SUR LE COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE AU VOISINAGE DE ZÉRO DES SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES DE SINUS À COEFFICIENTS MONOTONES[1)]

Par

S. ALJANČIĆ (Beograd), R. BOJANIĆ (Skoplje) et M. TOMIĆ (Beograd)

RÉSUMÉ. Du comportement asymptotique au voisinage de zéro d'une série trigonométrique de sinus à coefficients monotones on déduit le comportement de ses coefficients et inversement. Les résultats obtenus généralisent les résultats connus [4], [6], [8], [13].

1. *INTRODUCTION ET RÉSULTATS.* La série trigonométrique

$$g(x) = \sum_{1}^{\infty} \lambda_n \sin nx, \tag{1}$$

représente une fonction continue dans (δ, π), $\delta > 0$, si $\lambda_n \downarrow 0$. Plusieurs auteurs ont examiné le comportement asymptotique de la somme $g(x)$ lorsque $x \to +0$.

D'abord, Chaundy et Jolliffe [3], en 1916, et ensuite Jolliffe [9] ont montrés que $n\lambda_n \to 0$, $n \to \infty$, est une condition nécessaire et suffisante pour la convergence uniforme de (1) dans $(0, \pi)$, c. à. d. pour la continuité de $g(x)$ au voisinage de zéro.

En 1928 Hardy [4] a montré que de

$$\lambda_n \sim A\, n^{-\alpha}, \quad n \to \infty, \text{[2)]} \tag{2}$$

1) Les résultats contenus dans cette note ont été communiqués au III Congrès des math. de l'URSS (Moscou, juin 1956) par M. Tomić.

2) $f(x) \sim g(x)$, $x \to a$ signifie que $f(x)/g(x) \to 1$, $x \to a$.

avec $A>0$ et $0<\alpha<1$, il résulte

$$g(x) \sim \frac{A\pi}{2\,\Gamma(\alpha)\,\sin\frac{\alpha\pi}{2}}\, x^{\alpha-1}, \quad x \to +0, \tag{3}$$

et en 1931 dans [5], que la relation inverse a aussi lieu, c.à.d., que de (3) résulte aussi (2). De plus, le même auteur, dans [5], et en 1943, avec Rogosinski, dans [6], montre que ce résultat, sous une interpretation adéquate, reste valable même pour $\alpha=1$, c. à. d. que de $n\lambda_n \to A$ $(A>0)$ il s'ensuit $g(x) \to A\pi/2$, et inversement.

Bien entendu le résultat analogue $(0<\alpha<1)$ est valable aussi pour la série de cosinus. En utilisant ce fait, Heywood [8], en 1954, a montré que (2) $\rightleftarrows$ (3) aussi pour $1<\alpha<2$. Il a en même temps montré que pour $\alpha \geqslant 2$ ceci n'est plus vrai; ainsi, de (2) pour $\alpha=2$, résulte $g(x) \sim A\,x \log 1\,x$, et pour $\alpha>2$, d'après un théorème de Hartman et Wintner [7], on a $g(x) \sim Kx$, où K désigne une constante.

Dans une note antérieure [2] nous avons généralisé le premier résultat mentionné de Hardy. Pour compléter les résultats de ce genre nous allons donner, ici, cette généralisation avec sa démonstration. Mais le but principal de cette note est, d'une part, d'envisager les théorèmes inverses de ce type, et, d'autre part, d'introduire dans tous ces théorèmes une forme plus générale des valeurs asymptotiques des coefficients λ_n et de la somme $g(x)$. De cette manière les théorèmes généralisés restent valables même pour $\alpha=0$, le cas qui n'a aucun sens dans les résultats de Hardy. D'une manière plus précise, nous introduirons dans les expressions qui donnent le comportement asymptotique des coefficients λ_n et de la somme $g(x)$ la classe des fonctions à croissance lente. D'après Karamata [10], une fonction positive et continue $L(x)$, définie pour $x \geqslant 0$, est dite à croissance lente si

$$\frac{L(tx)}{L(x)} \to 1, \quad x \to \infty \tag{4}$$

pout tout $t>0$ fixe.

THÉORÈME 1. *Soit* $0<\alpha<2$, $A>0$ *et* $\lambda_n \downarrow 0$. *Alors de*

$$g(x) \sim \frac{A\pi}{2\,\Gamma(\alpha)\,\sin\frac{\alpha\pi}{2}}\, x^{\alpha-1} L\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \to +0, \tag{5}$$

ЧНОРИЈЕ

résulte

$$\lambda_n \sim A\, n^{-\alpha} L(n), \quad n \to \infty, \tag{6}$$

et inversement, de (6) *résulte* (5).

Pour $1 < \alpha < 2$ de (6) résulte (5) déjà du fait que les coefficients λ_n son positifs[3].

Sous certaines restrictions ce résultat est valable même pour $\alpha = 0$. Bien entendu, à cause de $\lambda_n \to 0$, il faut supproser dans les deux théorèmes qui suivent que la fonction $L(x)$ tend vers zéro lorsque $x \to \infty$.

THÉORÈME 2. *Soit* $A > 0$ *et soit* λ_n *une suite convexe qui* $\downarrow 0$. *Alors de*

$$\lambda_n \sim A\, L(n), \quad n \to \infty, \tag{7}$$

résulte

$$g(x) \sim A \frac{1}{x} L\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \to +0. \tag{8}$$

THÉORÈME 3. *Soit* $A > 0$ *et* $\lambda_n \downarrow 0$. *Alors de* (8) *résulte* (7).

Dans le même ordre d'idées se trouve le théorème suivant de Salem [13][4].

Soit $\lambda(x)$, $x \geqslant 0$, *une fonction convexe qui tend d'une façon monotone vers zéro et telle que* $n\lambda(n)$ *ne décroît pas. En posant* $\lambda(n) = \lambda_n$, *on a*

$$0 < \frac{c}{x} \lambda\left(\frac{1}{x}\right) < g(x) < \frac{C}{x} \lambda\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \to +0.$$

Les conditions portant sur les coefficients λ_n dans le théorème de Salem sont plus générales, mais la conclusion est moins précise, car la dernière relation est une relation d'ordre, pas une relation asymptotique. Nous remarquons seulement ici, qu'en partant des conditions

$$\frac{1}{n} \sum_{1}^{n} \nu^k \lambda_\nu \asymp n^k \lambda_n,$$

qui contiennent la condition de Salem (avec $k = 1$), on obtient que λ_n appartient à la classe $R - O$ [12], c.à.d. à la classe des fonctions définies

---

[3] Ce résultat est énoncé (sans preuve) par Hardy [4] dans le cas spécial où $L(x) \equiv 1$.

[4] Voir, par exemple, [14] p. 114, § 5.211.

par la relation

$$0 < c < \frac{L^*(tx)}{L^*(x)} < C, \quad x \to \infty, \quad L^*(\nu) = \lambda_\nu,$$

pour tout $t > 0$ fixe.

De cette manière on peut obtenir les résultats analogues aux théorèmes 1, 2 et 3 mais avec une relation d'ordre, c.à.d. des résultats au sens de Salem. Nous remarquons aussi que le théorème 2, avec $\lambda_n = 1/\log n$, nous donne

$$\sum_1^\infty \frac{\sin nx}{\log n} \sim \frac{1}{x \log 1/x}, \quad x \to +0,$$

tandis que, d'après Salem, on a seulement

$$0 < \frac{c}{x \log 1/x} < \sum_2^\infty \frac{\sin nx}{\log n} < \frac{C}{x \log 1/x}, \quad x \to +0.$$

Enfin, il faut dire que les séries engendrées par le théorème 1 sont des series de Fourier. En général, ce n'est plus toujours le cas dans les théorèmes 2 et 3. En effet, de $\lambda_n \downarrow 0$ résulte ([14] p. 112) qu'on a toujours

$$\lambda_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g(x) \sin nx \, dx. \tag{9}$$

Pour $0 < \alpha < 2$, $g(x)$ est intégrable au sens de Lebesgue, en tenant compte des propriétés de fonctions à croissance lente.[5] Cependant pour $\alpha = 0$, $g(x)$ n'est pas nécessairement intégrable, ce qui résulte de (8) en prenant, par exemple, $\lambda_n = 1/\log n$.

2. *PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS À CROISSANCE LENTE.* (i) Le passage à la limite (†), qui définit la classe de fonctions à croissance lente, a lieu uniformément par rapport à $t \in (a, b)$, $0 < a < b < \infty$.

(ii) Si $f(x) \sim L(x)$, $x \to \infty$, alors $f(x)$ est de même une fonction à croissance lente.

(iii) Si $\alpha > 0$, on a

$$x^\alpha L(x) \to \infty \quad \text{et} \quad x^{-\alpha} L(x) \to 0, \quad x \to \infty.$$

[5] Les propriétés des fonctions à croissance lente se trouvent dans § 2. Ici, il s'agit de la propriété (iii).

(iv) Soit $\alpha > 0$ et posons

$$\underline{L}_1(x) = x^{\alpha} \operatorname*{Min}_{0 \leqq t \leqq x} \{t^{-\alpha} L(t)\}, \quad \overline{L}_1(x) = x^{-\alpha} \operatorname*{Max}_{0 \leqq t \leqq x} \{t^{\alpha} L(t)\};$$

$$\underline{L}_2(x) = x^{-\alpha} \operatorname*{Min}_{x \leqq t < \infty} \{t^{\alpha} L(t)\}, \quad \overline{L}_2(x) = x^{\alpha} \operatorname*{Max}_{x \leqq t < \infty} \{t^{-\alpha} L(t)\}.$$

Alors, $\overline{\underline{L}}_k(x) \sim L(x)$, $x \to \infty$ $(k = 1,2)$, c.à.d., d'apres (ii), $\overline{\underline{L}}_k(x)$ $(k=1,2)$ sont aussi des fonctions à croissance lente. Les fonctions $x^{-\alpha}\underline{L}_1(x)$ et $x^{-\alpha}\overline{L}_2(x)$ sont non croissantes, tandis que $x^{\alpha}\overline{L}_1(x)$ et $x^{\alpha}\underline{L}_2(x)$ sont des fonctions non décroissantes.

(v) Soit $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Si l'intégrale

$$\int_{+0}^{\infty} x^{\kappa} |f(x)| \, dx$$

converge pour $-\alpha < \kappa < \beta$, on a

$$\int_{+0}^{\infty} f(x) L(\lambda x) \, dx \sim L(\lambda) \int_{+0}^{\infty} f(x) \, dx, \quad \lambda \to \infty.^{6)}$$

On peut trouver la démonstration des propriétés (i—iv) dans [10] et de la propriété (v) dans [1].

---

6) Plus précisément, dans la présente note nous utilisons la relation asymptotique

$$\int_{c/\lambda}^{\infty} f(x) L(\lambda x) \, dx \sim L(\lambda) \int_{+0}^{\infty} f(x) \, dx, \quad \text{pour un } c > 0 \text{ fixe}.$$

Or, celle-ci est une conséquence immédiate de la relation mentionnée sous (v), car pour $0 < \eta < \alpha$, en tenant compte de (iv) et (ii), on a

$$\left| \frac{1}{L(\lambda)} \int_{+0}^{c/\lambda} f(x) L(\lambda x) \, dx \right| \leqslant \frac{\lambda^{-\eta}}{L(x)} \int_{+0}^{c/\lambda} x^{-\eta} |f(x)| (\lambda x)^{\eta} L(\lambda x) \, dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\lambda^{-\eta}}{L(\lambda)} \operatorname*{Max}_{0 \leqq x \leqq c} \{x^{\eta} L(x)\} \int_{+0}^{c/\lambda} x^{-\eta} |f(x)| \, dx \to 0, \quad \lambda \to \infty.$$

3. *LEMMES.* Dans les démonstrations des théorèmes énoncés dans § 1 nous aurons besoin de quelques lemmes. Pour plus de clarté nous les exposerons dans ce paragraphe.

LEMME 1. *Soit c_n une suite des nombres positifs et soit pour un $k \geqslant 0$ la suite $n^{-k} c_n$ décroissante d'une façon monotone. Alors de*

$$c_1 + c_2 + \ldots + c_n \sim C n^{\gamma} L(n), \quad n \to \infty, \tag{10}$$

avec $C > 0$, $\gamma > 0$, il résulte

$$c_n \sim C \gamma n^{\gamma - 1} L(n), \quad n \to \infty.$$

Démonstration. Soit $\delta > 0$ et $m = [n + \delta n]$. Alors, d'après (10), on a

$$c_{n+1} + \ldots + c_m = C \{m^{\gamma} L(m) - n^{\gamma} L(n)\} + o\{m^{\gamma} L(m)\} + o\{n^{\gamma} L(n)\} =$$

$$= C n^{\gamma} L(n) \left\{ \left(\frac{m}{n}\right)^{\gamma} \frac{L(m)}{L(n)} - 1 \right\} + o\{n^{\gamma} L(n)\}.$$

D'une part, d'après (i), il vient

$$\left(\frac{m}{n}\right)^{\gamma} \frac{L(m)}{L(n)} \to (1+\delta)^{\gamma}, \quad n \to \infty,$$

ce qui donne

$$c_{n+1} + \ldots + c_m = C n^{\gamma} L(n) \{(1+\delta)^{\gamma} - 1\} + o\{n^{\gamma} L(n)\}; \tag{11}$$

d'autre part, de $n^{-k} c_n \downarrow$, on obtient pour $n < \nu \leqslant m$

$$c_{\nu} \leqslant \left(\frac{\nu}{n}\right)^k c_n \leqslant \left(\frac{m}{n}\right)^k c_n \leqslant (1+\delta)^k c_n.$$

Donc,

$$c_{n+1} + \ldots + c_m \leqslant (m-n)(1+\delta)^k c_n \leqslant n\delta (1+\delta)^k c_n,$$

c. à. d., en vertu de (11),

$$n\delta (1+\delta)^k c_n \geqslant C n^{\gamma} L(n) \{(1+\delta)^{\gamma} - 1\} + o\{n^{\gamma} L(n)\}.$$

Il s'ensuit

$$\liminf_{n=\infty} \frac{c_n}{n^{\gamma-1} L(n)} \geqslant C \frac{(1+\delta)^{\gamma} - 1}{\delta (1+\delta)^k},$$

et en faisant δ tendre vers zéro on arrive à

$$\liminf_{n=\infty} \frac{c_n}{n^{\gamma-1} L(n)} \geqslant C_\gamma .$$

D'une manière semblable, en partant d'un groupe de membres à gauche de c_n, on trouvera

$$\limsup_{n=\infty} \frac{c_n}{n^{\gamma-1} L(n)} \leqslant C_\gamma .$$

Donc,

$$\lim_{n=\infty} \frac{c_n}{n^{\gamma-1} L(n)} = C_\gamma ,$$

ce qu'il fallait démontrer.

LEMME 2. *Soit*

$$K(r, x) = \frac{\sin x}{(1-2r\cos x + r^2)^2} - \frac{x}{\{(1-r)^2 + x^2\}^2} .$$

Pour $0 < r < 1$ *et* $0 \leqslant x \leqslant \pi$ *on a*

$$|K(r, x)| \leqslant \frac{\pi^2}{r^2} \frac{(1-r)x + x^5}{\{(1-r)^2 + x^2\}^2} .$$

Démonstration. Pour $0 \leqslant x \leqslant \pi$ et $r > 0$ résulte l'inégalité

$$|K(r, x)| = \left| \frac{1}{x^3} \left\{ \frac{4(1-\cos x)^2}{(1-2r\cos x + r^2)^2} - \frac{x^4}{\{(1-r)^2 + x^2\}^2} \right\} + \right.$$

$$\left. + \frac{x^3 \sin x - 4(1-\cos x)^2}{x^3 (1-2r\cos x + r^2)^2} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{x^3} \left\{ \frac{2(1-\cos x)}{1-2r\cos x + r^2} + \frac{x^2}{(1-r)^2 + x^2} \right\} \left| \frac{2(1-\cos x)}{1-2r\cos x + r^2} - \frac{x^2}{(1-r)^2 + x^2} \right| +$$

$$+ \frac{|x^3 \sin x - 4(1-\cos x)^2|}{x^3 (1-2r\cos x + r^2)^2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{r} \frac{|2(1-\cos x)\{(1-r)^2 + x^2\} - x^2 \{(1-r)^2 + x^2\}|}{x^3 (1-2r\cos x + r^2)\{(1-r)^2 + x^2\}} + \frac{x^5}{(1-2r\cos x + r^2)^2} ,$$

vu que $|x^3 \sin x - 4(1-\cos x)^2| \leqslant x^8$ pour $0 \leqslant x \leqslant \pi$. Étant donné que pour $0 < r < 1$ on a

$$|2(1-\cos x)\{(1-r)^2+x^2\} - x^2(1-2r\cos x + r^2)| =$$

$$= 2(1-r)\left|(1-r)\left(1-\cos x - \frac{x^2}{2}\right) + x^2(1-\cos x)\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2(1-r)x^4,$$

on obtient de là

$$|K(r,x)| \leqslant \frac{4}{r}\frac{(1-r)x}{(1-2r\cos x+r^2)\{(1-r)^2+x^2\}} + \frac{x^5}{(1-2r\cos x+r^2)^2}.$$

En tenant compte de $(0 \leqslant x \leqslant \pi, \quad 0 < r < 1)$

$$1-2r\cos x + r^2 = (1-r)^2 + 4r\sin^2\frac{x}{2} \geqslant (1-r)^2 + \frac{4r}{\pi^2}x^2 \geqslant$$

$$\geqslant \frac{4r}{\pi^2}\{(1-r)^2+x^2\},$$

on a finalement

$$|K(r,x)| \leqslant \frac{\pi^2}{r^2}\frac{(1-r)x}{\{(1-r)^2+x^2\}^2} + \left(\frac{\pi^2}{4r}\right)^2\frac{x^5}{\{(1-r)^2+x\}^2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\pi^2}{r^2}\frac{(1-r)x+x^5}{\{(1-r)^2+x^2\}^2}.$$

LEMME 3. *Pour $a > 0$ et $-1 < \alpha < 3$ on a*

$$\int_0^a x^\alpha\{(1-x)^2+x^2\}^{-2} L\left(\frac{1}{x}\right)dx = \{B(\alpha)+o(1)\}(1-r)^{\alpha-3} L\left(\frac{1}{1-r}\right), \quad r \to 1-0,$$

où

$$B(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin\frac{\alpha\pi}{2}\Gamma(\alpha)\Gamma(2-\alpha), & \alpha \neq 0, \\ \frac{\pi}{4}, \quad \alpha = 0.[7] \end{cases}$$

[7]) Nous remarquons que

$$\lim_{\alpha \to +0} \frac{1}{2}\sin\frac{\alpha\pi}{2}\Gamma(\alpha)\Gamma(2-\alpha) = \frac{\pi}{4}.$$

D é m o n s t r a t i o n. Par la transformation $x=(1-r)/y$ on arrive à

$$\int_0^a x^\alpha \{(1-r)^2+x^2\}^{-2} L\left(\frac{1}{x}\right) dx = (1-r)^{\alpha-3} \int_{\frac{1-r}{a}}^{\infty} y^{2-\alpha}(1+y^2)^{-2} L\left(\frac{y}{1-r}\right) dy.$$

En tenant compte de la propriété (v) des fonctions à croissance lente on a

$$\int_{\frac{1-r}{a}}^{\infty} y^{2-\alpha}(1+y^2)^{-2} L\left(\frac{y}{1-r}\right) dy \sim L\left(\frac{1}{1-r}\right) \int_0^\infty y^{2-\alpha}(1+y^2)^{-2} dy, \quad r\to 1-0.$$

Par suite, le lemme est demontré, car

$$\int_0^\infty y^{2-\alpha}(1+y^2)^{-2} dy = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin\frac{\alpha\pi}{2}\Gamma(\alpha)\Gamma(2-\alpha), & \alpha\neq 0, \\ \frac{\pi}{4}, & \alpha=0. \end{cases}$$

4. *DÉMONSTRATION DES THÉORÈMES* 2 *ET* 3. (i) De (6) $\mapsto$ (5) pour $0<\alpha<2$. Soit $0<\delta<1<\Delta<\infty$ et posons $p=[\delta/x]$, $q=[1/x]$, $r=[\Delta/x]$. Alors on a

$$g(x) = \sum_{n=1}^{p} \lambda_n \sin nx + \sum_{n=r+1}^{\infty} \lambda_n \sin nx +$$

$$+ \sum_{n=p+1}^{r} \{\lambda_n - An^{-\alpha} L(n)\} \sin nx +$$

$$+ A \sum_{n=p+1}^{r} \{L(n)-L(q)\} n^{-\alpha} \sin nx +$$

$$-A\, L(q) \sum_{n=1}^{p} n^{-\alpha} \sin nx - A\, L(q) \sum_{n=r+1}^{\infty} n^{-\alpha} \sin nx +$$

$$+ A\, L(q) \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} \sin nx =$$

$$= \Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3+\Sigma_4+\Sigma_5+\Sigma_6+\Sigma_7.$$

En tenant compte de

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} \sin nx \sim \frac{\pi}{2\,\Gamma(\alpha)\sin\dfrac{\alpha\pi}{2}}\, x^{\alpha-1}, \quad x \to +0, \ 0 < \alpha < 2,$$

et de $L(q) \sim L(1/x)$, on trouve

$$\Sigma_7 \sim \frac{A\,\pi}{2\,\Gamma(\alpha)\sin\dfrac{\alpha\pi}{2}}\, x^{\alpha-1} L\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \to +0, \quad 0 < \alpha < 2.$$

Or, il faut montrer encore que

$$\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4, \Sigma_5, \Sigma_6 = o\left\{x^{\alpha-1} L\left(\frac{1}{x}\right)\right\}.$$

Posons $\lambda_n = n^{-\alpha} L(n)\,\overline{\lambda_n}$; donc, $\overline{\lambda_n} \to A$, $n \to \infty$. Pour un β, $\alpha < \beta < 2$, on a selon (iv)

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 &\leqslant x \sum_{n=1}^{p} n^{1-\alpha} L(n)\,\overline{\lambda_n} < M x \sum_{n=1}^{p} n^{1-\alpha} L(n) \leqslant \\
&< Mx \cdot \max_{1 \leqq n \leqq p} \{n^{\beta-\alpha} L(n)\} \cdot \sum_{n=1}^{p} n^{1-\beta} \leqslant \\
&< Mx \cdot p^{\beta-\alpha}\,\overline{L_1}(p)\, p^{2-\beta} < \\
&< Mx\, p^{2-\alpha} L(p).
\end{aligned}$$

Donc, d'après (i),

$$\frac{x^{1-\alpha}}{L(q)}\,\Sigma_1 < M(xp)^{2-\alpha}\,\frac{L(p)}{L(q)} \to M\delta^{2-\alpha}, \quad x \to +0,$$

et, du fait que δ peut être choisi arbitrairement petit, il résulte

$$\Sigma_1 = o\left\{x^{\alpha-1} L\left(\frac{1}{x}\right)\right\}.$$

Par une transformation abelienne on trouve

$$|\Sigma_2| \leqslant \frac{1}{\sin x/2}\left\{\lambda_r + \sum_{n=r}^{n} |\lambda_n - \lambda_{n+1}|\right\},$$

d'où, en tenant compte de $\lambda_n \downarrow$, il s'ensuit

$$|\Sigma_2 \leqslant \frac{2}{\sin x/2} \lambda_r \leqslant \frac{\pi}{x} \lambda_r .$$

Donc,

$$\frac{x^{1-\alpha}}{L(q)} |\Sigma_2 \leqslant \pi (xr)^{-\alpha} \frac{L(r)}{L(q)} \frac{\lambda_r}{r^{-\alpha} L(r)} \to \pi \Delta^{-\alpha}, \; x \to +0,$$

c. à. d.

$$\Sigma_2 = o \left\{ x^{\alpha-1} L\left(\frac{1}{x}\right) \right\},$$

car Δ peut être choisi arbitrairement grand.

Si l'on pose, pour abréger,

$$\varepsilon(p) = \operatorname*{Max}_{p \leqq n < \infty} |\overline{\lambda}_n - A|,$$

on a

$$|\Sigma_3| \leqslant \sum_{n=p+1}^{r} |\overline{\lambda}_n - A| \, n^{-\alpha} L(n) \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon(p) \operatorname*{Max}_{p+1 \leqq n \leqq r} \{ n^{-\alpha/2} L(n) \} \int_p^r t^{-\alpha/2} dt \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon(p) \operatorname*{Max}_{p \leqq n < \infty} \{ n^{-\alpha/2} L(n) \} \frac{r^{1-\alpha/2} - p^{1-\alpha/2}}{1 - \alpha/2} <$$

$$< \varepsilon(p) \, p^{-\alpha/2} \overline{L}_2(p) \frac{r^{1-\alpha/2}}{1-\alpha/2} <$$

$$< M p^{-\alpha/2} r^{1-\alpha\,2} L(p) \, \varepsilon(p),$$

ce qui donne

$$\frac{x^{1-\alpha}}{L(q)} |\Sigma_3| < M (px)^{-\alpha/2} (rx)^{1-\alpha/2} \frac{L(p)}{L(q)} \varepsilon(p) \to 0, \; x \to +0,$$

car $\varepsilon(p) \to 0$. Donc, $\Sigma_3 = o\{ x^{\alpha-1} L(1/x) \}$.

Posons

$$\eta(x) = \operatorname*{Max}_{p+1 \leqslant n \leqslant r} \left| \frac{L(n)}{L(q)} - 1 \right|.$$

Alors on a

$$|\Sigma_4| \leqslant A\, L(q)\, \eta(x) \sum_{n=p+1}^{r} n^{-\alpha} <$$

$$< A\, L(q)\, \eta(x) \int_p^r t^{-\alpha}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} M\, r^{1-\alpha} L(q)\, \eta(x), & \alpha \neq 1, \\ A \log \dfrac{r}{p}\, L(q)\, \eta(x), & \alpha = 1, \end{cases}$$

c. à. d.

$$\frac{x^{1-\alpha}}{L(q)} |\Sigma_4| \leqslant \left.\begin{cases} M\,(xr)^{1-\alpha}\, \eta(x) \\ A \log \dfrac{r}{p} \cdot \eta(x) \end{cases}\right\} \to 0,\ x \to +0, \quad \begin{matrix} \alpha \neq 1, \\ \alpha = 1, \end{matrix}$$

car, d'après (i), $\eta(x) \to 0$. Donc, $\Sigma_4 = o\{x^{\alpha-1} L(1/x)\}$.

Les sommes dans Σ_5 et Σ_6 sont du même type que Σ_1 respectivement Σ_2, avec $L(n) \equiv 1$ et $\bar{\lambda}_n \equiv 1$; elles sont, donc, $o(x^{\alpha-1})$. De là résulte

$$\Sigma_5,\, \Sigma_6 = L(q)\, o(x^{\alpha-1}) = o\{x^{\alpha-1} L(1/x)\}.$$

Dans la démonstration de cette partie du théorème 1 on utilise la monotonie des coefficients λ_n seulement dans l'estimation de la somme Σ_2. Pour $1 < \alpha < 2$ cette hypothèse est superflue, car pour un β, $0 < \beta < \alpha - 1$, on a

$$|\Sigma_2| \leqslant \sum_{n=r}^{\infty} n^{-\alpha} L(n)\, \bar{\lambda}_n <$$

$$< M \sum_{n=r}^{\infty} n^{-\beta} L(n) \cdot n^{\beta-\alpha} \leqslant$$

$$< M \operatorname*{Max}_{r \leqq n < \infty} \{n^{-\beta} L(n)\} \cdot \sum_{n=r}^{\infty} n^{\beta-\alpha} \leqslant$$

$$< M\, r^{-\beta}\, \bar{L}_2(r)\, r^{\beta-\alpha+1} \leqslant$$

$$< M\, r^{1-\alpha}\, L(r).$$

Donc,

$$\frac{x^{1-\alpha}}{L(1/x)}\,|\Sigma_2| \leqslant M(xr)^{1-\alpha}\,\frac{L(r)}{L(1/x)} \to M\,\Delta^{1-\alpha}, \quad x \to +0.$$

Or, étant donné que $\alpha > 1$, on trouve, en choisissant Δ arbitrairement grand,

$$\Sigma_2 = o\left\{x^{\alpha-1}\,L\left(\frac{1}{x}\right)\right\}.$$

Cette circonstance justifie la remarque donnée après l'énoncé du théorème 1.

(ii) De (5) $\to$ (6) pour $o \leqslant \alpha < 2$. Nous allons montrer d'abord que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,\lambda_n\,r^n \sim A\,\Gamma(2-\alpha)\,(1-r)^{\alpha-2}\,L\left(\frac{1}{1-r}\right), \quad r \to 1-0. \tag{12}$$

De $\lambda_n > 0$, en vertu d'un théorème de Karamata [11], résulte pour $\alpha < 2$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu\,\lambda_\nu \sim \frac{A}{2-\alpha}\,n^{2-\alpha}\,L(n), \; n \to \infty.$$

Finalement, d'après le lemme 1, en y posant $c_n = n\,\lambda_n$ $(k=1)$, de la monotonie de la suite λ_n et $\alpha < 2$ il s'ensuit

$$\lambda_n \sim A\,n^{-\alpha}\,L(n), \quad n \to \infty,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Il nous reste donc à démontrer la relation (12). Dans ce but remarquons que, sous les hypothèses faites ($\lambda_n \downarrow 0$ et (5)), on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,\lambda_n\,r^n = \frac{2r}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{(1-r^2)\sin x}{(1-2r\cos x + r^2)^2}\,g(x)\,dx, \quad 0 < r < 1. \tag{13}$$

En effet, si l'on multiplie l'identité

$$\frac{r\,(1-r^2)\sin x}{(1-2r\cos x + r^2)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n\,r^n \sin n\,x, \quad 0 < r < 1,$$

par $\dfrac{2}{\pi}\,g(x)$, le premier membre sera intégrable dans $(0, \pi)$, compte tenu de (5) et de la propriété (iii). D'autre part, on peut intégrer terme à terme la série $\Sigma\, nr^n\, g(x) \sin nx$, car

$$\int_0^\pi \Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} |n\, r^n\, g(x) \sin n\, x| \Big\} dx \leqslant \int_0^\pi x\, g(x)\, dx \cdot \sum_1^\infty n^2 r^n < \infty .$$

Donc,

$$\frac{2r}{\pi} \int_0^\pi \frac{(1-r^2)\sin x}{(1-2r\cos x + r^2)^2}\, g(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} n\, r^n \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g(x) \sin nx\, dx, \tag{14}$$

d'où, en tenant compte de (9), résulte (13).

Posons pour abréger

$$A(\alpha) = \frac{A\,\pi}{2\,\Gamma(\alpha) \sin \dfrac{\alpha\pi}{2}} \quad \text{et} \quad g(x) = x^{\alpha-1} L\left(\frac{1}{x}\right) \bar{g}(x).$$

D'après la formule (13), on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, \lambda_n\, r^n = \frac{2}{\pi} r(1-r^2) \int_0^\pi x^{\alpha-1} (1-2r\cos x + r^2)^{-2} \sin x\, L\left(\frac{1}{x}\right) \bar{g}(x)\, dx =$$

$$= \frac{2}{\pi} r(1-r^2) \int_0^\pi x^\alpha \{(1-r)^2 + x^2\}^{-2} L\left(\frac{1}{x}\right) \bar{g}(x)\, dx +$$

$$+ \frac{2}{\pi} r(1-r^2) \int_0^\pi K(r,x)\, x^{\alpha-1} L\left(\frac{1}{x}\right) \bar{g}(x)\, dx =$$

$$= J_1(r) + J_2(r),$$

avec

$$K(r,x) = \frac{\sin x}{(1-2r\cos x + r^2)^2} - \frac{x}{\{(1-r)^2 + x^2\}^2}.$$

Pour évaluer l'intégrale $J_1(r)$ lorsque $r \to 1-0$, remarquons que $|g(x)| \leqslant M$ pour $0 \leqslant x \leqslant \pi$ et que, d'après (5), on a

$$|\bar{g}(x) - A(\alpha)| < \varepsilon \text{ pour } 0 \leqslant x \leqslant \delta < \pi.$$

Pour δ ainsi fixé, on a

$$\left| J_1(r) - \frac{2}{\pi} r(1-r^2) A(\alpha) \int_0^\delta x^\alpha \{(1-r)^2 + x^2\}^{-2} L\left(\frac{1}{x}\right) dx \right| =$$

$$= \frac{2}{\pi} r(1-r^2) \left| \int_0^\delta x^\alpha \{(1-r)^2 + x^2\}^{-2} L\left(\frac{1}{x}\right) \{\bar{g}(x) - A(\alpha)\} dx + \right.$$

$$\left. + \int_\delta^\pi x^\alpha \{(1-r)^2 + x^2\}^{-2} L\left(\frac{1}{x}\right) \bar{g}(x) dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4}{\pi}(1-r) \left\{ \varepsilon \int_0^\delta x^\alpha \{(1-r)^2 + x^2\}^{-2} L\left(\frac{1}{x}\right) dx + M \int_\delta^\pi x^{\alpha-4} L\left(\frac{1}{x}\right) dx \right\},$$

c. à. d.

$$J_1(r) = \left\{ \frac{4}{\pi} A(\alpha) + o(1) \right\} (1-r) \int_0^\delta x^\alpha \{(1-r)^2 + x^2\}^{-2} L\left(\frac{1}{x}\right) dx, \quad r \to 1-0.$$

D'après le lemme 3 on trouve

$$\int_0^\delta x^\alpha \{(1-r)^2 + x^2\}^{-2} L\left(\frac{1}{x}\right) dx = \{B(\alpha) + o(1)\} (1-r)^{\alpha-3} L\left(\frac{1}{1-r}\right), \quad r \to 1-0,$$

ce qui donne, en vertu des valeurs des constantes $A(\alpha)$ et $B(\alpha)$,

$$J_1(r) = \left\{ \frac{4}{\pi} A(\alpha) + o(1) \right\} \{B(\alpha) + o(1)\} (1-r)^{\alpha-2} L\left(\frac{1}{1-r}\right) =$$

$$= \{A\,\Gamma(2-\alpha) + o(1)\} (1-r)^{\alpha-2} L\left(\frac{1}{1-r}\right), \quad r \to 1-0.$$

Enfin, il faut évaluer l'intégrale $J_2(r)$ lorsque $r \to 1-0$. Pour $0 \leqslant x \leqslant \pi$ on a $|\bar{g}(x)| \leqslant M$ ce qui donne, d'après le lemme 2,

$$|J_2(r)| \leqslant \frac{4r}{\pi}(1-r) \int_0^\pi |K(r,x)|\, x^{\alpha-1} L\left(\frac{1}{x}\right) |\bar{g}(x)|\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4M\pi}{r}(1-r)^2\int_0^\pi x^\alpha\{(1-r)^2+x^2\}^{-2}L\left(\frac{1}{x}\right)dx+$$

$$+\frac{4M\pi}{r}(1-r)\int_0^\pi x^{\alpha+4}\{(1-r)^2+x^2\}^{-2}L\left(\frac{1}{x}\right)dx.$$

Or, d'après le lemme 3, on a

$$\int_0^\pi x^\alpha\{(1-r)^2+x^2\}^{-2}L\left(\frac{1}{x}\right)dx=\{B(\alpha)+o(1)\}(1-r)^{\alpha-3}L\left(\frac{1}{1-r}\right)=$$

$$=O(1)(1-r)^{\alpha-3}L\left(\frac{1}{1-r}\right),\quad r\to 1-0,$$

et d'autre part

$$\int_0^\pi x^{\alpha+4}\{(1-r)^2+x^2\}^{-2}L\left(\frac{1}{x}\right)dx\leqslant\int_0^\pi x^\alpha L\left(\frac{1}{x}\right)dx=O(1),\quad r\to 1-0,$$

d'où finalement

$$J_2(r)=(1-r)^{\alpha-1}L\left(\frac{1}{1-r}\right)O(1)+(1-r)\,O(1)=$$

$$=(1-r)^{\alpha-1}L\left(\frac{1}{1-r}\right)\cdot o(1),\quad r\to 1-0,$$

ce qu'il fallait démontrer.

5. *DÉMONSTRATION DU THÉORÈME* 2. Soit $0<\delta<1$ et posons $p=[\delta/x]$, $q=[\pi/2x]$. Alors

$$g(x)=\sum_{n=1}^{p-1}\lambda_n\sin nx+\sum_{n=q+1}^{\infty}\lambda_n\sin nx+\sum_{n=p}^{q}\{\lambda_n-AL(n)\}\sin nx+$$

$$+A\sum_{n=p}^{q}\{L(n)-L(q)\}\sin nx+AL(q)\sum_{n=p}^{q}\sin nx=$$

$$=\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3+\Sigma_4+\Sigma_5.$$

Le comportement asymptotique de $g(x)$ est donné par Σ_5. En effet,

$$x\sum_{n=p}^{q}\sin nx-1=\frac{\cos(p-{}^1/_2)x-\cos(q-{}^1/_2)x}{\frac{2}{x}\sin\frac{x}{2}}-1\to\cos\delta-1,\quad x\to+0,$$

et comme δ peut être choisi arbitrairement petit et $L(q)\sim L(1/x)$, il résulte

$$\Sigma_5\sim A\frac{1}{x}L\left(\frac{1}{x}\right),\quad x\to+0.$$

Nous allons démontrer que

$$\Sigma_1,\Sigma_2,\Sigma_3,\Sigma_4=o\left\{\frac{1}{x}L\left(\frac{1}{x}\right)\right\}.$$

Posons $\lambda_n=L(n)\bar\lambda_n$; alors $|\bar\lambda_n|<M$. Pour $0<\eta<1$ on a, en tenant compte de (iv),

$$\begin{aligned}\Sigma_1&\leqslant M\sum_{n=1}^{p}L(n)\leqslant\\&\leqslant M\max_{1\leqq n\leqq p}\{n^\eta L(n)\}\cdot\sum_{n=1}^{p}n^{-\eta}\leqslant\\&\leqslant Mp^\eta\bar L_1(p)\int_0^p t^{-\eta}\,dt=\\&\leqslant\frac{M}{1-\eta}\,p\bar L(p).\end{aligned}$$

À cause de (iv), on a ensuite

$$\Sigma_1\leqslant M(n)\frac{\delta}{x}L\left(\frac{1}{x}\right),\tag{15}$$

ce qui donne avec δ arbitrairement petit

$$\Sigma_1=o\left\{\frac{1}{x}L\left(\frac{1}{x}\right)\right\},\ x\to+0.$$

L'hypothèse sur la convexité des coefficients λ_n n'est utilisée que dans l'éstimation de Σ_2. D'abord on a

$$\Sigma_2 = \cos qx \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{q+n} \sin nx + \sin qx \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{q+n} \cos nx =$$

$$= \Sigma_2^* + \Sigma_2^{**} .$$

Par une transformation abelienne on trouve

$$|\Sigma_2^*| \leqslant \frac{\operatorname{osc} qx}{\sin x/2} \lambda_{q+1} \leqslant \frac{x}{\sin x/2} \frac{\lambda_q}{L(q)} \cos qx \cdot \frac{1}{x} L(q),$$

c. à. d.

$$\Sigma_2^* = o\left\{\frac{1}{x} L\left(\frac{1}{x}\right)\right\}, \quad x \to 0, \tag{16}$$

car $\cos qx = o(1)$. D'autre part, une double transformation d'Abel, en vertu de la convexité des coefficients λ_n, nous donne

$$|\Sigma_2^{**}| \leqslant \frac{\sin qx}{4 \sin^2 x/2} (\lambda_q - \lambda_{q+1}).$$

Posons $s = [q/2]$. A cause de la convexité, on a, d'une part,

$$\lambda_s - \lambda_q = (\lambda_s - \lambda_{s+1}) + (\lambda_{s+1} - \lambda_{s+2}) + \ldots + (\lambda_{q-1} - \lambda_q) \geqslant$$

$$\geqslant (q - s)(\lambda_{q-1} - \lambda_q) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{q}{2} (\lambda_{q-1} - \lambda_q),$$

et, d'autre part, selon (7) et en vertu de (i),

$$\lambda_s - \lambda_q = AL(q\left\{\frac{L(s)}{L(q)} - 1\right\} + o\{L(q)\} = o\{L(q)\},$$

c.à.d.

$$\lambda_q - \lambda_{q+1} = o\left\{\frac{1}{q} L(q)\right\}.$$

Or, ceci montre que

$$\left|\Sigma_2^{**}\right| \leqslant \sin qx \, . \, \frac{x^2}{4\sin^2 x/2} \, . \, \frac{1}{x^2} \, o\left\{\frac{1}{q} L\,(q)\right\},$$

c. à. d. $\Sigma_2^{**} = o\,\{x^{-1} L\,(x^{-1})\}$. En tenant compte de (16), il résulte

$$\Sigma_2 = o\left\{\frac{1}{x} L\left(\frac{1}{x}\right)\right\}, \quad x \to +0.$$

En posant

$$\varepsilon\,(x) = \max_{p \leqq n \leqq q} |\bar{\lambda}_n - A\,|,$$

on trouve pour la somme Σ_3

$$|\,\Sigma_3\,| = \left|\sum_{n=p}^{q} (\bar{\lambda}_n - A)\, L\,(n) \sin nx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon\,(x) \sum_{n=p}^{q} L\,(n) < \varepsilon\,(x) \sum_{n=1}^{q} L\,(n),$$

et par une estimation semblable à celle qui conduit à la formule (15) il s'ensuit

$$|\,\Sigma_3\,| \leqslant M\,(\eta)\, \frac{\pi}{2x}\, L\left(\frac{1}{x}\right) \varepsilon\,(x).$$

Donc,

$$\Sigma_3 = o\left\{\frac{1}{x}\, L\left(\frac{1}{x}\right)\right\}, \quad x \to +0,$$

car, d'après (7), $\varepsilon\,(x) \to 0, \quad x \to +0$.

Finalement, on a

$$|\,\Sigma_4\,| \leqslant A \max_{p \leqq n \leqq q} \left|\frac{L\,(n)}{L\,(q)} - 1\right| \cdot q\, L\,(q),$$

c. à. d.

$$\Sigma_4 = o\left\{\frac{1}{x}\, L\left(\frac{1}{x}\right)\right\}, \quad x \to +0,$$

car, d'après (i),

$$\max_{p \leqq n \leqq q} \left|\frac{L\,(n)}{L\,(q)} - 1\right| \to 0, \quad x \to +0.$$

(Reçu le 11 Juillet 1956)

BIBLIOGRAPHIE

[1] Aljančić, S., Bojanić, R. et Tomić, M. — Sur la valeur asymptotique d'une classe des intégrales définies, *Publ. Inst. Math. Ac. Serbe Sc.* **7** (1954), 81—84.

[2] ——————— Deux théorèmes relatifs au comportement asymptotique des séries trigonométriques, *Zbornik radova Matematičkog instituta SAN* **4** (1955), 15—26 (en serbe, résumé en français).

[3] Chaundy, T. W. and Jolliffe, A. E. — The uniform convergence of a certain class of trigonometrical series, *Proc. London Math. Soc.* (2) **15** (1916), 214—216.

[4] Hardy, G. H. — A theorem concerning trigonometrical series, *Journal London Math. Soc.* **3** (1928), 12—13.

[5] ——————— Some theorems concerning trigonometrical series, *Proc. London Math. Soc.* **32** (1931), 441—8.

[6] Hardy, G. H. and Rogisinski, W. W. — Notes on Fourier series (I). On sine series with positive coefficients, *Journal London Math. Soc.* **18** (1943), 50.

[7] Hartman, P. and Wintner, A. — On sine series with monotone coefficients, *Journal London Math. Soc.* **28** (1953), 102—4.

[8] Heywood, P. — A note on a theorem of Hardy on trigonometrical series, *Journal London Math. Soc.* **29** (1954), 373—8.

[9] Jolliffe, A. E. — On certain trigonometrical series which have a necessary and sufficient condition for uniform convergence, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **19** (1921), 191—5.

[10] Karamata, J. — Sur un mode de croissance régulière, *Bull. de Soc. Math. de France* **61** (1933), 55—62.

[11] ——————— Neuer Beweis und Verallgemeinerung einiger Tauberian-Sätze, *Math. Z.* **33** (1931), 294—9.

[12] ——————— Bemerkung über die vorstehende Arbeit des Herrn Avakumović, mit näherer Betrachtung einer Klasse von Funktionen, welche bei den Inversionssätzen vorkommen, *Bull. Int. de l'Acad. Yougoslave* **29** et **30** (1936), 117—123.

[13] Salem, R. — Détermination de l'ordre de grandeur à l'origine de certaines séries trigonométriques, *Comptes Rendus* **185** (1928), 1804—1806.

[14] Zygmund, A. — Trigonometrical series, *Monografje Matematyczne*, Warszawa 1935.