on a

$$0 < A n^\alpha L(n) \leq \sum_1^n v^{\alpha-1} L(v) \leq B n^\alpha L(n).$$

Démonstration. D'une part, d'après (iv), on a

$$\begin{aligned} \sum_1^n v^{\alpha-1} L(v) &\leq \text{Max}_{1 \leq v \leq n} \{v^{\alpha/2} L(v)\} \cdot \sum_1^n v^{\alpha/2-1} \leq \\ &\leq n^{\alpha/2} \bar{L}_1(n) \left\{ 1 + \int_1^n x^{\alpha/2-1} dx \right\} \leq \\ &\leq B n^\alpha L(n), \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \sum_1^n v^{\alpha-1} L(v) &\geq \text{Min}_{1 \leq v \leq n} \{v^{-1} L(v)\} \cdot \sum_1^n v^\alpha \geq n^{-1} \underline{L}_1(n) \cdot \int_0^n x^\alpha dx \geq \\ &\geq A n^\alpha L(n) > 0. \end{aligned}$$

3. DÉMONSTRATION DES THÉORÈMES 1–5. Nous ferons usage dans la démonstration des théorèmes 1 et 3 du lemme suivant.

3.1. LEMME. Si $\alpha > 0$ et $c_n \downarrow 0$, la série

$$\sum_1^\infty n^{\alpha-1} L(n) c_n$$

converge, si et seulement si la série

$$\sum_1^\infty n^\alpha L(n) (c_n - c_{n+1})$$

converge.

Démonstration. Posons

$$S_n = \sum_1^n v^{\alpha-1} L(v), \quad S_0 = 0.$$

D'après (vii) les séries

$$\sum n^\alpha L(n) (c_n - c_{n+1}) \quad \text{et} \quad \sum S_n (c_n - c_{n+1})$$

seront convergentes ou divergentes en même temps. Il faut donc montrer, l'équiconvergence de la dernière série et de la série $\sum n^{\alpha-1} L(n) c_n$; celle-ci résulte de

$$(7) \quad \sum_1^p S_n (c_n - c_{n+1}) + S_{n-1} c_n = \sum_1^p n^{\alpha-1} L(n) c_n.$$

En effet, soit $\sum n^{\alpha-1} L(n) c_n < \infty$. Les deux termes dans le premier membre de (7) sont bornés; c'est pourquoi $\sum S_n (c_n - c_{n+1})$ converge.

Inversement, soit $\sum S_n (c_n - c_{n+1}) < \infty$. D'après (vii) et (iv) on a

$$\begin{aligned} \sum_p^\infty S_n (c_n - c_{n+1}) &\geq A \sum_p^\infty n^\alpha L(n) (c_n - c_{n+1}) \geq \\ &\geq A \operatorname{Min}_{p \leq n < \infty} \{n^\alpha L(n)\} \cdot \sum_p^\infty (c_n - c_{n+1}) \geq \\ &\geq A p^\alpha \underline{L}_2(p) c_p \geq \\ &\geq A M p^\alpha L(p) c_p, \quad M > 0, \end{aligned}$$

et en tenant compte de (vii)

$$\sum_p^\infty S_n (c_n - c_{n+1}) \geq \frac{AM}{B} S_p c_p.$$

Donc,

$$S_p c_p \rightarrow 0, \quad p \rightarrow \infty.$$

De (7) résulte donc la convergence de la série $\sum n^{\alpha-1} L(n) c_n$.

3.2. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1. Une transformation simple nous permet (Zygmund [9], § 5.13) d'écrire $g(x)$ sous la forme

$$\begin{aligned} g(x) &= -\frac{1}{2} \lambda_1 \operatorname{tg} \frac{x}{4} + \frac{1}{2 \sin x/2} \sum_1^\infty (\lambda_n - \lambda_{n+1}) (1 - \cos(n + 1/2)x) = \\ &= -\frac{1}{2} \lambda_1 \operatorname{tg} \frac{x}{4} + \frac{x}{2 \sin x/2} G(x). \end{aligned}$$

Étant donné que dans le théorème 1 il s'agit de l'intégrabilité au voisinage du point $x = 0$ et que, d'après (iii), $x^{-\gamma} L(1/x) \operatorname{tg} \frac{x}{4} \in L(0, \pi)$ pour

$0 < \gamma < 2$, on peut donc, sans nuire à la généralité, considérer la fonction nonnégative $G(x)$, au lieu de la fonction $g(x)$. Alors on a

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi} x^{-\gamma} L(1/x) G(x) dx = \\ &= \int_0^{\pi} x^{-\gamma-1} L(1/x) \sum_1^{\infty} (\lambda_n - \lambda_{n+1}) (1 - \cos(n + 1/2)x) dx = \\ &= \sum_1^{\infty} (\lambda_n - \lambda_{n+1}) \int_0^{\pi} x^{-\gamma-1} L(1/x) (1 - \cos(n + 1/2)x) dx. \end{aligned}$$

Le dernier changement d'ordre de sommation et d'intégration est justifié par le fait que les termes de la série sont positifs.

On a donc

$$(8) \quad \int_0^{\pi} x^{-\gamma} L(1/x) G(x) dx = \sum_1^{\infty} (\lambda_n - \lambda_{n+1}) n^{\gamma} L(n) I_n$$

où

$$I_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n^{\gamma} L(n)} \int_0^{\pi} x^{-\gamma-1} L\left(\frac{1}{x}\right) (1 - \cos(n + 1/2)x) dx.$$

Nous aurons d'après (v), pour $0 < \gamma < 2$ et $\alpha_n = \frac{1}{(n + 1/2)\pi}$ ⁶⁾

$$(9) \quad \begin{aligned} I_n &= \left(\frac{n + 1/2}{n}\right)^{\gamma} \frac{1}{L(n)} \int_{\alpha_n}^{\infty} x^{\gamma-1} \left(1 - \cos \frac{1}{x}\right) L\left((n + 1/2)x\right) dx \rightarrow \\ &\rightarrow \int_{+0}^{\infty} x^{\gamma-1} \left(1 - \cos \frac{1}{x}\right) dx = I > 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Supposons que $\sum n^{\gamma-1} L(n) \lambda_n < \infty$. En vertu du lemme la série $\sum (\lambda_n - \lambda_{n+1}) n^{\gamma} L(n)$ est convergente et d'après (9) la série au second

⁶⁾ Voir la remarque 3).

membre de (8) l'est aussi. Par suite, l'intégrale au premier membre de la formule (8) est finie et, de $G(x) \geq 0$, résulte $x^{-\gamma} L(1/x) G(x) \in L(0, \pi)$.

Inversement, soit $x^{-\gamma} L(1/x) G(x) \in L(0, \pi)$. Alors la série au second membre de (8) est convergente, et, d'après (9), ses termes, à partir d'un certain rang, ne sont pas inférieurs aux termes de la série

$$\frac{1}{2} \sum (\lambda_n - \lambda_{n+1}) n^\gamma L(n).$$

Autrement dit, la dernière série converge et aussi, en vertu du lemme, la série $\sum n^{\gamma-1} L(n) \lambda_n$.

3.3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2. Supposons que $\sum n^{-1} L(n) \lambda_n$ converge. Soit

$$(10) \quad \frac{1}{k+1} \leq x < \frac{1}{k}.$$

De

$$g(x) = \sum_1^{k-1} \lambda_n \sin nx + \sum_k^\infty \lambda_n \sin nx,$$

après une transformation abélienne effectuée sur la seconde somme, résulte

$$|g(x)| \leq \sum_1^{k-1} \lambda_n + \frac{\lambda_k}{\sin x/2} \leq \bar{\Lambda}_{k+1} + \pi \frac{\lambda_k}{x},$$

et, d'après (10),

$$(11) \quad |g(x)| \leq \bar{\Lambda}_{k-1} + \pi(k+1)\lambda_k, \quad \frac{1}{k+1} \leq x < \frac{1}{k}.$$

Étant donné qu'il s'agit de l'intégrabilité au voisinage du point $x = 0$, il suffit de montrer que

$$I \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 L\left(\frac{1}{x}\right) |g(x)| dx < \infty.$$

Selon (11) on a

$$I = \sum_1^\infty \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} L\left(\frac{1}{x}\right) |g(x)| dx \leq \sum_1^\infty \{ \bar{\Lambda}_{n-1} + \pi(n+1)\lambda_n \} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} L\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

et du fait que $L(x)$ croît d'une façon monotone, on arrive à l'inégalité

$$\begin{aligned}
 I &\leq \sum_1^{\infty} \{ \bar{\Lambda}_{n-1} + \pi(n+1)\lambda_n \} L(n+1) \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} dx = \\
 &\leq \sum_1^{\infty} \frac{L(n+1)}{n(n+1)} \bar{\Lambda}_{n-1} + \pi \sum_1^{\infty} \frac{L(n+1)}{n} \lambda_n = \\
 (12) \quad &\leq \Sigma_1 + \Sigma_2.
 \end{aligned}$$

La série Σ_2 converge selon l'hypothèse. Pour montrer la convergence de Σ_1 , remarquons d'abord que la convexité de $L(x)$ implique, d'après (vi),

$$L(n+1) - L(n) = \frac{L(n+1)}{n} \varepsilon_n = \frac{n+1}{n} \frac{L(n+1)}{n+1} \varepsilon_n \leq 2\varepsilon_n \frac{L(n+1)}{n+1},$$

où $\varepsilon_n \rightarrow 0$. $L(x)$ étant une fonction monotone et croissante on a

$$\begin{aligned}
 \frac{L(n)}{n} - \frac{L(n+1)}{n+1} &= \frac{L(n+1)}{n(n+1)} - \frac{L(n+1) - L(n)}{n} \gg \\
 &\gg \frac{L(n+1)}{n(n+1)} - 2\varepsilon_n \frac{L(n+1)}{n(n+1)} = \\
 &\gg (1 - 2\varepsilon_n) - \frac{L(n+1)}{n(n+1)}.
 \end{aligned}$$

De la dernière inégalité résulte que $L(n)/n$ décroît d'une façon monotone et, d'autre part, que la série Σ_1 converge si la série

$$(13) \quad \sum \left\{ \frac{L(n)}{n} - \frac{L(n+1)}{n+1} \right\} \bar{\Lambda}_n$$

converge. Cependant,

$$\sum_1^m \left\{ \frac{L(n)}{n} - \frac{L(n+1)}{n+1} \right\} \bar{\Lambda}_n + \frac{L(m+1)}{m+1} \bar{\Lambda}_m = \sum_1^m \frac{L(n)}{n} \lambda_n,$$

et étant donné que $\sum n^{-1} L(n) \lambda_n$ converge d'après l'hypothèse, l'expression au premier membre est bornée. Donc, la série (13) converge et, par conséquent, la série Σ_1 converge de même. En vertu de (12) on a donc $L(1/x)g(x) \in L(0, \pi)$.

Inversement, soit $L(1/x)g(x) \in L(0, \pi)$. $L(x)$ ne décroissant pas, il s'ensuit d'après (iii) que $g(x) \in L(0, \pi)$, c. à. d. λ_n sont les coefficients de Fourier de la fonction $g(x)$. Soit $0 < \delta < \pi$ et posons $p = [1/\delta]$. On a alors

$$(14) \quad \frac{\pi}{2} \sum_1^p \frac{L(n)}{n} \lambda_n \leq \left\{ \int_0^\delta + \int_\delta^\pi \right\} |g(x)| \left| \sum_1^p \frac{L(n)}{n} \sin nx \right| dx.$$

Soit $q = [1/x]$. Dans la première intégrale $x \leq \delta$, c. à. d. $q \geq p$, et en considérant que $\sin nx \geq 0$ pour $x \in (0, \delta)$, $n = 1, \dots, q$ et que $L(x)$ ne décroît pas, on a

$$(15) \quad \left| \sum_1^p \frac{L(n)}{n} \sin nx \right| \leq \sum_1^q \frac{L(n)}{n} \sin nx \leq x \sum_1^q L(n) \leq \\ \leq xqL(q) \leq L\left(\frac{1}{x}\right).$$

Dans la deuxième intégrale $x \geq \delta$, c. à. d. $q \leq p$; de (15) et de la monotonie de $L(n)/n$, résulte

$$\left| \sum_1^p \frac{L(n)}{n} \sin nx \right| \leq \sum_1^q \frac{L(n)}{n} \sin nx + \left| \sum_{q+1}^p \frac{L(n)}{n} \sin nx \right| \leq \\ \leq L\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{\sin x/2} \frac{L(q+1)}{q+1} \leq \\ \leq L\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{\pi L(q)}{xq} < ML\left(\frac{1}{x}\right).$$

Il s'ensuit finalement de (14) que

$$\frac{\pi}{2} \sum_1^p \frac{L(n)}{n} \lambda_n \leq M \int_0^\pi L(1/x) |g(x)| dx,$$

pour chaque $p > [1/\delta]$, c. à. d. que la série $\sum n^{-1} L(n) \lambda_n$ est convergente.

Remarquons, que la démonstration précédente reste valable si λ_n décroît d'une façon monotone à partir d'un certain rang N . Il faut alors, au lieu de $g(x)$, prendre $\bar{g}(x) = \sum_N^\infty \lambda_n \sin nx$ et considérer ensuite l'intégrale $\int_0^{1/N} L(1/x) |\bar{g}(x)| dx$.

3.4. DÉMONSTRATION DU THÉOREME 3. Soit $\sum n^{\gamma-1} L(n) \lambda_n$, $0 < \gamma < 1$, convergente. On obtient par une transformation abélienne

$$f(x) = \frac{1}{2} \lambda_0 + \frac{1}{\sin x/2} \sum_1^{\infty} (\lambda_n - \lambda_{n+1}) \cos(n+1)x \sin nx.$$

Étant donné que, d'après (iii), $x^{-\gamma} L(1/x) \in L(0, \pi)$ pour $\gamma < 1$, la fonction $x^{-\gamma} L(1/x) f(x)$ est intégrable dans l'intervalle $(0, \pi)$ si l'intégrale

$$\int_0^{\pi} x^{-\gamma-1} L(1/x) \left| \sum_1^{\infty} (\lambda_n - \lambda_{n+1}) \cos(n+1)x \sin nx \right| dx$$

existe. A plus forte raison elle est intégrable, si

$$K \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\pi} x^{-\gamma-1} L(1/x) \sum_1^{\infty} (\lambda_n - \lambda_{n+1}) |\sin nx| dx < \infty$$

Les termes du second membre étant positifs, on a

$$\begin{aligned} K &= \sum_1^{\infty} (\lambda_n - \lambda_{n+1}) \int_0^{\pi} x^{-\gamma-1} L(1/x) |\sin nx| dx = \\ &= \sum_1^{\infty} (\lambda_n - \lambda_{n+1}) n^{\gamma} L(n) K_n, \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$K_n = \frac{1}{L(n)} \int_{\frac{1}{n\pi}}^{\infty} x^{\gamma-1} |\sin(1/x)| L(nx) dx.$$

Pour $0 < \gamma < 1$, selon (v) et en vertu de la remarque ⁶⁾,

$$K_n \rightarrow \int_{+0}^{\infty} x^{\gamma-1} |\sin(1/x)| dx, \quad n \rightarrow \infty,$$

d'où

$$K < M \sum_1^{\infty} (\lambda_n - \lambda_{n+1}) n^{\gamma} L(n).$$

En vertu du lemme, le second membre est borné pour $0 < \gamma < 1$, ce qui prouve que $x^{-\gamma} L(1/x) f(x) \in L(0, \pi)$.

Inversement, soit $x^{-\gamma} L(1/x) f(x) \in L(0, \pi)$, $0 < \gamma < 1$. Soit $0 < \delta < \pi$ et $p = [1/\delta]$. En premier lieu on a

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} \sum_1^p n^{\gamma-1} L(n) &\leq \frac{\pi}{2} \sum_1^p \lambda_n \operatorname{Max}_{n \leq v < \infty} \{v^{\gamma-1} L(v)\} = \\ &\leq \frac{\pi}{2} \sum_1^p n^{\gamma-1} \bar{L}_2(n) \lambda_n, \end{aligned}$$

où $n^{\gamma-1} \bar{L}_2(n)$ ne croît pas. D'après (iii), $f(x) \in L(0, \pi)$, c. à. d. λ_n sont des coefficients de Fourier de la fonction $f(x)$. Donc,

$$(16) \quad \frac{\pi}{2} \sum_1^p n^{\gamma-1} L(n) \lambda_n \leq \left\{ \int_0^\delta + \int_\delta^\pi \right\} |f(x)| \left| \sum_1^p n^{\gamma-1} \bar{L}_2(n) \cos nx \right| dx.$$

Soit $q = [1/x]$. En tenant compte de (vii) et (iv), pour $0 \leq x \leq \delta$ on a d'une manière analogue à celle exposée dans la démonstration de la seconde partie du théorème 2,

$$\begin{aligned} \left| \sum_1^p n^{\gamma-1} \bar{L}_2(n) \cos nx \right| &\leq \sum_1^q n^{\gamma-1} \bar{L}_2(n) \leq \\ &\leq M q^\gamma \bar{L}_2(q) \leq \\ &\leq M_1 x^{-\gamma} L(1/x). \end{aligned}$$

Vu que $n^{\gamma-1} \bar{L}_2(n)$ ne croît pas, on a pour $\delta \leq x \leq \pi$, en vertu de (vii),

$$\begin{aligned} \left| \sum_1^p n^{\gamma-1} \bar{L}_2(n) \cos nx \right| &\leq \sum_1^q n^{\gamma-1} \bar{L}_2(n) + \left| \sum_{q+1}^p n^{\gamma-1} \bar{L}_2(n) \cos nx \right| \leq \\ &\leq M_1 x^{-\gamma} L(1/x) + q^{\gamma-1} \bar{L}_2(q) \operatorname{Max}_{q \leq v \leq p} \left| \frac{\sin(v + 1/2)x}{2 \sin x/2} \right| \leq \\ &\leq M_2 x^{\gamma-1} L(1/x). \end{aligned}$$

De (16) résulte donc

$$\frac{\pi}{2} \sum_1^p n^{\gamma-1} L(n) \lambda_n \leq M_3 \int_0^\pi x^{-\gamma} L(1/x) |f(x)| dx,$$

c. à. d. la convergence de la série $\sum_n^{\gamma-1} L(n) \lambda_n$.

3.5. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 4. Si on procède comme Boas, une sommation par partie et l'hypothèse $f(0) = 0$ nous donnent

$$\begin{aligned} f(x) &= - \sum_1^{\infty} \lambda_n (1 - \cos nx) = \\ &= \sum_2^{\infty} \Lambda_n \{ \cos (n-1)x - \cos nx \} = \\ &= 2 \sum_2^{\infty} \Lambda_n \sin (n-1/2)x \cdot \sin x/2, \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} L\left(\frac{1}{x}\right) f(x) &= \frac{\sin x}{x} L\left(\frac{1}{x}\right) \sum_2^{\infty} \Lambda_n \sin nx - 2 \left(\frac{\sin x/2}{x}\right)^2 x L\left(\frac{1}{x}\right) \sum_2^{\infty} \Lambda_n \cos nx = \\ (17) \quad &= \frac{\sin x}{x} L\left(\frac{1}{x}\right) \bar{g}(x) - 2 \left(\frac{\sin x/2}{x}\right)^2 x L\left(\frac{1}{x}\right) \bar{f}(x). \end{aligned}$$

Supposons que $\sum n^{-1} L(n) \Lambda_n$ converge. Le fait que $L(x)$ est une fonction monotone et croissante implique à fortiori la convergence de la série $\sum n^{-1} \Lambda_n$ (les Λ_n étant positifs à partir d'un certain rang), d'où, après une transformation abélienne, résulte la convergence de la série $\sum \Delta \Lambda_n \log n$ ([9], § 5.13). Or, Szidon [7] a montré que de $\sum \Delta \Lambda_n \log n < \infty$ résulte l'intégrabilité de $\bar{f}(x)$; donc, d'après (iii), $xL(1/x)\bar{f}(x) \in L(0, \pi)$. Le fait que $L(1/x)\bar{g}(x) \in L(0, \pi)$ est une conséquence du théorème 2 et de la remarque faite à la fin de la démonstration de ce théorème. De (17) résulte finalement que $x^{-1}L(1/x)f(x) \in L(0, \pi)$.

Inversement, supposons que $x^{-1}L(1/x)f(x) \in L(0, \pi)$. Posons

$$s_n = \sum_1^n \frac{L(v)}{v}, \quad s_0 = 0.$$

Soit $0 < \delta < \pi$; alors on a, en posant $p = [1/\delta]$,

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} \sum_1^p \frac{L(n)}{n} \Lambda_n &= \frac{\pi}{2} \left\{ \sum_1^p s_n \lambda_n + s_p \Lambda_{p+1} \right\} = \\ &= \frac{\pi}{2} \left\{ \sum_1^p s_n \lambda_n + s_p \left(-\frac{1}{2} \lambda_0 - \sum_1^p \lambda_n \right) \right\} = \\ &= \frac{\pi}{2} \left\{ \sum_1^p (s_n - s_p) \lambda_n - \lambda_0 s_p \right\}. \end{aligned}$$



Étant donné que $L(x)$ croît d'une façon monotone, on a, d'après (iii), $f(x) \in L(0, \pi)$, de sorte que λ_n sont des coefficients de Fourier de la fonction $f(x)$. Donc,

$$\frac{\pi}{2} \sum_1^p \frac{L(n)}{n} \Lambda_n = \int_0^\pi f(x) \left\{ -s_p + \sum_1^p (s_n - s_p) \cos nx \right\} dx,$$

et si l'on pose

$$(18) \quad \sigma_n = \sum_0^n \cos vx = \frac{\sin x/2 + \sin (n+1/2)x}{2 \sin x/2},$$

on obtient, après une sommation par parties,

$$(19) \quad \begin{aligned} \frac{\pi}{2} \sum_1^p \frac{L(n)}{n} \Lambda_n &\leq \int_0^\pi |f(x)| \left| \frac{L(p+1)}{p+1} \sigma_p(x) - L(1) - \sum_1^p \frac{L(n+1)}{n+1} \sigma_n(x) \right| dx \leq \\ &\leq M \frac{L(p+1)}{p+1} \int_0^\pi x^{-1} |f(x)| dx + L(1) \int_0^\pi |f(x)| dx + \\ &\quad + \int_0^\pi |f(x)| \left| \sum_1^p \frac{L(n+1)}{n+1} \sigma_n(x) \right| dx, \end{aligned}$$

où M est indépendant de p . On a, comme nous allons le démontrer tout de suite,

$$(20) \quad \sum_1^p \frac{L(n+1)}{n+1} \sigma_n(x) < M_1 \frac{1}{x} L\left(\frac{1}{x}\right), \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

où M_1 est aussi indépendant de p . Par suite, en tenant compte de $x^{-1} L(1/x) f(x) \in L(0, \pi)$, $L(x) \uparrow$ et $L(x)/x \rightarrow 0$ ($x \rightarrow \infty$) les trois termes au second membre de (19) seront bornés, d'où la convergence de $\sum n^{-1} L(n) \Lambda_n$.

Enfin, l'inégalité (20) sera démontrée d'une manière analogue à celle employée dans la deuxième partie du théorème 2. On a, en effet, pour

$0 \leq x \leq \delta$, c. à d. pour $q \geq p$, d'après (18)

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_1^p \frac{L(n+1)}{n+1} \sigma_n(x) \right| &\leq \sum_1^q \frac{L(n+1)}{n+1} \sigma_n(x) \leq \sum_1^q \frac{L(n+1)(n+1)x}{n+1 \sin x/2} \leq \\
 (21) \qquad &\leq \pi \sum_1^q L(n+1) \leq \pi q L(q+1) \leq \\
 &\leq M_2 \frac{1}{x} L\left(\frac{1}{x}\right).
 \end{aligned}$$

D'autre part, de $L(x)/x \downarrow 0$, on obtient par une transformation d'Abel, pour $\delta \leq x \leq \pi$, c. à d. pour $q \leq p$,

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_1^p \frac{L(n+1)}{n+1} \sigma_n(x) \right| &\leq \left| \sum_1^q \right| + \left| \sum_{q+1}^p \right| \leq \\
 &\leq M_2 \frac{1}{x} L\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{M_3 L(q+1)}{x^2 q+1} \leq \\
 &\leq M_4 \frac{1}{x} L\left(\frac{1}{x}\right),
 \end{aligned}$$

ce qui, avec (21), donne (20).

3.6. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 5. Du fait que la série de $f(x)$ est absolument et uniformément convergente et que $f(0) = 0$, on arrive à la formule

$$f(x) = - \sum_1^{\infty} \lambda_n (1 - \cos nx)$$

et $f(x) \in L(0, \pi)$. Supposons que, à partir de l'indice N , les λ_n sont positifs et décroissants. Comme il s'agit de l'intégrabilité au voisinage du point $x = 0$, et comme d'après (iii) $x^{-\gamma} L(1/x) (1 - \cos nx) \in L(0, \pi)$ pour $1 < \gamma < 3$ et $n = 1, 2, \dots, N-1$, on peut, sans restreindre la généralité, au lieu de $f(x)$ considérer la fonction

$$F(x) = \sum_N^{\infty} \lambda_n (1 - \cos nx),$$

qui n'est pas négative dans $(0, \pi)$. On obtient

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x^{-\gamma} L\left(\frac{1}{x}\right) F(x) dx &= \int_0^{\pi} x^{-\gamma} L\left(\frac{1}{x}\right) \left\{ \sum_N^{\infty} \lambda_n (1 - \cos nx) \right\} dx = \\ &= \sum_N^{\infty} \lambda_n \int_0^{\pi} x^{-\gamma} L\left(\frac{1}{x}\right) (1 - \cos nx) dx, \end{aligned}$$

en tenant compte du fait que les termes de la série ne sont pas négatifs. En posant

$$T_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{L(n)} \int_{\frac{1}{n\pi}}^{\infty} x^{\gamma-2} \left(1 - \cos \frac{1}{x}\right) L(nx) dx,$$

on aura

$$(22) \quad \int_0^{\pi} x^{-\gamma} L(1/x) F(x) dx = \sum_N^{\infty} \lambda_n n^{\gamma-1} L(n) T_n.$$

D'après (v) et la remarque ⁵⁾ il s'ensuit pour $1 < \gamma < 3$ que

$$(23) \quad T_n \rightarrow \int_{+0}^{\infty} x^{\gamma-2} \{1 - \cos(1/x)\} dx = T > 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Supposons que $\sum n^{\gamma-1} L(n) \lambda_n < \infty$, $1 < \gamma < 3$. Vu (23) la série $\sum n^{\gamma-1} L(n) \lambda_n T_n$ elle aussi est convergente, c. à. d. le second membre dans (22) est fini. Étant donné que $F(x) \geq 0$, on obtient $x^{-\gamma} L(1/x) F(x) \in L(0, \pi)$.

Inversement, soit $x^{-\gamma} L(1/x) F(x) \in L(0, \pi)$, $1 < \gamma < 3$. Alors, de (22) il s'ensuit que $\sum n^{\gamma-1} L(n) \lambda_n T_n$ converge et, vu (23), les termes de cette série, à partir d'un certain rang, ne sont pas inférieurs aux termes de la série

$$\frac{T}{2} \sum_N^{\infty} n^{\gamma-1} L(n) \lambda_n.$$

Autrement dit, $\sum n^{\gamma-1} L(n) \lambda_n$ converge.

3.7. Pour démontrer l'équiconvergence des séries

$$(24) \quad \sum n^{-1} L(n) \Lambda_n \quad \text{et} \quad \sum L^2(n) \lambda_n,$$

nous remarquons que la première de ces deux séries converge ou diverge en même temps que la série

$$(25) \quad \Sigma \{L^2(n) - L^2(n-1)\} \Lambda_n.$$

C'est la conséquence immédiate de la condition supplémentaire (2), d'après laquelle

$$L^2(n) - L^2(n-1) \asymp \frac{L(n)}{n}.$$

L'équiconvergence de la série (25) et de la deuxième des séries (24) résulte de

$$(26) \quad \sum_1^p L^2(n) \lambda_n + L^2(p) \Lambda_{p+1} = \sum_1^p \{L^2(n) - L^2(n-1)\} \Lambda_n + L(0) \Lambda_1$$

Soit $\Sigma \{L^2(n) - L^2(n-1)\} \Lambda_n < \infty$. Les deux expressions au premier membre de (26) sont bornées, c. à. d. $\Sigma L^2(n) \lambda_n < \infty$.

Inversement, supposons $\Sigma L^2(n) \lambda_n < \infty$. Alors on a

$$\sum_p^\infty L^2(n) \lambda_n \geq L^2(p) \sum_p^\infty \lambda_n = L^2(p) \Lambda_p,$$

c. à. d.

$$L^2(p) \Lambda_p \rightarrow 0, \quad p \rightarrow \infty.$$

Par suite, d'après (26), $\Sigma \{L^2(n) - L^2(n-1)\} \Lambda_n < \infty$.

(Reçu le 14 septembre 1955)

BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. Aljančić, R. Bojanić et M. Tomić — Sur la valeur asymptotique d'une classe des intégrales définies. *Publ. Inst. math. Acad. serbe sci.*, VII (1954), 81—94.
- [2] R. P. Boas — Integrability of trigonometric series (III). *Quart. J. of Math. (Oxford)* (2), 3 (1952), 217—221.
- [3] P. Hartman and A. Wintner — On sine series with monotonic coefficients. *J. London Math. Soc.*, 28 (1953), 102—104.
- [4] P. Heywood — On the integrability of functions defined by trigonometric series. *Quart J. of Math. (Oxford)* (2), 5 (1954), 71—76.
- [5] J. Karamata — Sur un mode de croissance régulière. *Bull. Soc. Math. France*, LXI (1933), 55—62.
- [6] J. Korevaar, T. V. Ardenne-Ehrenfest and N. G. de Bruijn — A note on slowly convergent oscillating functions. *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 23 (1949), 77—86.
- [7] S. Szidon — Reihentheoretische Sätze und ihre Anwendungen in der Theorie der Fourierschen Reihen. *Math. Zeitschrift*, 10 (1921), 118—135.
- [8] W. H. Young — On the Fourier series of bounded functions. *Proc. London. Math. Soc.*, 12 (1913), 41—70.
- [9] A. Zygmund — *Trigonometrical series*, Warszawa—Lwów, 1935.