

Über einen Taubersatz für Faltungen

Von

R. BOJANIĆ, W. JURKAT und A. PEYERIMHOFF

Von Herrn ERDÖS wurde kürzlich [3] die Frage aufgeworfen nach Aussagen über die Größenordnung von Folgen $\{s_n\}$ mit den Eigenschaften

$$(1) \quad \sum_{\nu=0}^n s_{n-\nu} a_\nu = \frac{n^2}{2} + O(n) \quad \left(s_n = \sum_{\nu=0}^n a_\nu \right)$$

und

$$(2) \quad a_n \geq 0.$$

Herr ERDÖS zeigt, daß stets $s_n = n + o(n)$ ist, während $s_n = n + o(\sqrt{n})$ nicht gefolgert werden kann.

Herr AVAKUMOVIĆ hat bewiesen [1], daß aus (1) und (2) die Beziehung $s_n = n + O(n^{\sqrt[3]{3}-1+\epsilon})$ folgt für jedes $\epsilon > 0$.

Wir werden im folgenden zeigen, daß sogar $s_n = n + O(n^{\frac{3}{5}}(\log n)^{\frac{1}{5}})$ aus (1) und (2) gefolgert werden kann. Es verlangt keine Mehrarbeit, dieses Ergebnis gleich in etwas allgemeinerer Form für STEILTJES-Integrale auszusprechen und zu beweisen.

§ 1. Es sei $A(t)$ eine Funktion mit den Eigenschaften

$$(3) \quad A(0) = 0, \quad A(t_2) \geq A(t_1) \quad \text{für } t_2 \geq t_1 \geq 0$$

und

$$A(t) = \frac{1}{2}(A(t+0) + A(t-0)) \quad \text{für alle } t > 0.$$

Das Integral $h(x) = \int_0^x A(x-t) dA(t)$ existiert für alle $x \geq 0$ mit eventueller Ausnahme einer abzählbaren Punktmenge und kann überall so festgesetzt werden, daß $h(x)$ eine monoton wachsende Funktion ist mit $h(0) = 0$, $h(x) = \frac{1}{2}(h(x+0) + h(x-0))$ für alle $x > 0$ (vgl. [4], theorem 11.2a, S. 84 und den Beweis auf S. 85). Für jede Funktion $A(t)$ mit der Eigenschaft (3) ist damit das Integral $\int_0^x A(x-t) dA(t)$ eindeutig erklärt. Wir verwenden bei unseren Überlegungen den folgenden einseitigen Konvexitätssatz.

Hilfssatz. Es sei $k > 0$ und $W(x)$ sei eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften:

$$(4) \quad \begin{cases} W(x) \text{ ist erklärt (und endlich) für } x \geq 0, \\ 0 < W(x_1) \leq W(x_2) \text{ für } 0 \leq x_1 \leq x_2, \\ \text{mit positiven Konstanten } C_1 \text{ und } C_2 \text{ ist } W(x') \leq C_1 W(x) \\ \text{für } 0 \leq x < x' \leq x + C_2 (W(x))^{1/(k+1)}. \end{cases}$$

Ist ferner $C(t)$ für $t \geq 0$ eine meßbare Funktion, die in jedem Intervall $0 \leq t \leq T$ beschränkt ist, so folgt aus

$$(5) \quad \int_0^x (x-t)^{k-1} C(t) dt = O(W(x)) \quad (x \rightarrow \infty)$$

und

$$(6) \quad \begin{cases} C(x+t) - C(x) \geq C_3(W(x))^{\frac{1}{k+1}}, & C(x) - C(x-t) \geq C_3(W(x))^{\frac{1}{k+1}} \\ (C_3 \text{ eine beliebige Konstante}) \text{ für alle } x \geq 0 \text{ und} \\ 0 < t \leq C_4(W(x))^{1/(k+1)} \quad (C(y) = 0 \text{ für } y < 0) \end{cases}$$

die Beziehung

$$(7) \quad C(x) = O(1) (W(x))^{\frac{1}{k+1}} \quad (x \rightarrow \infty).$$

Für einen Beweis vgl. [2], § 1.8, S. 23 (die Beweismethode bleibt bei den hier vorgenommenen Änderungen anwendbar). Im folgenden werden wir nur den Spezialfall $k=2$, $W(x) = x^2 \log x$ ($x \geq 2$) verwenden.

Es gilt nun der

Satz 1. *Ist $A(t)$ eine Funktion mit den Eigenschaften (3), so folgt aus*

$$(8) \quad h(x) = \int_0^x A(x-t) dA(t) = \frac{x^2}{2} + O(x) \quad (x \rightarrow \infty)$$

die Beziehung

$$(9) \quad A(x) = x + O(1) x^{\frac{3}{2}} (\log x)^{\frac{3}{2}} \quad (x \rightarrow \infty).$$

Wir zerlegen den Beweis in einzelne Teile.

1. Wegen (3) und (8) ist

$$A^2\left(\frac{x}{2}\right) \leq \int_0^{x/2} A(x-t) dA(t) \leq \int_0^x A(x-t) dA(t) = O(x^2) \quad (x \rightarrow \infty)$$

für alle x mit eventueller Ausnahme einer abzählbaren Punktmenge. Wegen (3) ist somit für alle x

$$(10) \quad A(x) = O(x) \quad (x \rightarrow \infty).$$

2. Wegen (3) und (10) ist $f(s) = \int_0^\infty e^{-st} dA(t)$ konvergent für $\Re s > 0$. Für $\Re s > 0$ ist also $f^2(s) = \int_0^\infty e^{-st} dh(t) = s \int_0^\infty e^{-st} h(t) dt$ (vgl. [4], theorem 11.7b, S. 91 und beachte, daß $h(0) = 0$ ist). Wegen (8) ist nun

$$(11) \quad f^2(s) = \frac{1}{s^2} \left(1 + g(s) \frac{s^3}{\sigma^2}\right) \quad \text{mit} \quad |g(s)| \leq K \quad \text{für} \quad 0 < \sigma = \Re s \leq 1.$$

3. Im folgenden sei stets $s = \sigma + it$. Für $\frac{|s|^3}{\sigma^2} < \frac{1}{2K}$ und $0 < \sigma \leq 1$ folgt aus (11) die Relation

$$(12) \quad f(s) = \frac{1}{s} \left(1 + g_1(s) \frac{s^3}{\sigma^2}\right) \quad \text{mit} \quad |g_1(s)| \leq K_1.$$

[Das Vorzeichen dieser Wurzel ergibt sich aus der Tatsache, daß $f(s) > 0$ ist für $s > 0$.]

Für $\frac{|s|^3}{\sigma^2} \geq \frac{1}{2K}$ und $0 < \sigma \leq 1$ folgt aus (11) die Abschätzung

$$(13) \quad |f(s)| \leq \frac{1}{|s|} \left(1 + |g(s)| \frac{|s|^3}{\sigma^2} \right)^{\frac{1}{2}} \leq K_2 \frac{|s|^{\frac{1}{2}}}{\sigma}.$$

4. Wegen (3) ($A(0) = 0$) ist $f(s) - \frac{1}{s} = s \int_0^{\infty} (A(t) - t) e^{-st} dt$ für $\sigma > 0$. Setzt man zur Abkürzung $B(t) = \int_0^t (t - \tau) (A(\tau) - \tau) d\tau$ und $\frac{1}{s^3} \left(f(s) - \frac{1}{s} \right) = \eta(s)$, so ist (vgl. [4], theorem 12.1 a, S. 91)

$$(14) \quad \eta(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} B(t) dt,$$

wobei dieses Integral absolut konvergent ist für $\sigma > 0$. Die Funktion $\eta(s)$ erfüllt für $0 < \sigma \leq 1$ die Beziehung

$$(15) \quad |\eta(s)| \leq \begin{cases} \frac{K_1}{|s| \sigma^2} & \text{für } |s|^3 < \frac{1}{2K} \sigma^2 \\ \frac{K_3}{|s|^{\frac{3}{2}} \sigma} & \text{für } |s|^3 \geq \frac{1}{2K} \sigma^2. \end{cases}$$

Die erste dieser Beziehungen folgt unmittelbar aus (12), die zweite aus (13) zusammen mit der aus $|s|^3 \geq \frac{1}{2K} \sigma^2$ folgenden Ungleichung $\frac{1}{|s|^4} \leq (2K)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sigma |s|^{\frac{3}{2}}}$.

5. Aus (14) folgt die Beziehung

$$(16) \quad B(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \eta(s) e^{xs} ds \quad (x > 0),$$

wobei das Integral wegen (15) absolut konvergiert für $c > 0$ (vgl. [4], theorem 7.3, S. 66). Mit $0 < \sigma = c \leq 1$ folgt aus (16) wegen (15) die Abschätzung

$$e^{-xc} |B(x)| \leq \frac{K_4}{c^2} \int_{|s|^3 \leq \frac{1}{2K} \sigma^2} \frac{dt}{|c + it|} + \frac{K_5}{c} \int_{|s|^3 \geq \frac{1}{2K} \sigma^2} \frac{dt}{|c + it|^{\frac{3}{2}}} = \text{I} + \text{II}.$$

Setzt man $c = \frac{1}{x}$, so ist für $x \rightarrow \infty$ und passende Konstanten $\varrho > 0$, $\delta > 0$,

$$\text{I} = O(x^2) \int_0^{x^{-1}} \frac{dt}{x^{-1}} + O(x^2) \int_{x^{-1}}^{\varrho x^{-\frac{2}{3}}} \frac{dt}{t} = O(x^2 \log x)$$

und

$$\text{II} = O(x) \int_{\delta x^{-\frac{2}{3}}}^{\infty} \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}} = O(x^2).$$

Zusammengefaßt ergibt sich also

$$(17) \quad B(x) = O(x^2 \log x) \quad (x \rightarrow \infty).$$

6. Setzen wir im Hilfssatz $k=2$, $W(x) = x^2 \log x$ ($x \geq 2$), $W(x) = 4 \log 2$ ($0 \leq x \leq 2$) [diese Funktion erfüllt die Bedingung (4)] und $C(t) = A(t) - t$, so ist (5) erfüllt wegen (17). Aus (3) folgen die Beziehungen $C(x+t) - C(x) \geq -t$, $C(x) - C(x-t) \geq -t$, so daß auch (6) erfüllt ist. Die Behauptung (7) des

Hilfssatzes ist nun gleichbedeutend mit der zu beweisenden Beziehung (9). Damit ist Satz 1 bewiesen.

Ist $\{a_\nu\}$ eine Folge nicht negativer Zahlen und setzen wir $A(0) = 0$, $A(x) = \sum_{\nu < x} a_\nu$ für $x \neq 0, 1, 2, \dots$, $A(n) = \frac{1}{2}(A(n+0) + A(n-0))$, so erfüllt diese Funktion die Bedingungen (3). Erfüllt $\{a_\nu\}$ noch die Bedingung (1), so genügt $A(x)$ den Voraussetzungen von Satz 1, denn es ist für $n < x < n+1$

$$h(x) = \int_0^x A(x-t) dA(t) = \sum_{\nu=0}^n s_{n-\nu} a_\nu = \frac{x^2}{2} + O(x) \quad (x \rightarrow \infty).$$

Als Anwendung von Satz 1 erhalten wir so den zu Anfang dieser Arbeit ausgesprochenen Sachverhalt.

Satz 2. Erfüllt eine Folge $\{a_n\}$ die Bedingungen (1) und (2), so ist $s_n = n + O(1) n^{\frac{1}{2}} (\log n)^{\frac{1}{2}} (n \rightarrow \infty)$.

§ 2. Man wird bei einer genauen Durchsicht des Beweises von Satz 1 feststellen, daß die Voraussetzung $A(t_1) \leq A(t_2)$ ($0 \leq t_1 \leq t_2$) im wesentlichen nur im Punkt 1 verwendet wird (d.h. bei der Feststellung der Konvergenz von $\int_0^\infty e^{-st} dA(t)$ für $\Re s > 0$), während etwa bei der Anwendung des Konvexitätssatzes die allgemeinere Voraussetzung $A(t_2) - A(t_1) \geq -K(t_2 - t_1 + 1)$ ($t_2 \geq t_1$) ausreichend gewesen wäre. So erhebt sich die Frage, ob Satz 1 unter dieser allgemeineren Voraussetzung noch richtig bleibt, wobei die Behauptung natürlich dahingehend zu erweitern ist, daß eine der beiden Möglichkeiten $A(x) = \pm x + O(1) x^{\frac{1}{2}} (\log x)^{\frac{1}{2}}$ eintritt. Das folgende Beispiel lehrt, daß dies nicht zutrifft. Wir zeigen, daß Satz 2 mit $a_n \geq -K$ statt (2) falsch wird.

Es sei $\{a_n\}$ erklärt durch $\sum a_n z^n = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{1-2z} \sqrt{1-5z}}{1-z}$. Setzt man

$$b_n = -\sum_{\nu=0}^n A_{n-\nu}^{-\frac{2}{3}} A_\nu^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{2}{5}\right)^\nu \quad \left(A_n^k = \binom{n+k}{n}\right),$$

so gilt

$$\begin{aligned} \frac{b_n}{A_n^{-\frac{2}{3}}} &= \frac{-1}{A_n^{-\frac{2}{3}}} \sum_{\nu < |n|} A_{n-\nu}^{-\frac{2}{3}} A_\nu^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{2}{5}\right)^\nu + O\left(\left(\frac{2}{5}\right)^{|n|} n^{\frac{2}{3}}\right) \\ &\rightarrow -\sum_{\nu=0}^\infty A_\nu^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{2}{5}\right)^\nu = -\sqrt{\frac{3}{5}} \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Wegen $a_n = \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^n 5^\nu b_\nu$ ist somit $a_n \geq C \frac{5^n}{n^{\frac{2}{3}}}$ für ein $C > 0$ und alle großen n , so daß $a_n \geq -K$ ist, während $s_n \cong \pm n$ nicht richtig ist. Mit der Abkürzung $t_n = \sum_{\nu=0}^n s_{n-\nu} a_\nu$ ist schließlich $\sum t_n z^n = \frac{1}{4} \cdot \frac{(1-2z)(1-5z)}{(1-z)^3}$, woraus sich sofort die Beziehung $t_n = \frac{n^2}{2} + O(n)$ ($n \rightarrow \infty$) ergibt.

Der Satz 1 bleibt aber richtig, wenn wir in (3) die Bedingung $A(t_1) \leq A(t_2)$ ($0 \leq t_1 \leq t_2$) ersetzen durch $A(t_2) - A(t_1) \geq -K(t_2 - t_1 + 1)$ ($0 \leq t_1 \leq t_2$)¹⁾ und

¹⁾ Außerdem ist stillschweigend vorausgesetzt, daß $A(t)$ von beschränkter Schwankung ist in jedem Intervall $0 \leq t \leq T$.

zusätzlich noch fordern, daß das Integral $\int_0^{\infty} e^{-st} dA(t)$ für $\Re s > 0$ konvergiert. Durch die Forderung $h(0) = 0$, $h(x) = \frac{1}{2}(h(x+0) + h(x-0))$ ($x > 0$) ist das Integral $h(x) = \int_0^x A(x-t) dA(t)$ für alle $x \geq 0$ in eindeutiger Weise erklärt (vgl. [4], S. 84), und es gilt die folgende Ergänzung zu Satz 1.

Satz 3. *Es sei $A(t)$ eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften¹⁾*

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} A(0) = 0, \quad A(t_2) - A(t_1) \geq -K(t_2 - t_1 + 1) \quad \text{bzw.} \\ A(t_2) - A(t_1) \leq K(t_2 - t_1 + 1) \quad \text{für } 0 \leq t_1 \leq t_2, \\ A(t) = \frac{1}{2}(A(t+0) + A(t-0)) \quad (t > 0). \end{array} \right.$$

Erfüllt $A(t)$ die Bedingungen (8) und

$$(19) \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\log |A(t)|}{t} \leq 0,$$

so gilt eine der Beziehungen

$$(20) \quad A(x) = \pm x + O(1) x^{\frac{3}{2}} (\log x)^{\frac{1}{2}} \quad (x \rightarrow \infty).$$

Der Beweis verläuft fast ebenso wie der Beweis von Satz 1. Der Schritt 1. fällt weg, die Existenz von $f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dA(t)$ für $\Re s > 0$ ergibt sich aus (19) und die Überlegungen von Schritt 2. bleiben ungeändert, insbesondere ist (11) richtig. Für $\frac{|s|^3}{\sigma^2} < \frac{1}{2K}$, $0 < \sigma \leq 1$ besitzt $f(s)$ wegen (11) keine Nullstellen, und wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $f(s) > 0$ ist für kleine $s > 0$ [beachte (18)]. Die folgenden Schritte des Beweises von Satz 1 bleiben ungeändert bis auf die Anwendung des Hilfssatzes in 6., wo aber unsere allgemeinere Voraussetzung (18) noch ausreicht, um die Behauptung (20) abzuleiten.

Im Spezialfall der Folgen ergibt sich aus Satz 3 eine Ergänzung zu Satz 2.

Satz 4. *Erfüllt eine Folge $\{a_n\}$ die Bedingung (1) und ist $a_n \geq -K$ (bzw. $a_n \leq K$) und $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq 1$, so ist $s_n = \pm n + O(1) n^{\frac{3}{2}} (\log n)^{\frac{1}{2}}$ ($n \rightarrow \infty$).*

Literatur

[1] AVAKUMOVIĆ, V. G.: A note on a question set by P. ERDÖS and L. K. HUA. Publ. Inst. math. Beograd **6**, 47—56 (1954). — [2] CHANDRASEKHARAN, K., and S. MINAKSHISUNDARAM: Typical means. Oxford 1952. — [3] ERDÖS, P.: Supplementary note. J. Ind. Math. Soc. **13**, 145—147 (1949). — [4] WIDDER, D. V.: The LAPLACE transform. Princeton 1946.

Trg. Republike 3|VI, Beograd (Jugoslavien)

Tübingen, Amselweg 18

Dept. of Math., Univ. of Cincinnati, Cincinnati, Ohio (USA)

(Eingegangen am 10. Oktober 1955)