ЗА АСОЦИЈАТИВНИТЕ КОНГРУЕНЦИИ

Билтен ДМФ НРМ, копје, 13 (1962), 5–12

Конгруенцијата α од *групоидот* G велиме дека е *асоцијативна* ако $(xy)z \; \alpha \; x(yz)$ за секои $x, y, z \in G$, т. е. ако *фактор-групоидот* G/α е *полугрупа*. Овде покажуваме дека постои асоцијативна конгруенција τ таква да конгруенцијата α е асоцијативна ако и само ако во неа се содржи τ (т. е. $x \tau y \Rightarrow x \alpha y$). Спрема тоа, класата асоцијативни конгруенции е *комплетна подлатиса* од латисата на сите конгруенции, а τ е *минималната асоцијативна конгруенција*. Асоцијативните конгруенции ги користиме за покажуваме дека секоја *финитарна асоцијативна операција* може да се смета за *производ* во некоја (поширока) *полугрупа*, а исто така даваме и карактеристика на фамилијата полугрупи со таа особина. На крајот изнесуваме неколку особини на $(f_1 = g_1, \cdots, f_k = g_k)$ – *конгруенциите* во некоја *алгебарска структура*, од кои (кај групоидите) асоцијативните конгруенции се специјален вид.

1. Да напоменеме прво дека за *конгруенција* во групоидот G ја сметаме секоја *еквивалентност* α во множеството G која е *согласна* со операцијата на групоидот, т. е. $x \alpha y \Rightarrow ax \alpha ay, \; xa \alpha ya$. Ако $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ се две класи на еквивалентноста α, тогаш производот xy припаѓа на иста класа $\mathbf{z}$, независно од тоа какви се елементите $x \in \mathbf{x}$ и $y \in \mathbf{y}$. Затоа можеме да ставиме $\mathbf{xy} = \mathbf{z}$ и така добиваме нов групоид G/α чии елементи се класите на еквивалентноста α. Пресликувањето $x \to \mathbf{x}$ $(x \in \mathbf{x})$ е *хомоморфизам* од G на G/α. Обратно, ако постои хомоморфизам $x \to x'$ од групоидот G на G', тогаш ставајќи $x \beta y \Leftrightarrow x' = y'$ добиваме конгруенција во G таква да групоидите G/β и G' се изоморфни. Во книгата [2] конгруенциите се наречени регуларни еквивалентности ([2], гл. 4).

Нека во групоидот G ја определиме релацијата ω со: $x \omega y \Leftrightarrow$ постојат елементи $a_1, \cdots, a_m \in G$ и производи Π', Π'' такви да $x = \Pi' a_1 \cdots a_m$, $y = \Pi'' a_1 \cdots a_m$; на пример, $x = (a_1a_2)(a_3a_4)$, $y = ((a_1a_2)a_3)a_4$. Потоа нека релацијата τ ја определиме со: $x \tau y \Leftrightarrow$ постојат елементи $x = z_1, \cdots, z_k = y$ такви да $z_v \, \omega \, z_{v+1}$; велиме дека τ е *транзитивно проширување* на релацијата ω, бидејќи таа е минимална транзитивна релација во која се содржи ω; со други зборови, ако ρ е друга транзитивна релација таква да $\omega \leqslant \rho$ (т. е. $x \omega y \Rightarrow x \rho y$) тогаш имаме $\tau \leqslant \rho$.

Теорема 1. *Релацијата τ е асоцијативна конгруенција во дадениот групоид. Конгруенцијата α е асоцијативна ако и само ако $\tau \leqslant \alpha$. Спрема тоа, τ е минималната асоцијативна конгруенција.*

Доказ. Да покажеме прво дека τ е конгруенција. Јасно е дека релацијата ω е рефлексивна (оти земаме $a = \Pi a$) и симетрична, а од тоа следува дека истите особини ги има и τ. Од начинот на определувањето на τ е јасно дека таа е транзитивна, па значи и еквивалентност. Нека $x \omega y$, т. е. $x = \Pi' a_1 \cdots a_m$, $y = \Pi'' a_1 \cdots a_m$. Од тоа следува

$$ux = u\Pi' a_1 \cdots a_m = \Pi^* u a_1 \cdots a_m, \quad uy = u\Pi'' a_1 \cdots a_m = \Pi^{**} u a_1 \cdots a_m,$$

т. е. $ux \omega uy$. Ако $x = z_1, \cdots, z_k = y$ и ако $z_v \, \omega \, z_{v+1}$, тогаш имаме $uz_v \, \omega \, uz_{v+1}$, т. е. $ux \tau uy$. Слично се добива и $xu \tau yu$, а од тоа ќе следува дека τ е конгруенција. Јасно е дека $x(yz) \, \omega \, (xy)z$, а од тоа следува и $(xy)z \, \tau \, x(yz)$, т. е. добиваме дека конгруенцијата τ е асоцијативна.

Нека $x \omega y$ и нека α е некоја асоцијативна конгруенција. Од определувањето на асоцијативните конгруенции следува дека за било кои производи $\Pi' a_1 \cdots a_m$, $\Pi'' a_1 \cdots a_m$ имаме $\Pi' a_1 \cdots a_m \, \alpha \, \Pi'' a_1 \cdots a_m$, а од тоа се добива $x \alpha y$, бидејќи секој од елементите x, y е еднаков на по еден производ од тој вид. Имаме значи $\omega \leqslant \alpha$, а од тоа следува и $\tau \leqslant \alpha$. Обратно, од $\tau \leqslant \alpha$ следува $(xy)z \, \alpha \, x(yz)$, т. е. дека конгруенцијата α е асоцијативна.

Со тоа точноста на теоремата ја докажавме.

Нека Ω е некое множество конгруенции во групоидот G и нека ставиме: $x \xi y \iff x \varphi x$ за секое $\varphi \in \Omega$; $x \eta y \iff$ постои низа елементи $x = z_1, \cdots, z_k = y$ од G и $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_{k-1}$ од Ω такви да $z_v \varphi_v z_{v+1}$. Така добиените релации ξ и η се исто така конгруенции. Поради оваа особина, се вели дека фамилијата конгруенции е *комплетна латиса*.[1]) Од докажаната теорема се гледа дека и асоцијативните конгруенции формираат комплетна латиса, која е подлатиса од латисата на конгруенциите.

Пример. Нека G е комутативна група и нека «:» е операцијата делење во таа група, т. е. $x : y = xy^{-1}$. Минималната асоцијативна конгруенција τ во квазигрупата $G(:)$ е определена со: $x \tau y \iff xy = z^2$ за некое $z \in G$. Навистина, ако $xy = z^2$ тогаш имаме $x = (e : z^{-1}) : (x^{-1}z)$, $y = e : (z^{-1} : (x^{-1}z))$, каде e е неутралниот елемент на групата; од тоа следува дека τ се содржи во секоја асоцијативна конгруенција; дека τ е асоцијативна конгруенција на квазигрупата $G(:)$ се утврдува лесно. Нека R_e^+ е множеството од сите позитивни реални броеви. Поради $xy = (\sqrt{xy})^2$ имаме $x \tau y$ за било кои $x, y \in R_e^+$, т. е. постои само една асоцијативна конгруенција во квазигрупата $R_e^+(:)$. Ако R_a^+ е множеството позитивни рационални броеви, тогаш постојат бесконечно многу асоцијативни конгруенции во квазигрупата $R_a^+(:)$. Фактор-групата $R_a^+/\tau(:)$ е изоморфна со групата на сите бесконечни низи $(a_1, \cdots, a_n, \cdots)$ каде само конечно многу членови можат да бидат -1, а сите преостанаата се 1; производот на две низи се определува на вообичаениот начин, т. е.

$$(a_1, \cdots, a_n, \cdots) \cdot (b_1, \cdots, b_n, \cdots) = (a_1 b_1, \cdots, a_n b_n, \cdots).$$

2. Нека «$*$» е $(n+1)$-арна *операција* во множеството M, т. е. на секоја $(n+1)$-орка $x_o, x_1, \cdots, x_n$ елементи од M ѝ кореспондира еден елемент $* x_o x_1 \cdots x_n$. Во тој случај, велиме дека $M(*)$ е *n-групоид*. Ако се точни идентитетите

$$** x_o \cdots x_{2n} = * x_o * x_1 \cdots x_{2n} = \cdots = * x_o \cdots x_{n-1} * x_n \cdots x_{2n},$$

(при што, на пример, наместо $*(* x_o \cdots x_n) x_{n+1} \cdots x_{2n}$ се пишува $** x_o \cdots x_{2n}$) велиме дека $M(*)$ е *n-полугрупа*; n-полугрупата $M(*)$ е и *n-група* ако секоја равенка $* a_o \cdots a_{i-1} x a_{i+1} \cdots a_n = a_i$ е решлива по x во M. (n-групите се исцрпно изучени во работата [3]). Ако S е полугрупа и ако M е подмножество од S такво да $x_o, \cdots, x_n \in M \Rightarrow x_o \cdot x_1 \cdots x_n \in M$, тогаш ставајќи $* x_o \cdots x_n = x_o \cdot x_1 \cdots x_n$ добиваме n-полугрупа $M(*)$ за која велиме дека е *n-подполугрупа* од S; *n-подгрупа* од S е секоја n-подполугрупа која (како n-полугрупа) е n-група.

За полугрупата S велиме дека е *генерирана* од n-подполугрупата M ако секој елемент од S е производ на конечен број елементи од M, т. е. ако M е *генераторно множество* за полугрупата. Јасно е дека ако L и M се две изоморфни n-полугрупи, тогаш на секоја полугрупа генерирана од L ѝ кореспондира една со неа изоморфна полугрупа генерирана од M; затоа можеме да сметаме дека секоја полугрупа генерирана од L е генерирана и од M. Познато е дека секоја n-група генерира некоја група (да се види, на пример, [3] или [4]), а овде ќе покажеме и дека секоја n-полугрупа генерира некоја полугрупа и уште повеќе, ќе добиеме извесна карактеристика на сите полугрупи што можат да бидат генерирани од дадена n-полугрупа.

Ако K и F се две полугрупи генерирани од n-полугрупата $M(*)$ тогаш е јасно дека постои најмногу еден хомоморфизам од K на F кој на M го индуцира идентичното пресликување; секој хомоморфизам од таков вид ќе го наречеме *M-хомоморфизам*, а ако таков постои ќе велиме дека K е *M-хомоморфна* на F. За една генерирана полугрупа од M природно е да речеме дека е *максимална* ако е M-хомоморфна на секоја друга генерирана полугрупа од M. Обратно, за генерираната полугрупа K од M велиме дека е *минимална* ако секој M-хомоморфизам од K на некоја генерирана полугрупа од M е и изоморфизам. Јасно е дека две генерирани полугрупи од M што се максимални се изоморфни, но не ни е познато дали важи истото и за минималното генерирање.

[1]) Да се види, на пример [1] стр. 16, или [2] стр. 50.

Теорема 2. *Нека $M(*)$ е n-полугрупа и нека G е множеството од сите k-орки $(x_1, \cdots x_k)$ елементи од M за $k = 1, \cdots, n$. Во множеството G определуваме бинарна операција со*

$$(x_1, \cdots, x_i)(y_1, \cdots, y_j) = \begin{cases} (x_1, \cdots, x_i, y_1, \cdots, y_j) & \text{за} \quad i + j \leqslant n \\ (*x_1 \cdots x_i\, y_1 \cdots y_{n-i+1}, \cdots y_j) & \phantom{\text{за}} \quad i + j > n \end{cases}$$

Нека Ω биде множеството од сите асоцијативни конгруенции α на групоидот G такви да $(x)\,\alpha\,(y) \Rightarrow x = y$.

Полугрупата S е генерирана од M ако и само ако е изоморфна со некоја полугрупа од облик G/α, каде $\alpha \in \Omega$. Минималната асоцијативна конгруенција τ (на групоидот G) припаѓа на Ω, а G/τ е максималната полугрупа генерирана од M. Секоја полугрупа генерирана од M е M-хомоморфна на некоја минимална полугрупа генерирана од M. Ако $M(*)$ е n-група, тогаш секоја полугрупа што е генерирана од M е група.

Доказ. Нека $\alpha \in \Omega$ и нека со $(x_1, \cdots, x_i)_\alpha$ ја означиме класата на еквивалентноста α во која се содржи $(x_1, \cdots, x_i)$ При тоа (поради $\alpha \in \Omega$) ќе имаме $(x)_\alpha = (y)_\alpha \Rightarrow x = y$. Ако ставиме $x \to (x)_\alpha$ ќе добиеме обратно-еднозначно пресликување од M на $H_\alpha = \{(x)_\alpha; x \in M\}$. Поради

$$* x_o \cdots x_n \to (* x_o \cdots x_n)_\alpha = (x_o)_\alpha \cdots (x_n)_\alpha,$$

H_α е n-подполугрупа од G/α и е изоморфна (како n-полугрупа) со n-полугрупата $M(*)$. Освен тоа, имаме $(x_1, \cdots, x_i)_\alpha = (x_1)_\alpha \cdots (x_i)_\alpha$, од што следува дека G/α е генерирана од H_α, па значи и од $M(*)$.

Нека F е некоја полугрупа генерирана од $M(*)$. Секој елемент y од F може да се претстави во облик $y = x_1 \cdots x_s$, каде $x_i \in M$. При тоа може да се претпостави дека $s \leqslant n$, бидејќи секој производ на $n+1$ елементи од M припаѓа на M. Спрема тоа, ако ставиме $(x) \longrightarrow x$ и $(x_1, \cdots, x_i) \longrightarrow x_1 x_2 \cdots x_i$ добиваме пресликување од G на F. Јасно е дека тоа пресликување е хомоморфизам. Ако ставиме $(x_1, \cdots x_i)\,\beta\,(y_1 \cdots y_j) \Leftrightarrow x_1 \cdots x_i = y_1 \cdots y_j$ ќе добиеме асоцијативна конгруенција β во G таква да полугрупите G/β и F се изоморфни, при што пресликувањето $(x_1, \cdots, x_i)_\beta \longrightarrow x_1 \cdots x_i$ е изоморфизам. Јасно е дека не може да биде $(x)\,\beta\,(y)$ за $x \neq y$, па значи имаме $\beta \in \Omega$. Со тоа го докажавме првиот дел од теоремата.

Да покажеме сега дека $\tau \in \Omega$. За таа цел, нека напоменеме дека секој елемент $(x_1, \cdots x_i)$ од G може да се претстави како производ на елементите $(x_1), \cdots, (x_i)$, па значи $T = \{(x); x \in M\}$ е генераторно множество за групоидот G. Со индукција по s, лесно се добива дека ако $(y_1, \cdots, y_s)$ е производ на s елементи од T, тогаш имаме $s = qn + r$, каде $o \leqslant r < n$. Освен тоа, ако $r=1$ и $y_1 = y$, ќе имаме $(y) = (\Pi a_1 \cdots a_{qn+1})$, каде $\Pi a_1 \cdots a_{qn+1}$ е производ на $qn+1$ елементи од M, па значи тој е еднозначно определен од низата $a_1, \cdots, a_{qn+1}$, поради асоцијативноста на операцијата «$*$». Од тоа следува дека $(x_1, \cdots, x_i)\,\omega\,(y_1, \cdots, y_j) \Rightarrow i = j$ и $(x)\,\omega\,(y) \Rightarrow x = y$, каде ω е релација определена како и во **1.** Земајќи го предвид начинот по кој релацијата τ е добиена со помош на ω, заклучуваме дека истите особини ги има и τ, т. е. $(x_1, \cdots, x_i)\,\tau\,(y_1, \cdots, y_j) \Rightarrow i = j$, $(x)\,\tau\,(y) \Rightarrow x = y$. Од тоа следува дека $\tau \in \Omega$.

Нека претпоставиме сега дека $\alpha, \beta \in \Omega$ и нека $\alpha \leqslant \beta$. Ќе покажеме дека $(x_1, \cdots, x_i)_\alpha \longrightarrow (x_1, \cdots, x_i)_\beta$ е M-хомоморфизам од G/α на G/α. Поради $\alpha \leqslant \beta$ од $(x_1, \cdots, x_i)\,\alpha\,(y_1, \cdots, y_j)$ следува $(x_1, \cdots, x_i)\,\beta\,(y_1, \cdots, y_j)$, па значи тоа пресликување е еднозначно, а јасно е дека е и хомоморфизам. Ако ставиме $H_\alpha = \{(x)_\alpha; x \in M\}$, $H_\beta = \{(x)_\beta; x \in M\}$ ќе добиеме две n-подполугрупи од G/α односно G/β, кои се изоморфни со $M(*)$, а при тоа изоморфизам е пресликувањето $(x)_\alpha \to (x)_\beta$. Затоа можеме да сметаме дека пресликувањето $(x_1, \cdots, x_i)_\alpha \to (x_1, \cdots, x_i)_\beta$ е M-хомоморфизам од G/α на G/β.

Сега ќе го комплетираме доказот на вториот дел од теоремата. Ако $\alpha \in \Omega$ имаме $\tau \leqslant \alpha$, па значи постои M-хомоморфизам од G/τ на G/α, од што (спрема првиот дел на теоремата) се добива дека G/τ е максималната полугрупа генерирана од M.

Нека γ е една максимална конгруенција што припаѓа на Ω (т. е. од $\delta \in \Omega$ и $\gamma \leqslant \delta$ следува $\gamma = \delta$). Ќе покажеме дека G/γ е минимална полугрупа генерирана од M. Навистина, нека G/γ е M-хомоморфна на полугрупата F, која е генерирана од M. Значи пресликувањето $(x_1, \cdots, x_i)\gamma \longrightarrow x_1 \cdots x_i$ е хомоморфизам од G/γ на F. Нека го разгледаме хомоморфизмот $(x_1, \cdots, x_i) \longrightarrow$ $\longrightarrow x_1 \cdots x_i$ од групоидот G на F, споменат погоре. Тој може да се претстави како производ на два хомоморфизми $(x_1, \cdots x_i) \rightarrow (x_1, \cdots, x_i)\gamma \rightarrow x_1 \cdots x_i$. Спрема тоа, ако ставиме $(x_1, \cdots, x_i)\,\delta\,(y_1, \cdots, y_j) \iff x_1 \cdots x_i = y_1 \cdots y_j$, добиваме релација δ таква да $(x_1, \cdots, x_i)_\delta \rightarrow x_1 \cdots x_i$ е M-изоморфизам од G/δ на F. При тоа, од $(x_1, \cdots, x_i)\,\gamma\,(y_1, \cdots, y_j)$ следува $x_1 \cdots x_i = y_1 \cdots y_j$, т. е. $(x_1, \cdots, x_i)\,\delta\,(y_1, \cdots, y_j)$, а од тоа и $\gamma \leqslant \delta$, што поради максималноста на γ е можно само за $\gamma = \delta$. Значи, $(x_1, \cdots, x_i)\gamma \rightarrow x_1 \cdots x_i$ е M-изоморфизам, а од тоа следува дека G/γ е минимално генерирање на M.

Ќе покажеме дека секој елемент $\alpha \in \Omega$ се содржи во некој максимален елемент $\gamma \in \Omega$ (т. е. $\alpha \leqslant \gamma$), а од тоа ќе следува точноста и на третиот дел од теоремата. Навистина, нека $L = \{\alpha_v; v \in J\}$ е ланец во Ω (т. е. за $\alpha_v \neq \alpha_\lambda$ имаме $\alpha_v < \alpha_\lambda$ или $\alpha_\lambda < \alpha_v$) и нека ставиме $(x_1, \cdots, x_i)\,\beta\,(y_1, \cdots, y_j) \iff$ $\iff (x_1, \cdots, x_i)\,\alpha_v\,(y_1, \cdots, y_j)$ за некое $\alpha_v \in L$. Јасно е дека β е асоцијативна конгруенција и дека $\beta \in \Omega$. Значи, секој ланец има супремум во Ω, од што спрема добро познатата лема на Zorn (еквивалентна со аксиомата за избор[1]) добиваме дека секој елемент α се содржи во некој максимален елемент од Ω, што и сакавме да докажеме.

Нека претпоставиме дека $M(*)$ е n-група и нека $(a_1, \cdots, a_i)$, $(b_1, \cdots, b_j)$ се дадени елементи од G. Поради решливоста на равенките од облик $* a_0 \cdots a_{i-1}\, x\, a_{i+1} \cdots a_n = a_i$, постојат елементи $x_1, \cdots, x_k$, $y_1, \cdots y_k$, $u_1, \cdots u_{n+j}, \cdots$ $\cdots, v_1, \cdots, v_{n+j}$ такви да

$$(a_1, \cdots, a_i)\,(x_1, \cdots, x_k) = (u_1)\,((u_2)\,(\cdots(u_{n+j})\cdots))$$
$$(y_1, \cdots, y_k)\,(a_1, \cdots, a_i) = (v_1)\,((v_2)\,(\cdots(v_{n+j})\cdots))$$
$$(b_1, \cdots, b_j) = (\cdots((u_1)\,(u_2))\cdots)\,(u_{n+j}) = (\cdots((v_1)\,(v_2))\cdots)\,(v_{n+j}),$$

а од тоа ќе следува $(a_1, \cdots, a_i)\,(x_1, \cdots, x_k)\,\tau\,(b_1, \cdots, b_j)\,\tau\,(y_1, \cdots, y_k)\,(a_1, \cdots, a_i)$, од што е јасно дека G/τ е група. Ако F е друга полугрупа генерирана од $M(*)$, таа е група бидејќи е хомоморфна слика од група.

Со тоа теоремата е во потполност докажана.

Забелешка. Групоидот G е полугрупа само во случај кога M е множество со еден елемент.

3. Ако за секое $*_i \in \Phi$, $A(*_i)$ е *n_i-групоид* велиме дека $A(\Phi)$ е *алгебарска структура*. *Конгруенција* во структурата $A(\Phi)$ е секоја *еквивалентност* на множеството A што е *согласна* со сите операции од Φ. Нека $f_1(x_1, \cdots, x_{m_1}), \cdots,$ $\cdots . f_k(x_1, \cdots, x_{m_k})$, $g_1(x_1, \cdots, x_{m_1}), \cdots, g_k(x_1, \cdots, x_{m_k})$ се изрази добиени со помош на операциите од Φ (т. е. тие се *полиноми* во структурата $A(\Phi)$). Конгруенцијата α од структурата $A(\Phi)$ велиме дека е $(f_1 = g_1, \cdots . f_k = g_k)$-*конгруенција* ако $f_i(x_1, \cdots, x_{m_i})\,\alpha\,g_i(x_1, \cdots, x_{m_i})$ за секои $x_1, \cdots, x_{m_i} \in A$, $i = 1, \cdots, k$, т. е. ако во *фактор-структурата* $A/\alpha\,(\Phi)$ се точни идентитетите $f_i(x_1, \cdots, x_{m_i}) =$ $= g_i(x_1, \cdots, x_{m_i})$.

Нека релацијата ω е определена со: $x\omega x$; $x\omega y \Rightarrow y\omega x$; $x_v\omega y_v$, $* \in \Phi \Rightarrow$ $* x_0 \cdots x_n\, \omega * y_0 \cdots y_n$, $f_i(x_1, \cdots, x_{m_i})\,\omega\,g_i(x_1, \cdots, x_{m_i})$; — и нека τ е *транзитивното проширување* на ω (т. е. τ е определена од ω како и во **1**).

Наредната теорема е обопштение на теоремата 1 и се докажува на ист начин како и нејзиниот специјален случај.

Теорема 1′. *Конгруенцијата α од алгебарската структура $A(\Phi)$ е $(f_1 = g_1, \cdots, f_k = g_k)$ — конгруенција ако и само ако $\alpha \leqslant \tau$. Спрема тоа, множеството од сите такви конгруенции е комплетна латиса, а τ е најмал елемент на таа латиса.*

Дека теоремата 1 е специјален случај од 1′, следува од тоа што конгруенцијата α од групоидот G е асоцијативна ако и само ако е $(x(yz) = (xy)z)$ — конгруенција.

[1]) Да се види на пример [1] стр. 42.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Birkhoff G.: Lattice Theory, Amer. Math. Coll. Publ. 25 (1948).

[2] Dubreil P.: Algèbre T. 1. Paris 1954.

[3] Post E. L.: Polyadic groups, Trans. Amer. Math. Soc. 48 (1940), 200—350.

[4] Tvermoes H.: Über eine verallgemeinerung des Gruppenbegriffs, Math. Scand 1 (1953), 18—30.

[5] Thurston H. A.: Some properties of partly—associative operations, Proc. Amer. Math. Soc. 5 (1954), 487—498.

[6] Чупона Ѓ.: За n-арните подполугрупи, Билт. Друшт. Мат. Физ. Макед. 12 (1961), 5—13.

ON ASSOCIATIVE CONGRUENCES OF A GROUPOID
(Summary)

1. A *congruence* α of a *groupoid* G is said to be *associative* if $(xy)\,z\,\alpha\,x\,(yz)$ for every $x, y, z \in G$, i. e. if the corresponding *factor – groupoid* G/α is a *semigroup*.

Let G be a groupoid and ω a relation on G defined by: $x\omega y \iff$ there exist elements $a_1, \cdots, a_m$ and products Π', Π'' such that $x = \Pi' a_1 \cdots a_m$, $y = \Pi'' a_1 \cdots a_m$; for example, $x = (a_1 a_2)(a_3 a_4)$, $y = a_1((a_2 a_3) a_4)$. Then the relation τ determined by: $x\tau y \iff$ there exist elements $x = z_1, \cdots, z_k = y$ such that $z_v \varphi z_{v+1}$ — is an associative congruence in the groupoid G. And a congruence ρ is associative if and only if $\tau \leqslant \rho$ (i. e. $x\tau y \Rightarrow x\rho y$). Therefore the class of all associative congruences of a groupoid is a complete lattice and τ is the *minimal associative congruence.*

Example. Let G be an abelian group and let $x : y = xy^{-1}$. Then the minimal associative congruence τ in the quasigroup $G(:)$ is determined by: $x\tau y \iff xy = z^2$ for some $z \in G$. Therefore if R_e^+ is the set of positive real numbers then we have $x\tau y$ for every $x, y \in R_e^+$, i. e. there exists only one associative congruence in the quasigroup $R_e^+(:)$. The lattice of associative congruences in the quasigroup $R_a^+(:)$ is infinite if R_a^+ is the set of positive rational numbers.

2. Let $N(*)$ be an *n-semigroup,* i. e. «$*$» is an $(n+1)$ – ary *associative operation* on the set N (see, for example, [4] p. 19). The semigroup S is said to be a *covering semigroup* of $N(*)$ if (1) N is a *generating* subset of the semigroup S, and (2) $* \, x_0 \cdots x_n = x_0 \cdot x_1 \cdots x_n$ for every $x_0, \cdots, x_n \in N$ (i. e. N is an *n-subsemigroup* of S). It is clair that if N and M are two isomorphic n-semigroups, and if F is a covering of M then there exists a covering of N which is isomorphic with F; therefore we may assume that every covering of M is also a covering of N. If K and F are two covering of $N(*)$ then the identity mapping on N can be extended to at most one homomorphism of K upon F; if such a homomorphism exists it is said to be an *N-homomophism.* A covering S is called *maximal* if for any covering F of N, there exists an N-homomorphism of S upon F. Let K be a covering of N such that every N-homomorphism of K upon a covering of N is an isomorphism; then K is said to be a *minimal covering.* It is clair that two maximal covering of an n-semigroup are isomorphic, but we do not know if this is true for minimal ones.

The main result of this paper is the following.

Theorem. *Let $N(*)$ be an n-semigroup, $G = \bigcup_{i=1}^{n} N^i$ and let a product in G be defined by*

$$(x_1, \cdots, x_i)(y_1, \cdots, y_j) = \begin{cases} (x_1, \cdots, x_i, y_1, \cdots, y_j) & \text{if } i + j \leqslant n \\ (* \, x_1 \cdots x_i \, y_1 \cdots y_{n-i+1}, \cdots y_j) & \phantom{\text{if }} i + j > n. \end{cases}$$

Let Ω be the class of all associative congruences α of the groupoid G such that $(x)\,\alpha\,(y) \Rightarrow x = y$. Then a semigroup S is a covering of N if and only if it is isomorphic with some semigroup G/α where $\alpha \in \Omega$. If τ is the minimal associative congruence of the groupoid G then $\tau \in \Omega$, and G/τ is the maximal covering of N. If F is a covering of N then there exists a minimal covering K of N such that the identity mapping on N can be extended to an N-homomorphism of F upon K. Every covering semigroup of an n-group is a group.

Note. If N contains more than one element then the groupoid G defined in the above Theorem is not a semigroup.