ЗА n-АРНИТЕ ПОДПОЛУГРУПИ

Билтен ДМФ НРМ, Скопје, 12 (1961), 5–13

1. Дефиниции и резултати.

Нека $M(\cdot)$ е полугрупа, а Q подмножество од M. Ако $Q^{n+1} \subseteq Q$ велиме дека Q е n-арна подполугрупа од $M(\cdot)$. Во тој случај, Q се наречува n-арна подгрупа од $M(\cdot)$, ако при $a_1, a_2, \cdots a_{n+1} \in Q$ и $1 \leqslant i \leqslant n+1$ равенката

(1) $a_1 \cdots a_{i-1}\, x a_{i+1} \cdots a_{n+1} = a_i$

е еднозначно решлива во Q. n-арната подполугрупа (подгрупа) Q е комутативна, ако не е битен распоредот на факторите во производот $x_1 x_2 \cdots x_{n+1}$, при $x_\nu \in Q$. Лесно се проверува дека секоја n-арна подполугрупа (подгрупа) е и kn-арна подполугрупа (подгрупа); во специјален случај, секоја подполугрупа (подгрупа) е n-арна подполугрупа (подгрупа), за секое n.

Целта на оваа работа е докажувањето на следната

Теорема. Нека Q е n-арна подполугрупа од полугрупата $M(\cdot)$ (каде $n \geqslant 2$), и нека R е унија на сите подмножества $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ од Q, такви да, за секое $x \in Q$, се точни равенствата

(2) $x = e_1 x e_2 \cdots e_n = e_1 e_2 x e_3 \cdots e_n = \cdots = e_1 e_2 \cdots e_{n-1} x e_n$.

Ако множеството R не е празно, тогаш имаме:

1°: За било кои $x_1, x_2, \ldots, x_n \in Q$ и $e \in R$, точни се равенствата

(3) $e x_1 \cdots x_n = x_1 e x_2 \cdots x_n = \cdots = x_1 \cdots x_n e$.

2°: За секоја низа елементи $a_1, a_2, \ldots, a_{kn}$ од R и $b \in Q$, равенката

(4) $x a_1 a_2 \cdots a_{kn} = b$

е еднозначно решлива во Q.

3°: R е комутативна n-арна подгрупа од $M(\cdot)$.

4°: Ако Q е подполугрупа од $M(\cdot)$, тогаш таа содржи неутрален елемент. Во тој случај, R е комутативна подгрупа (со ист неутрален елемент, како и Q), а елементите од R се комутативни со тие од Q.

5°: Ако постои некоја двојка броеви i, j $(1 \leqslant i < j \leqslant n+1)$, такви да е точно равенството

(5) $x_1 \cdots x_{n+1} = x_1 \cdots x_{i-1} x_j x_{i+1} \cdots x_{j-1} x_i x_{j+1} \cdots x_{n+1}$,

за било кои $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \in Q$, тогаш Q е комутативна n-арна подполугрупа.

Точноста на теоремата може да се докаже директно, но сепак ќе изнесеме неколку помошни (поопшти) резултати, во врска со финитарните асоцијативни операции (покрај другото, и затоа што поимот n-арна подполугрупа е инспириран од таквите операции). Потоа со помош на тие резултати, ќе ја докажеме Теоремата. На крајот даваме и неколку забелешки, со цел да се добие подобар преглед на добиените резултати.

2. Асоцијативни структури со неутрални низи.

Нека Q е некое множество, и A нека е $(n+1)$-арна операција во тоа множество, т. е. со A секое подредено подмножество со $n+1$ члена (кои не мораат да бидат различни) од Q се пресликува во определен елемент од Q. Структурата што операцијата A ја изградува на множеството Q, ќе ја означуваме со $Q(A)$. Ако подредената $(n+1)$-орка $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ со операцијата A се пресликува во y, ќе пишуваме

(6) $y = A(x_1 x_2, \ldots, x_{n+1})$,

или, за пократко,

(6′) $y = x_1 x_2 \cdots x_{n+1}$.

За структурата $Q(A)$ велиме дека е (i, j)-асоцијативна ((i, j)-комутативна), ако, за било кои $x_1, x_2, \ldots, x_{2n} \in Q$, е точно равенството

(7) $x_1 \cdots x_{i-1}(x_i \cdots x_{i+n})\, x_{i+n+1} \cdots x_{2n} = x_1 \cdots x_{j-1}(x_j \cdots x_{j+n})\, x_{j+n+1} \cdots x_{2n}$

((8) $x_1 \cdots x_{n+1} = x_1 \cdots x_{i-1}\, x_j\, x_{i+1} \cdots x_{j-1}\, x_i\, x_{j+1} \cdots x_{n+1}$).

Јасно е дека секоја структура $Q(A)$ е (i, i)-асоцијативна и (i, i)-комутативна, ако $1 \leqslant i \leqslant n+1$. Затоа ќе претпоставуваме дека $1 \leqslant i < j \leqslant n+1$. Структурата $Q(A)$ е асоцијативна (комутативна), ако е (i, j)-асоцијативна ((i, j)-комутативна), за секоја двојка i, j.

Низата елементи $e_1, e_2, \ldots, e_n$ од Q е i-неутрална за структурата $Q(A)$, ако, за секое $x \in Q$, е точно равенството

(9) $x = e_1 \cdots e_{i-1}\, x e_i \cdots e_n$, каде $1 \leqslant i \leqslant n+1$.

Лема 1. Ако $Q(A)$ е $(1, 2)$-асоцијативна структура, тогаш секоја нејзина 2-неутрална низа е и $(n+1)$-неутрална.

Доказ. Нека низата $e_1, e_2, \ldots, e_n$ е 2-неутрална за $Q(A)$. Ако ја земеме предвид и $(1, 2)$-асоцијативноста на $Q(A)$, добиваме:

$$e_1 \cdots e_n\, x = e_1 (e_1 \cdots e_n\, x)\, e_2 \cdots e_n = (e_1 e_1 e_2 \cdots e_n)\, x e_2 \cdots e_n = e_1\, x e_2 \cdots e_n = x,$$

т. е. точноста на лемата.

На ист начин се покажува точноста и на следната

Лема 2. Ако структурата $Q(A)$ е $(n, n+1)$-асоцијативна, тогаш секоја нејзина n-неутрална низа е и 1-неутрална.

Лема 3. Ако $Q(A)$ е $(1, i)$ асоцијативна структура, а $e_1, e_2, \ldots, e_n$ е нејзина i-неутрална низа, тогаш (за секое $x \in Q$) е точно равенството

(10) $x e_1 \cdots e_n = x e_i \cdots e_n\, e_1 \cdots e_{i-1}$.

Доказ.

$$x e_1 \cdots e_n = (e_1 \cdots e_{i-1}\, x e_i \cdots e_n)\, e_1 \cdots e_n$$
$$= e_1 \cdots e_{i-1} (x e_i \cdots e_n\, e_1 \cdots e_{i-1})\, e_i \cdots e_n = x e_i \cdots e_n\, e_1 \cdots e_{i-1}.$$

Лема 4. Ако структурата $Q(A)$ е $(1, i)$ – асоцијативна и $(j, j+i-1)$ – асоцијативна (спрема тоа, $j+i \leqslant n+2$), а низата $e_1, e_2, \cdots, e_n$ е 1 – неутрална и i – неутрална за $Q(A)$, тогаш е точно равенството

(11) $x_1 \cdots x_{j-1}\, e_1 \cdots e_{i-1}\, x_j \cdots x_{n-i+2} = x_1 \cdots x_j\, e_1 \cdots e_{i-1}\, x_{j+1} \cdots x_{n-i+2}$,

за било кои $x_1, x_2, \cdots, x_{n-i+2} \in Q$.

Доказ. Спрема лемата 3, и претпоставката $e_1, e_2, \cdots, e_n$ да е 1 – неутрална низа, добиваме дека и низата $e_i, \cdots, e_n, e_1, \cdots, e_{i-1}$ е 1 – неутрална. Користејќи го и тоа, добиваме сега

$$x_1 \cdots x_{j-1}\, e_1 \cdots e_{i-1}\, x_j \cdots x_{n-i+2} =$$
$$= x_1 \cdots x_{j-1}\, e_1 \cdots e_{i-1} (x_j\, e_i \cdots e_n\, e_1 \cdots e_{i-1})\, x_{j+1} \cdots x_{n-i+2}$$
$$= x_1 \cdots x_{j-1} (e_1 \cdots e_{i-1}\, x_j\, e_i \cdots e_n)\, e_1 \cdots e_{i-1}\, x_{j+1} \cdots x_{n-i+2}$$
$$= x_1 \cdots x_j\, e_1 \cdots e_{i-1}\, x_{j+1} \cdots x_{n-i+2},$$

т. е. точноста на лемата.

Лема 5. Нека $Q(A)$ е $(1, n+1)$ – асоцијативна структура, за која низата $e_1, e_2, \cdots, e_n$ е i – неутрална, каде $2 \leqslant i \leqslant n$. Ако при тоа е точно равенството $f_1 \cdots f_n\, e_1 = e_1$ $(e_n f_1 \cdots f_n = e_n)$, тогаш низата $f_1, f_2, \cdots, f_n$ е $(n+1)$ — неутрална (1 – неутрална) за $Q(A)$.

Доказ. Нека $f_1 \cdots f_n\, e_1 = e_1$. Од тоа следува

$$f_1 \cdots f_n\, x = f_1 \cdots f_n (e_1 \cdots e_{i-1}\, x e_i \cdots e_n) = (f_1 \cdots f_n\, e_1)\, e_2 \cdots e_{i-1}\, x e_i \cdots e_n$$
$$= e_1 \cdots e_{i-1}\, x e_i \cdots e_n = x,$$

т. е. добиваме дека $f_1, f_2, \cdots, f_n$ е $(n+1)$ – неутрална низа.

Слично од $e_n f_1 \cdots f_n = e_n$, се добива дека низата $f_1, f_2, \cdots, f_n$ е 1 – неутрална.

Лема 6. Нека структурата $Q(A)$ е (i, j) - комутативна и $(j - i + 1, j + 1)$ – асоцијативна; спрема тоа, $j \leqslant n$. Ако постои барем една $(j - i)$ - неутрална низа за $Q(A)$, тогаш таа структура е $(i, j + 1)$ – комутативна.

Доказ. Нека низата $e_1, e_2, \cdots, e_n$ е $(j - i)$ - неутрална за $Q(A)$. Поради (i, j) – комутативноста и $(j - i + 1, j + 1)$ – асоцијативноста на $Q(A)$, добиваме

$$\begin{aligned}
x_1 \cdots x_{n+1} &= x_1 \cdots x_j (e_1 \cdots e_{j-i-1}\, x_{j+1}\, e_{j-i} \cdots e_n)\, x_{j+2} \cdots x_{n+1} \\
&= x_1 \cdots x_{j-i} (x_{j-i+1} \cdots x_j\, e_1 \cdots e_{j-i-1}\, x_{j+1}\, e_{j-i} \cdots e_{n-i})\, e_{n-i+1} \cdots e_n x_{j+2} \cdots x_{n+1} \\
&= x_1 \cdots x_{j-i} (x_{j-i+1} \cdots x_{j-1}\, x_{j+1}\, e_1 \cdots e_{j-i-1}\, x_j\, e_{j-i} \cdots e_{n-i})\, e_{n-i+1} \cdots e_n\, x_{j+2} \cdots x_{n+1} \\
&= x_1 \cdots x_{j-1}\, x_{j+1} (e_1 \cdots e_{j-i-1}\, x_j\, e_{j-i} \cdots e_n)\, x_{j+2} \cdots x_{n+1} \\
&= x_1 \cdots x_{j-1}\, x_{j+1}\, x_j\, x_{j+2} \cdots x_{n+1},
\end{aligned}$$

т. е. дека $Q(A)$ е $(j, j + 1)$ - комутативна. Од тоа што структурата $Q(A)$ е (i, j) – комутативна и $(j, j + 1)$ – комутативна, следува (непосредно) дека таа е и $(i, j+1)$ – комутативна, т. е. точноста на лемата.

На ист начин се докажува и следната

Лема 7. Нека структурата $Q(A)$ е (i, j) – комутативна и $(i - 1, n + i + 1 - j)$ — асоцијативна; спрема тоа, $i \geqslant 2$. Ако во $Q(A)$ постои барем една $(n - j + i)$ — неутрална низа, тогаш таа структура е $(i - 1, j)$ – комутативна.

3. Доказ на теоремата

Нека Q е n – арна подполугрупа од полугрупата $M(\cdot)$. Ако со $A(x_1\, x_2, \cdots, x_{n+1})$ го означиме производот на елементите $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$ во полугрупата $M(\cdot)$, јасно е дека $M(A)$ ќе биде асоцијативна структура, а таква структура е и $Q(A)$, поради $Q^{n+1} \subseteq Q$. Земајќи $E = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ да е низа елементи од Q, која ги задоволува равенствата (2), добиваме дека таа низа е i – неутрална за структурата $Q(A)$ при $2 \leqslant i \leqslant n$. Од лемите 1 и 2 следува дека таа низа е 1 – неутрална и $(n + 1)$ – неутрална.

Ако во лемата 4 ставиме последователно $j = 1, 2, \cdots, n - i + 2$, ќе добиеме дека (за било кои $x_1, x_2, \cdots, x_{n-i+2} \in Q$) се точни равенствата

$$(11)\quad e_1 \cdots e_{i-1}\, x_1 \cdots x_{n-i+2} = x_1\, e_1 \cdots e_{i-1}\, x_2 \cdots x_{n-i+2} = \cdots\cdot = x_1 \cdots x_{n-i+2}\, e_1 \cdots e_{i-1},$$

а, специјално за $i = 2$, и

$$(12)\quad e_1\, x_1 \cdots x_n = x_1\, e_1\, x_2 \cdots x_n = \cdots\cdot = x_1 \cdots x_n\, e_1.$$

Нека земеме сега $F = \{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ да е некоја пермутација од E и нека $1 \leqslant j \leqslant n + 1$. Ќе покажеме дека F е j – неутрална низа за $Q(A)$. Навистина, во производот $f_1 \cdots f_{j-1}\, x f_j \cdots f_n$ (спрема (11) или (12)) можеме факторот e_1 да го доведеме пред e_2; потоа $e_1 e_2$ (пак спрема (11)) го доведуваме пред e_3, и т. н. додека не добиеме

$$f_1 \cdots f_{j-1}\, x f_j \cdots f_n = x e_1 \cdots e_n = x,$$

т. е. дека низата F е j – неутрална. Од последното следува дека во E постои потполна симетрија, па спрема (12), добиваме дека равенките (2) се точни при $e \in E$.

Поради тоа што множеството R е унија на множества E од горниот вид, добиваме дека равенствата (2) се точни и при било кое $e \in R$. Со тоа го докажавме првиот дел на Теоремата.

Нека $a_1, a_2, \cdots, a_{kn} \in R$, и нека $E_\nu = \{e_{\nu 1}, e_{\nu 2}, \cdots, e_{\nu n}\}$ е подмножество од R во кое се содржи елементот a_ν и ги задоволува равенствата (2), ако наместо e_i се стави $e_{\nu i}$; спрема 1°, можеме да претпоставиме дека е точно равенството $a_\nu = e_{\nu 1}$. Ако b е било кој елемент од Q, ставајќи

$$(13)\quad x = b e_{12} \cdots e_{1n}\, e_{22} \cdots e_{2n} \cdots e_{kn\,2} \cdots e_{kn\,n}$$

добиваме

$$xa_1 a_2 \cdots a_{kn} = be_{11} e_{12} \cdots e_{1n} e_{21} e_{22} \cdots e_{2n} \cdots e_{kn\,1} e_{kn\,2} \cdots e_{kn\,n} = b.$$

Значи со (13) е определено едно решение на равенката (4). Обратно, ако x е било кое решение на (4), имаме

$$\begin{aligned} x &= xe_{11} e_{12} \cdots e_{1n} e_{21} e_{22} \cdots e_{2n} \cdots e_{kn\,1} e_{kn\,2} \cdots e_{kn\,n} \\ &= (xa_1 a_2 \cdots a_{kn}) e_{12} \cdots e_{1n} e_{22} \cdots e_{2n} \cdots e_{kn\,2} \cdots e_{kn\,n} \\ &= be_{12} \cdots e_{1n} e_{22} \cdots e_{2n} \cdots e_{kn\,2} \cdots e_{kn\,n}. \end{aligned}$$

Спрема тоа, елементот x определен со (13) е единственото решение на (4) што припаѓа на Q; дека $x \in Q$ следува од тоа што на десната страна од (13) има $1 + (n-1)kn$ фактори. Со тоа го докажавме вториот дел на Теоремата.

Нека $a_1, a_2, \cdots, a_{n+1} \in R$ и нека множествата E_ν се определени како и погоре. Ако ставиме $e_i = e_{1i} e_{2i} \cdots e_{n+1\,i}$, добиваме, едно подмножество од Q, $E = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$, а при тоа имаме $e_1 = a_1 a_2 \cdots a_{n+1}$, бидејќи и во овој случај земаме $a_\nu = e_{\nu 1}$. Освен тоа имаме

$$e_1 \cdots e_{j-1} xe_j \cdots e_n = xe_1 \cdots e_n = xe_{11} \cdots e_{1n} e_{21} \cdots e_{2n} \cdots e_{n+1\,1} \cdots e_{n+1\,n} = x,$$

за било кое $j : 1 \leqslant j \leqslant n+1$. Од тоа следува дека $E \subseteq R$, па значи и $e_1 = a_1 a_2 \cdots a_{n+1} \in R$, т. е. дека R е n – арна подполугрупа од $M(\cdot)$. Дека таа подполугрупа е комутативна, следува од 1°. Од (13) е јасно дека ако $b \in R$, тогаш и $x \in R$. спрема тоа, равенката

(14) $xa_2 a_3 \cdots a_{n+1} = a_1$

при $a_1, a_2, \cdots, a_{n+1} \in R$, е еднозначно решлива во R. Од тоа, поради комутативноста, следува дека R е n – арна подгрупа од $M(\cdot)$, т. е. точноста и на третиот дел од Теоремата.

Нека Q е подполугрупа од $M(\cdot)$. Поради

$$x = xe_1 e_2 \cdots e_n = e_1 e_2 \cdots e_n x,$$

елементот $e = e_1 e_2 \cdots e_n$ е неутрален за Q. Јасно е дека $e \in R$. Нека $a_1, a_2 \in R$ и нека множествата $E_1 = \{e_{11}, e_{12}, \cdots, e_{1n}\}$ и $E_2 = \{e_{21}, e_{22}, \cdots, e_{2n}\}$ се определени како и во предодните случаи. Ако $E = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$, каде $e_i = e_{1i} e_{2i}$, добиваме

$$e_1 \cdots e_{j-1} xe_j \cdots e_n = xe_{11} \cdots e_{1n} e_{21} \cdots e_{2n} = x,$$

од што следува дека $E \subseteq R$, па значи и $e_1 = a_1 a_2 \in R$. Значи R е подполугрупа од $M(\cdot)$. Дека R е и подгрупа следува од тоа што $e_1^{-1} = e_{12} e_{13} \cdots e_{1n} \in R$. Ако x е било кој елемент од Q, имаме

$$a_1 x = a_1 xe_{12} e_{13} \cdots e_{1n} e_{11}) = (e_{11} xe_{12} \cdots e_{1n}) a_1 = xa_1,$$

каде зедовме $a_1 = e_{11}$. Со тоа го докажавме четвртиот дел на Теоремата.

Нека претпоставиме сега дека е точно равенството (5). Од тоа следува дека структурата $Q(A)$ е (i, j) – комутативна. Од тоа што R не е празно множество и асоцијативноста на структурата, спрема лемата 6, следува дека $Q(A)$ е (i, r) – комутативна, при $j \leqslant r \leqslant n+1$; од исти причини, спрема лемата 7, се добива дека $Q(A)$ е (s, r) – комутативна при било кои s, r т. е. дека таа структура е комутативна. Јасно е пак дека во тој случај Q е комутативна n – арна подполугрупа.

Со тоа точноста на Теоремата е докажана.

Со помош на докажаната теорема, лесно се верифицира точноста и на следното

Следствие. Нека Q и R се определени како и во Теоремата и нека подмножеството S од Q е m – арна подполугрупа. Во тој случај се точни пропозициите 1′ и 2′, кои се добиваат од 1° и 2°, ако во нив наместо n и Q се стави m и S, респективно.

4. Неколку забелешки

4.1. Со еден пример ќе покажеме дека равенствата (2) се независни меѓу себе и дека ниедно од нив не може да биде заменето со следните две равенства

(15) $x = xe_1 \cdots e_n = e_1 \cdots e_n x,$

поправо дека ниедно од равенствата (12) не е следствие од преостанатите проширени со равенствата (15).

Нека $M(\cdot)$ е некомутативна група и нека a не припаѓа на центарот од таа група. Ако ставиме $e_i = e$ (e е неутралниот елемент на групата) за $i \neq j-1, j$, (при тоа $2 \leqslant j \leqslant n$), а $e_{j-1} = a$, $e_j = a^{-1}$, ќе добиеме дека се точни равенствата (15) и сите равенства од (2), освен равенството

$e_1 \cdots e_{j-1} x e_j \cdots e_n = x.$

4.2. Познато е дека секоја комутативна структура $Q(A)$ што е (i, j) – асоцијативна, за некоја двојка $i \neq j$, е и асоцијативна, ([1], стр. 6). Обратно, ако структурата $Q(A)$ е асоцијативна и ако постои некоја низа $e_1, e_2, \cdots, e_n$ која е r – неутрална за $1 \leqslant r \leqslant n+1$. тогаш од (i, j) – комутативноста на таа структура, за некоја двојка $i \neq j$, следува и нејзината комутативност; тоа се добива како следствие од лемите 6 и 7. Дека егзистенцијата на неутралната низа е битна, следува од тоа што (на пример) структурата $Q(A)$ определена со $x_1 x_2 \cdots x_{n+1} = x_{n+1}$ е асоцијативна и (i, j) – комутативна за $1 \leqslant i \leqslant j < n+1$, но таа не е $(i, n+1)$ – комутативна, за $i < n+1$,

4.3. Во обичај е за една асоцијативна структура $Q(A)$ да се вели дека е n – арна полугрупа; при тоа, како и досега, сметаме дека A е $(n+1)$ – арна операција. Поимот n – арна група се воведува на ист начин како и за n – арна подгрупа од дадена полугрупа. (Да се види, на пример [2] или [3]). Теоремата од оваа работа ќе биде точна и во случај да се формулира „поопшто“ во термини на n – арни полугрупи. Тоа обопштување не е битно, бидејќи секоја n – арна полугрупа (група) $Q(A)$ може да се вметне во некоја полугрупа (група) $M(\cdot)$, така да $A(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1})$ е обичен производ на елементи во таа полугрупа (група), а при тоа Q е n – арна подполугрупа (подгрупа) од $M(\cdot)$ ([2], стр. 493).

4.4. Ако се земе предвид и 4.3, јасно е дека основниот резултат на работата [5] (Теорема 1.1, стр. 6), е специјален случај од Теоремата докажана во оваа работа; додуша, обопштението на делот 5° од споменатата теорема на работата [5], не е експлицитно формулирано, но тоа лесно се добива од лемата 5 на оваа работа. Исто така, резултатот од работата [4] (кој се наведува и во работата [5], како Теорема 1.3) е специјален случај на четвртиот дел од Теоремата што ја докажавме.

4.5. Јасно е дека со изучување на една n-арна подполугрупа од дадена полугрупа (како што е направено во оваа работа), не се добива увид во структурата на полугрупата. За да се изучат особините на полугрупата, преку нејзините n – арни подполугрупи, нужно е да се работи со побогата фамилија од такви подполугрупи.

ЛИТЕРАТУРА

[1] G. B. Preston, The arithmetic of a lattice of sub-algebras of a general algebra, Journ. Lond. Math. Soc. 29 (1954), 1 — 15.

[2] H. A. Thurston, Some properties of partly-associative operations, Proc. Amer. Math. Soc. 5 (1954), 487 — 497.

[3] D. W. Robinson, n-Groups with Identity Elements, Math. mag., 31 (1958) 255—257.

[4] S. P. Franklin and J. W. Lindsay, Straddles od Semigroups, Math. mag. 34 (1960) 269—270.

[5] Ѓ. Чупона, За тернарните асоцијативни операции, Билтен ДМФ Макед., 9 (1958), 5—10.

On n-Subsemigroups

Summary

Let S be a semigroup and Q a subset of S such that $Q^{n+1} \subseteq Q$. Then we say that Q is an *n-subsemigroup* of S. In this case, Q is an *n-subgroop* too, if the equation $a_1 \cdots a_{i-1} x a_{i+1} \cdots a_{n+1} = a_i$ is *uniquely solvable* in Q for every $a_1, a_2, \cdots, a_{n+1} \in Q$ and $1 \leqslant i \leqslant n+1$. Let φ be a permutation of the sequence $1, 2, \cdot\cdot, n+1$. The n-subsemigroup Q is *commutative* if $x_1 x_2 \cdot\cdot x_{n+1} = x_{1\varphi} x_{2\varphi} \cdots x_{(n+1)\varphi}$, for every $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1} \in S$ and every permutation φ. It can be easily shown that a n-subsemigroup (subgroup) is also a (kn) - subsemigroup (subgroup).

The main result of this paper is the following.

Theorem. *Let Q be an n-subsemigroup of the semigroup S $(n \geqslant 2)$ and let $R \subseteq Q$ be the union of the all sequences $E = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$*[1]) *which satisfy the following equations*

(1) $x = e_1 x e_2 \cdots e_n = e_1 e_2 x e_3 \cdots e_n = e_1 \cdots e_{n-1} x e_n$,

for every $x \in Q$. If the set R is non-empty then we have:

1°: *For every $x_1, x_2, \cdots, x_{kn} \in Q$ and $e \in R$, the following equations are satisfied.*

(2) $e x_1 x_2 \cdots x_{kn} = x_1 e x_2 \cdots x_{kn} = \cdots = x_1 \cdots x_{kn} e$.

2°: *For every $a_1, a_2, \cdots, a_{kn} \in R$ and $b \in Q$, the equation*

(3) $x a_1 a_2 \cdots a_{kn} = b$

is uniquely solvable in Q.

3°; *R is a commutative n-subgroup of S.*

4°: *If Q is a subsemigroup (i. e. a 1-subsemigroup) of S, then R is a commutative subgroup of S, and then $rq = qr$, for $r \in R$, $q \in Q$.*

5°: *If we have*

(4) $x_1 \cdots x_{n+1} = x_1 \cdots x_{i-1} x_j x_{i+1} \cdots x_{j-1} x_i x_{j+1} \cdots x_{n+1}$,

for some pair $i < j$ and every $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1} \in S$, then the n-subsemigroup Q is commutative.

Corollary 1. *Let S be a semigroup and let $R_n (n \geqslant 2)$ be the union of all sequences $E_n = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ suck that the equations* (1) *are satisfied for every $x \in S$. If $\bigcup_{n=1}^{\infty} R_n = S$, then S is an abelian group.*

Corollary 2. *Let Q and R be defined as in the above Theorem and let P be an m-subsemigroup of S such that $P \subseteq Q$. If the set R is non-empty, then the propositions 1′ and 5′ are true, where the proposition i′ is obtained from i° changing Q and n with P and m, respectively. If $R \subseteq P$, then the proposition 2′ which is obtained from 2° in a similar way, is satisfied.*

Five more general lemmas (in terms of partly-associative or partly-commutative finitary operations) have been used in the proofs of the above results. From those lemmas follows that the main results of this paper might be given in terms of n-semigroups [1]. But such a generalization would not be essential, because every n-semigroup Q could be extended to a semigroup S, so that Q is an n-subsemigroup of S ([2], p. 493).

1) i. e. R contains the elements of fhose sequences.