ЗА ИНФИНИТАРНИТЕ АСОЦИЈАТИВНИ ОПЕРАЦИИ

Битен ДМФ СРМ, 15 (1964), 19–22

МАДЕВСКИ Ж., ТРПЕНОВСКИ Б., ЧУПОНА Ѓ.

1. Нека S е непразно множество и нека со S^{ω} го означиме множеството од сите бескрајни низи во S. Секое пресликување „$*$" од S^{ω} во S ќе велиме дека е *ω-арна* операција во S; притоа, ако со „$*$" низата $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ се пресликува во y, ќе пишуваме $y = * x_1 x_2 \cdots x_n \cdots$.

За операцијата „$*$" велиме дека е (i, j)*-асоцијативна*, ако е точен идентитетот

$$(1) \qquad * x_1 x_2 \cdots x_{i-1} (* x_i \cdots x_n \cdots) y_1 \cdots y_n \cdots = \\ = * x_1 x_2 \cdots x_{j-1} (* x_j \cdots x_n) y_1 \cdots y_n \cdots ,$$

а структурата $S(*)$ ќе ја наречеме *ω-полугрупа*, ако „$*$" е (i, j)-асоцијативна ω-арна операција во S за секој пар природни броеви i, j.

Примери за ω-полугрупи можат да се најдат лесно:

1. Ако S е (делумно) подредено множество со особината да секое подмножество од S има супремум во S, и ако ставиме $* x_1 x_2 \ldots x_n \ldots = = \sup \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$, ќе добиеме дека $S(*)$ е ω-полугрупа.

2. Нека S е множеството од реалните броеви дополнето со нов елемент $\sim$. Ако ставиме $\Sigma x_i = y$ секогаш кога редот Σx_i е конвергентен и неговата сума е y, а $\Sigma x_i = \sim$ кога редот Σx_i е дивергентен, или пак некој од елементите x_i е еднаков со $\sim$, ќе добиеме дека $S(\Sigma)$ е ω-полугрупа.

3. На секое множество S може да се изгради структура на ω-полугрупа, ако се стави $* x_1 x_2 \cdots x_n \cdots = x_1$, или пак $* x_1 x_2 \cdots x_n \cdots = a$, каде a е фиксен елемент од S.

По аналогија со случајот кога „$*$" е финитарна операција, може да се воведе и поимот за *ω-група*. Имено, за ω-полугрупата $S(*)$ ќе речеме дека е ω-група, ако за секоја низа елементи $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ од S и секој природен број i постои елемент x во S, таков да е точно равенството

$$(2) \qquad * a_1 a_2 \cdots a_{i-1}\, x\, a_{i+1} \cdots = a_i .$$

Ако S се состои само од еден елемент a и ако ставиме $* aa \cdots a \cdots = a$, ќе добиеме дека $S(*)$ е ω-група. Оваа ω-група ќе ја наречеме *тривијална*, а основниот резултат на оваа работа е следната

Теорема. *Не постои нетривијална ω-група.*

Точноста на теоремата ќе ја добиеме како следствие од неколку леми од поопшт карактер.

2. Во овој дел секогаш ќе претпоставуваме дека $S(*)$ е ω-полугрупа, без да го тоа специјално спомнуваме.

Лема 1. *Нека $a, b \in S$ и нека постои елемент $d \in S$ таков да $b = * cda \cdots a \cdots$, каде $c = aa \cdots a \cdots$. Тогаш, точно е равенството*

$$(3) \qquad * baa \cdots a \cdots = * aba \cdots a \cdots .$$

Доказ. Навистина, од направените претпоставки добиваме,

$$\begin{aligned} * baa \cdots a \cdots &= * (* cdaa \cdots a \cdots)\, aa \cdots a \cdots \\ &= * c (* daa \cdots a \cdots)\, aa \cdots a \cdots \\ &= * (* aa \cdots a \cdots) (* daa \cdots a \cdots)\, aa \cdots a \cdots \\ &= * a (* aa \cdots a \ldots) (* daa \cdots a \cdots)\, aa \cdots a \cdots \\ &= * ac (* daa \cdots a \cdots)\, aa \cdots a \cdots \\ &= * a (* cdaa \cdots a \cdots)\, aa \cdots a \cdots \\ &= * abaa \cdots a \cdots . \end{aligned}$$

Лема 2. *Нека е точен идентитетот* $*xyx\cdots x\cdots = *yxx\cdots x\cdots$, *и нека за секои а* $b\in S$ *постои* $c\in S$ *такво да* $b = *aca\cdots a\cdots$. *Тогаш точен е и идентитетот*

$$*yx_1 x_2\cdots x_n\cdots = *x_1 x_2\cdots x_n\cdots. \tag{4}$$

Доказ. Нека $y, x_1, \cdots, x_n, \cdots$ се произволни елементи од S. По претпоставка постои елемент $z\in S$, таков да $*yzyy\cdots y\cdots = x_1$.
Тогаш имаме,

$$\begin{aligned} *x_1 x_2\cdots x_n\cdots &= *(*yzyy\cdots y\cdots)\, x_2 x_3\cdots x_n\cdots \\ &= *y(*zyy\cdots y\cdots)\, x_2 x_3\cdots x_n\cdots \\ &= *y(*yzy\cdots y\cdots)\, x_2 x_3\cdots x_n\cdots \\ &= *yx_1 x_2 x_3\cdots x_n\cdots. \end{aligned}$$

Лема 3. *Нека се точни следните услови:* (*i*) *за секое* $x\in S$ *постои низа* $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots \in S$ *таква да* $x = *a_1 a_2\cdots a_n\cdots$; (*ii*) *ако е точно равенството* $*a_1 a_2\cdots a_n\cdots = *b_1 b_2\cdots b_n\cdots$, *тогаш е точно и равенството* $*xa_1 a_2\cdots a_n\cdots = *xb_1 b_2\cdots b_n\cdots$, *за секое* $x\in S$. *Ако ставиме*

$$*xy_1 y_2\cdots y_n\cdots = x\circ(*y_1 y_2\cdots y_n\cdots), \tag{5}$$

ќе добиеме бинарна асоцијативна операција „$\circ$*" во* S, *т. е.* $S(\circ)$ *ќе биде полугрупа.*

Доказ. Од направените претпоставки е јасно дека „$\circ$" е (еднозначна) бинарна операција во S, а лесно се покажува дека таа е и асоцијативна.

Лема 4. *Нека важи следниот закон за кратење: од* $*xzz\cdots z\cdots = *yzz\cdots z\cdots$ *следува* $x = y$. *Тогаш секој елемент* x *од* S *е идемпотент, т. е. точно е равенството* $*xx\cdots x\cdots = x$.

Доказ. Нека $x\in S$ и нека $*xx\cdots x\cdots = y$. Тогаш имаме:

$$\begin{aligned} *xyy\cdots y\cdots &= *x(*xx\cdots x\cdots)\, yy\cdots y\cdots \\ &= *(*xx\cdots x\cdots)\, yy\cdots y\cdots \\ &= *yyy\cdots y\cdots, \end{aligned}$$

од каде пак следува $x = y$, т. е. $*xx\cdots x\cdots = x$.

Лема 5. *Ако секој елемент од* S *е идемпотент и ако важи законот за кратење:* $*xyy\cdots y\cdots = *xxy\cdots y\cdots \Rightarrow x = y$, *тогаш* S *содржи само еден елемент.*

Доказ. Нека $x, y\in S$. Имаме:

$$\begin{aligned} *xyy\cdots y\cdots &= *(*xx\cdots x\cdots)\, yy\cdots y\cdots = *x(*xx\cdots x\cdots)\, yy\cdots y\cdots \\ &= *xxyy\cdots y\cdots, \end{aligned}$$

од каде следува $x = y$.

3. Доказ на теоремата. Од докажаните погоре леми, лесно се добива точноста на теоремата. Навистина, нека претпоставиме дека $S(*)$ е дадена ω-група. Од лемите 1 и 2 следува дека во S се точни идентитетите: $*xyy\cdots y\cdots = *yxy\cdots y\cdots$ и $*yx_1 x_2\cdots x_n\cdots = *x_1 x_2\cdots x_n\cdots$. Од ова пак е јасно дека се исполнети претпоставките на лемата 3, па ако ставиме $*x_1 x_2\cdots x_n\cdots = x_1\circ(*x_2\cdots x_n\cdots)$, ќе добиеме дека $S(\circ)$ е полугрупа. Нека $a, b\in S$ и нека $a = *a_1 a_2\cdots a_n\cdots$. Бидејќи равенката $*xa_1 a_2\cdots a_n\cdots = b$ има решение по x во S, решлива по x во S ќе биде и равенката $x\circ a = b$. Исто така, ако $c_1, c_2, \cdots, c_n\cdots$ се било кои елементи од S, тогаш и равенката $*azc_1 c_2\cdots c_n\cdots = b$ ќе има решение по z во S, а тогаш $y = *zc_1 c_2\cdots c_n\cdots$ ќе биде решение на равенката $a\circ y = b$. Со тоа докажавме дека $S(\circ)$ е група, од каде следува евидентноста на претпоставките од лемите 4 и 5, а спрема последната од овие две леми, и дека S содржи само еден елемент, т. е. ω-групата $S(*)$ е тривијална.

Со тоа теоремата е докажана.

Забелешка. Може лесно да се види дека сите докажани погоре леми се точни и при претпоставката дека „$*$“ е само (1, 2)-асоцијативна. Истото се однесува и за теоремата, при што доволно е да се претпостави само решливост на равенката $b = *\, axa \cdots a \cdots$, за секои $a, b \in S$,

Докажаната теорема укажува на тоа дека ω-групите не се од интерес, но на мислење сме дека добиениот резултат може да се искористи при изучувањето на ω-полугрупите.

A NOTE ON INFINITARY ASSOCIATIVE OPERATIONS

(Summary)

Let S be a non-empty set and S^{ω} the set of all infinite sequences $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ of elements belonging to S Every mapping „$*$“ of S^{ω} into S is said to be an *ω-ary* operation on S; we write $y = *\,(x_1 x_2 \cdots x_n \cdots)$ if the sequence $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ is mapped on y by the operation „$*$“. The operation „$*$“ is called (i, j)-*associative* if the following identity equation is satisfied in S:

$$*\,(x_1 \cdots x_{i-1} *(x_i \cdots x_n \cdots)\, y_1 \cdots y_n \cdots) = \\ = *\,(x_1 \cdots x_{j-1} *(x_j \cdots x_n \cdots)\, y_1 \cdots y_n \cdots); \tag{1}$$

and $S(*)$ is said to be an *ω-semigroup* if „$*$“ is (i, j)-associative for every pair (i, j).

It is easy to give several examples of ω-semigroups. So, let $S(\cdot)$ be a semigroup with an identity (e) and a zero (o); by putting $*\,(x_1 x_2 \cdots x_n \cdots) = x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdot \cdots \cdot x_{i_k}$ if $x_j = e$ for every $j \neq i_1, i_2, \cdots, i_k$, and $*\,(x_1 x_2 \cdots x_n \cdots) = o$, in every other case, we obtain an ω-semigroup. In an obvious way we can obtain two ω-semigroups in every complete lattice.

An ω-semigroup $S(*)$ is said to be an *ω-group* if for every $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots \in S$, and every $i \in \{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$ there is an element $x \in S$ such that $*\,(a_1, a_2, \cdots a_{i-1} x a_{i+1} \cdots) = a_i$. If the set S contains only one element a, by putting $*\,(a \cdots a \cdots) = a$, we obtain an ω-group; it is called a *trivial* ω-group. The main result of this note is the following

Theorem. *There does not exist a non-trivial ω-group.*

This theorem is a consequence of some results about ω-semigroups. Let $S(*)$ be an ω semigroup. The following Lemmas are satisfied:

Lemma 1. *Let $a, b \in S$ and $c = *\,(aa \cdots a \cdots)$. If there is an element $d \in S$ such that $b = *\,(cdaa \cdots a \cdots)$, then we have $*\,(baa \cdots a \cdots) = *\,(aba \cdots a \cdots)$.*

Lemma 2. *Suppose that the following identity equation is true: $*\,(xyxx \cdots x \cdots) = *\,(yxx \cdots x \cdots)$ If for every $a, b \in S$ there is an element $c \in S$ such that $b = *\,(aca \cdots a \cdots)$, then the following identity equation is satisfied: $*\,(yx_1 x_2 \cdots x_n \cdots) = *\,(x_1 x_2 \cdots x_n \cdots)$.*

Lemma 3. *Suppose that, for every $x \in S$, there are elements $a_1, a_2 \cdots a_n, \cdots \in S$ such that $x = *\,(a_1 a_2 \cdots a_n \cdots)$, and that the equation $*\,(b_1 b_2 \cdots b_n \cdots) = *\,(c_1 c_2 \cdots c_n \cdots)$ implies that the equation $*\,(xb_1 b_2 \cdots b_n \cdots) = *\,(xc_1 c_2 \cdots c_n \cdots)$ is satisfied for every $x \in S$. Then, by putting $x \circ (*\,(y_1 \cdots y_n \cdots)) = *\,(xy_1 \cdots y_n \cdots)$, we obtain a semigroup $S(\circ)$.*

Lemma 4. *If, for every $x, y, z \in S$, $*\,(xz \cdots z \cdots) = *\,(yz \cdots z \cdots)$ implies $x = y$, then every element $u \in S$ is idempotent, i. e. $*\,(uu \cdots u \cdots) = u$.*

Lemma 5. *If every element of S is idempotent, and if the following cancellation law is satisfied in S: $*\,(xyy \cdots y \cdots) = *\,(xxy \cdots y \cdots) \Longrightarrow x = y$, then S contains only one element.*