ЗА $[m, n]$ - ПРСТЕНИТЕ

Билтен ДМФ СРМ, Скопје, 16 (1965), 5–10

Модифицирајќи го системот аксиоми за прстените, со тоа што наместо бинарни воведуваме произволни финитарни операции, доаѓаме до поопштиот поим за $[m, n]$—прстен, каде m и n се природни броеви. (При тоа за $m=n=1$ добиваме обичен прстен). Во оваа работа покажуваме дека секој $[m, n]$ - прстен може да се вметне во прстен.

1. Прво ќе ги споменеме нужните претходни дефиниции, а потоа ќе го формулираме основниот резултат на работава.

Нека $*$ е $(n+1)$ - арна операција во непразното множество Q; при тоа пишуваме $y = * x_0 x_1 \cdots x_n$, ако $* : (x_0, x_1, \cdots, x_n) \to y$. Ако операцијата $*$ е асоцијативна велиме дека $Q(*)$ е n—полугрупа. Ако, освен тоа, производот $* x_0 x_1 \cdots x_n$ не се менува при произволно пермутирање на факторите x_ν, n - полугрупата $Q(*)$ се наречува комутативна. n— Полугрупата $Q(*)$ е n - група ако за секоја $(n+1)$ - орка $a_0, a_1, \cdots, a_n \in Q$ и секое $i \in \{0, 1, \cdots, n\}$ равенката $* a_0 \cdots a_{i-1} x a_{i+1} \cdots a_n = a_i$ е еднозначно решлива по x во Q. Да напоменеме уште дека операцијата $*^k$ се определува рекурсивно со

$$*^0 x = x, \qquad *^{k+1} x_0 \cdots x_{(k+1)n} = * *^k x_0 \cdots x_{(k+1)n} \tag{1}$$

Нека $P(\Box)$ е комутативна m - група, а $P(*)$ n - полугрупа и нека е исполнет следниот дистрибутивен закон:

$$\begin{aligned} & * x_0 \cdots x_{i-1} \Box y_0 \cdots y_m x_{i+1} \cdots x_n = \\ & = \Box * x_0 \cdots x_{i-1} y_0 x_{i+1} \cdots x_n * \cdots * x_0 \cdots x_{i-1} y_m x_{i+1} \cdots x_n, \end{aligned} \tag{2}$$

за секое $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Тогаш структурата $P(\Box, *)$ ќе ја наречеме $[m, n]$ - прстен. (Јасно е дека поимот за $[1, 1]$ - прстен се совпаѓа со поимот за обичен (бинарен) прстен).

За $[m, n]$ - прстенот $P(\Box, *)$ велиме дека е $[m, n]$ - подпрстен на прстенот $R(+, \cdot)$ ако $P \subseteq R$ и ако $\Box x_0 x_1 \cdots x_m = x_0 + x_1 + \cdots + x_m$, $* x_0 x_1 \cdots x_n = x_0 \cdot x_1 \cdots x_n$ за секое $x_\nu \in P$. Ако освен тоа, множеството P е генераторно за прстенот R велиме дека тој прстен е покривач на $[m, n]$ - прстенот $P(\Box, *)$. Секој прстен изоморфен на R исто така ќе го сметаме за покривач на P.

Ќе го формулираме основниот резултат на работава.

Теорема. *Нека P е $[m, n]$ - прстен. Постои покривачки прстен R (еднозначно определен до изоморфизам) на P таков, да ако R' е друг покривач на P, тогаш идентичното пресликување од P на P може да се прошири до хомоморфизам од R на R'. (Поради оваа особина, R се наречува максимален покривач на P). Нека R е максималниот покривач на P и нека $\Omega = \{J\}$ е фамилијата од сите (двострани) идеали на R такви да $x, y \in P$ & $y \in J + x \Rightarrow y = x$. Тогаш прстенот R' е покривач на P ако и само ако $R' \cong R/J$ за некое $J \in \Omega$. За секој идеал $J \in \Omega$ постои максимален член $K \in \Omega$ во кој се содржи J. Во тој случај, ако идентичното пресликување од P на P може да се прошири до хомоморфизам од R/K на некој друг покривач од P, тогаш тој хомоморфизам е изоморфизам. (Поради оваа особина, покривачот R/K се наречува минимален).*

2. Во работата [2] се воведени соодветни поими за покривашти полугрупи на дадена n - полугрупа, како и за максимални и минимални покривања. Не ги повторуваме дефинициите на овие поими, покрај другото, и затоа што тие (по аналогија) се јасни, ако се имаат предвид горедадените дефиниции за [m, n] - прстените. Сепак, ќе изнесеме два резултати од споменатата работа, бидејќи нив ќе ги искористиме при докажувањето на теоремата.

Лема 1. Секоја n - полугрупа $Q(*)$ има максимална покриваштa полугрупа $S(\cdot)$. Нека $(x_1, x_2, \cdots, x_i)$ и $(y_1, y_2, \cdots, y_i)$ се две i—орки елементи од Q и нека постои низа елементи $a_1, a_2, \cdots, a_t$ од Q и ненегативни цели броеви $r_1, r_2, \cdots, r_i, s_1, s_2, \cdots, s_i$ такви да $t = (r_1 + r_2 + \cdots + r_i)n + i = (s_1 + \cdots + s_i)n + i$ и

$$(3)\qquad \begin{aligned} &x_1 = *^{r_1} a_1 \cdots a_{r_1 n+1}, \quad x_2 = *^{r_2} a_{r_1 n+2} \cdots a_{(r_1+r_2)n+2}, \cdots, x_i = *^{r_i} \cdots a_t \\ &y_1 = *^{s_1} a_1 \cdots a_{s_1 n+1}, \ y_2 = *^{s_2} a_{s_1 n+2} \cdots a_{(s_1+s_2)n+2}, \cdots, y_i = *^{s_i} \cdots a_t. \end{aligned}$$

Тогаш пишуваме $(x_1, x_2, \cdots, x_i)\, \varphi\, (y_1, y_2, \cdots, y_i)$. Потоа нека $(x_1, \cdots, x_i)\, \psi\, (y_1, y_2 \cdots, y_i)$ означува дека постои низа i - орки $(x_{11}, \cdots, x_{1i})$, $(x_{21}, \cdots, x_{2i}), \cdots, (x_{k1}, \cdots, x_{ki})$, таква да

$$(x_1, \cdots, x_i)\, \varphi\, (x_{11}, \cdots, x_{1i})\, \varphi\, (x_{21}, \cdots, x_{2i})\, \varphi \cdots \varphi\, (x_{k1}, \cdots, x_{ki})\, \varphi\, (y_1, \cdots, y_i).$$

Нека $x_v, y_\lambda \in Q$ и $i, j \leqslant n$. Равенството $x_1 x_2 \cdots x_i = y_1 y_2 \cdots y_j$ е точно во S ако и само ако $(x_1, \cdots, x_i)\, \psi\, (y_1, \cdots, y_i)$ и $i = j$ ([2] Теорема 2).

Лема 2. Секој покривач на една комутативна n - група е комутативна група.

Доказ. Нека S е покриваштa полугрупа на комутативната n - група $Q(*)$. Ќе покажеме дека е точно равенството $xy = yx$ за секој пар елементи $x, y \in Q$, од што ќе следува дека S е комутативна полугрупа, бидејќи Q е генераторно множество. Нека $x, y \in Q$, и нека $x_0, x_1, \cdots, x_n$ е низа елементи од Q таква да $x = * x_0 x_1 \cdots x_n$ (т. е. $x = x_0 x_1 \cdots x_n$ во S). Тогаш — ако се има предвид комутативноста на $Q(*)$ добиваме

$$\begin{aligned} xy &= (x_0 x_1 \cdots x_n)\, y = x_0 (x_1 \cdots x_n y) = x_0 (y x_1 \cdots x_n) \\ &= (x_0 y x_1 \cdots x_{n-1})\, x_n = (y x_0 x_1 \cdots x_{n-1})\, x_n = y\, (x_0 x_1 \cdots x_n) = yx, \end{aligned}$$

што и сакавме да докажеме. Со тоа е докажана и точноста на лемата, бидејќи секоја покриваштa полугрупа од една n - група е група ([2], Теорема 2).

3. Нека $P(\square, *)$ е $[m, n]$ - прстен и нека $H(+)$ е максималното покривање на m - групата $P(\square)$. Спрема лемата 2, $H(+)$ е комутативна група. Ако ставиме $\Delta\, x_0 x_1 \cdots x_n = * x_0 x_1 \cdots x_n$ ќе добиеме една делумно определена операција во множеството H; имено, таа операција ќе биде определена на множеството P кое е подмножество од H. Ќе ја прошириме таа операција така да биде определена на целото множество H.

Нека $x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_k \in P$, $i \in \{0, 1, 2, \cdots, n\}$, $k \in \{1, 2, \cdots, m\}$, и нека ставиме

$$(4)\qquad \begin{aligned} &\Delta\, x_1 \cdots x_i (y_1 + y_2 + \cdots + y_k)\, x_{i+1} \cdots x_n \\ &= * x_1 \cdots x_i y_1 x_{i+1} \cdots x_n + \cdots + * x_1 \cdots x_i y_k x_{i+1} \cdots x_n. \end{aligned}$$

Потоа, нека претпоставиме дека производите

$$(5)\qquad \begin{aligned} w_j = \Delta\, &(x_{11} + \cdots + x_{1\,k_1}) \cdots (x_{j_1} + \cdots + x_{i\,k_i})\, y_j \times \\ &\times (x_{i+1\,1} + \cdots + x_{i+1\,k_{i+1}}) \cdots (x_{n1} + \cdots + x_{n\,k_n}) \end{aligned}$$

се определени за секое $j \in \{1, 2, \cdots, k\}$, каде $x_{\lambda v}, y_j \in P$; $k_v, k \in \{1, 2, \cdots, m\}$. Тогаш пишуваме

$$(6)\qquad \begin{aligned} &\Delta\, u_1 \cdots u_i (y_1 + y_2 + \cdots + y_k)\, u_{i+1} \cdots u_n = w_1 + w_2 + \cdots + w_k, \\ &\text{каде } u_v = x_{v1} + \cdots + x_{v\,k_v}. \end{aligned}$$

Со тоа, операцијата Δ ја определивме на целото множество H, но не е непосредно јасна нејзината еднозначност. Имено, ако елементот $u = y_1 + y_2 + \cdots + y_k$ биде претставен и во форма $u = z_1 + z_2 + \cdots + z_k$ се поставува прашање дали десната страна од равенството (4) нема да се промени, ако во неа се стави z_v наместо y_v. Ќе покажеме дека таа страна навистина нема да се промени, а при тоа ќе ги користиме релациите φ и ψ воведени во формулацијата на лемата 1. Поради $y_1 + \cdots + y_k = z_1 + \cdots + z_k$ имаме $(y_1, \cdots, y_k)\,\psi\,(z_1, \cdots, z_k)$. Нека претпоставиме прво дека $(y_1, \cdots, y_k)\,\varphi\,(z_1, \cdots, z_k)$. Тогаш елементите y_v, z_v можат да се изразат со помош на една низа елементи $a_0, a_1, \cdots, a_t \in P$, како што е споменато во лемата 1, со тоа што наместо $*'$ стои $\square'$, а z_v наместо x_v. Ако тие вредности за y_v ги замениме во десната страна на (4), можеме во секој собирок да го примениме дистрибутивниот закон. Потоа, ако на соодветен начин ги групираме членовите и уште еднаш ја примениме дистрибутивноста — но во обратен смер —, добиваме израз кој се разликува од првобитниот во тоа што наместо y_v стои z_v. Со последователно применување на оваа постапка, истиот резултат се добива и во случај кога $(y_1, \cdots, y_k)\,\psi\,(z_1, \cdots, z_k)$. Од сето тоа следува дека производот определен со (4) е еднозначен. Со индуктивна постапка, се покажува дека и во (6) десната страна е еднозначно определена. Значи Δ е $(n+1)$ - арна операција во множеството H.

Од начинот по кој е дефинирана операцијата "Δ", јасно е дека таа е асоцијативна и дека е дистрибутивна спрема "$+$", па значи $H(+, \triangle)$ е $[1, n]$ - прстен. Освен тоа, P е генераторно множество на тој $[1, n]$ - прстен.

4. Нека $P(\square, *)$ е $[1, n]$ - прстен и нека $S(\cdot)$ е максималната покривашта полугрупа на n - полугрупата $P(*)$. Потоа, над $S(\cdot)$ го конструираме полугрупниот прстен $T(+, \cdot)$. Значи, $T(+)$ е абелова група за која S е множество од слободни генератори, а операцијата множење дефинирана е во T со помош на соодветната операција од S и особината за дистрибутивност. Секој елемент од T може да се претстави во облик $\Sigma\,\varepsilon\, x_1 x_2 \cdots x_k$, каде $\varepsilon = \pm 1$, $x_v \in P$, $k \leqslant n$.

Со A да го означиме множеството на сите елементи од T што можат да се претставаат во облик

(7) $$\Sigma\,\varepsilon\, x_1 \cdots x_i (z - u - v) \cdots x_k,$$

каде $u \square v = z$ во $P(\square)$. Јасно е дека A е идеал во прстенот $T(+, \cdot)$ Нека $x, y \in P$ и нека $y \in A + x$. Тогаш y може да се претстави во облик

(8) $$\begin{gathered} y = x + \Sigma\,\varepsilon\,(z - x - y) + \Sigma\,\delta\, x_1 \cdots x_i (w - u - v) \cdots x_n + \\ \Sigma\,\gamma\, y_1 \cdots y_j (c - a - b)\, y_{j+1} \cdots y_k, \end{gathered}$$

каде $z = x \square y$, $w = u \square v$, $c = a \square b$ во $P(\square)$ и $k < n$. Ако се има предвид фактот дека $T(+)$ е слободна комутативна група, се доаѓа до заклучение десната страна на равенството (8) да биде идентично еднаква со y. Производите што го формираат збирот $\Sigma\,\gamma\, y_1 \cdots y_j (c - a - b) \cdots y_k$ (а се различни од нула) не припаѓаат на $PU(-P)$, од што следува дека тој збир е нула, бидејќи другите збирови се во $PU(-P)$. Спрема тоа, имаме

(9) $$y = x + \Sigma\,\gamma\,(z - x - y) + \Sigma\,\varepsilon\, x_1 \cdots x_i (w - u - v) \cdots x_n$$

Имајќи пак во вид дека (9) е идентитет, уочуваме дека соодветно равенство треба да биде точно и во групата $P(\square)$, но поради $z = x \square y$, $w = u \square v$, тогаш десната страна се сведува на x, бидејќи другите два збира се нули. Со тоа покажавме дека $x, y \in P$, $y \in A + x \Rightarrow y = x$, од што следува дека пресликувањето $x \to A + x$ е изоморфизам од $[1, n]$ - прстенот $P(\square, *)$ на $[1, n]$ - подпрстенот $\overline{P} = \{A + x;\ x \in P\}$ од $R = T/A$. Јасно е дека $\overline{P}$ е генераторно множество за R. Добивме значи дека $R = T/A$ е покривашт прстен за $[1, n]$ - прстенот $P(\square, *)$. Исто така, јасно е дека ако R' е друг покривач на дадениот $[1, n]$ - прстен P, тогаш идентичното пресликување од P на P може да се продолжи до хомоморфизам од R на R'.

5. Со изнесеното во предходните два дела, точноста на првиот дел од теоремата е докажана. Преостанатиот дел се докажува на сличен начин како и соодветниот дел на теоремата 2 од работата [2]. Затоа нема да го спроведеме тој доказ.

6. Резултатот добиен во оваа работа укажува на тоа дека теоријата на $[m, n]$ - прстените е дел од теоријата на бинарните прстени, па спрема тоа класата $[m, n]$ - прстени може да се изучува со помош на класата бинарни прстени. Но, сметаме дека $[m, n]$ — прстените можат да се изучуваат и директно, па дури и дека нивната теорија може да се примени за окарактеризирање на некои класи бинарни прстени. На пример, може да се постави прашање во каква мера еден (бинарен) прстен е окарактеризиран од фамилијата на неговите $[m, n]$ - подпрстени, или од фамилијата на $[m, n]$ - подидеали (ако овој поим се воведе на соодветен начин).

Секој $[1, n]$ - прстен е група со мултиоператор (да се види [1] стр. 115), од што — на пример — следува фактот дека фамилијата на сите идеали од еден $[1, n]$ - прстен е модуларна мрежа.

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Г. Курош, Лекции по общей алгебре, Москва 1962.
[2] Г. Чупона, За асоцијативните конгруенции, Билтен на Друшт. математ. физ. НРМ кн 12 (1962) 2 — 12.

ON $[m, n]$ - RINGS

(Summary)

Let $*$ be an associative $(n+1)$—ary operation on a (non-empty) set Q; then $Q(*)$ is said to be an n—semigroup. The n - semigroup $Q(*)$ is called commutative if the following identity equation $*x_0 x_1 \cdots x_n = *x_{0\xi} x_{1\xi} \cdots x_{n\xi}$ is satisfied for every permutation ξ of $0, 1, \cdots, n$. And, the n—semigroup $Q(*)$ is an n—group if $*Q a_1 a_2 \cdots a_n = *a_1 a_2 \cdots a_n Q = Q$ for every $a_1, a_2, \cdots, a_n \in Q$.

Let $P(\square, *)$ be a universal algebra such that: (i) $P(\square)$ is a commutative m—group; (ii) $P(*)$ is a semigroup; and (iii) the following distributive law

$$* x_0 \cdots x_{i-1} \square y_0 \cdots y_m x_{i+1} \cdots x_n =$$
$$= \square * x_0 \cdots x_{i-1} y_0 x_{i+1} \cdots x_n * \cdots * x_0 \cdots x_{i-1} y_m x_{i+1} \cdots x_n$$

is satisfied for every $i \in \{0, 1, \cdots, n\}$. Then $P(\square, *)$ is said to be an $[m, n]$—ring. If $R(+, \cdot)$ is a (binary) ring such that $P \subseteq R$ and

$$\square x_0 x_1 \cdots x_m = x_0 + x_1 + \cdots + x_m, \quad * x_0 x_1 \cdots x_n = x_0 x_1 \cdots x_n$$

for every $x_\nu \in P$, then $P(\square, *)$ is an $[m, n]$—subring of R. And, if P is a generating subset of R, then R is said to be a covering ring of P; a ring R_1 isomorphic with R is also assumed to be a covering ring of P.

The following theorem is the main result of this paper.

Theorem. *Let P be an $[m, n]$—ring. There exists a covering ring R of P such that if R' is also a covering ring of P, then the identity mapping on P can be extended to a homomorphism of R onto R'. (The ring R is called the maximal covering of P). Let $\Omega = \{J\}$ be the collection of (two-sided) ideals of the ring R (i. e. of the maximal covering of P) such that $x, y \in P$ & $y \in J + x \Rightarrow y = x$. Then, R' is a covering ring of P if and only if $R' \cong R/J$ for some $J \in \Omega$. Every ideal $J \in \Omega$ is contained in a maximal member K of Ω. Then, every homomorphism of R/K onto a covering ring of P, which induces the identity mapping on P, is an isomorphism. (R/K is said to be a minimal covering of P).*

Note. Probably, there may exist two non-isomorphic ninimal coverings of an $[m, n]$—ring.