ЗА АСОЦИЈАТИВИТЕ

Прилози, прир.-мат. науки, МАНУ, Скопје, I 1 (1969), 9–20

Предмет на оваа работа се алгебрите во кои важи општиот асоцијативен закон, т. е. класата асоцијативи. На конкретен пример се покажува дека постојат асоцијативи што не се подасоцијативи на полугрупи; овој пример е специјален случај од примерот изнесен во [2]. Поголемиот дел од работава, сепак, е посветена на подасоцијативите од полугрупи. Така, разгледани се редуцибилните асоцијативи, т. е. асоцијативите што можат да се сместат во полугрупа без проширување на носителот на дадениот асоцијатив, како и подасоцијативите од комутативни полугрупи. Во поголемиот дел на работава се претпоставува дека во соодветните асоцијативи е определена идентичната унарна операција, но во последниот дел се покажува дека со тоа не е намалена општоста.

1. *Асоцијативи.* Нека F е фамилија финитарни операции во множеството А. Притоа, ако $f \in F$ е $n+1$-тарна операција ќе пишуваме $n=n_f$, и ќе претпоставуваме дека $n_f \geqslant o$, т. е. дека во F нема нултарни операции.

Ќе пишуваме

$$f\ x_0\ x_1 \dots x_{n_f} = y \tag{1.1}$$

ако низата $x_0, x_1, \dots, x_{n_f} \in A$ се пресликува во y со операцијата $f \in F$.

За алгебрата $A(F)$ велиме дека е асоцијатив ако се исполнети следните услови:

(i) За секоја двојка операции $f, g \in F$ и природен број $r : r \leqslant n_f$, е исполнет идентитетот:

$$f\ g\ x_0 \dots x_{n_f+n_g} = f x_0 \dots x_{r-1}\ g\ x_r \dots x_{n_f+n_g}\,. \tag{1.2}$$

(ii) Ако $f_1, \dots, f_k, g_1, g_2, \dots g_s \in F$, при што

$$n_{f_1} + n_{f_2} + \dots + n_{f_k} = n = n_{g_1} + n_{g_2} + \dots + n_{g_s},$$

тогаш е задоволен следниот идентитет:

$$f_1\ f_2 \dots f_k\ x_o\ x_1 \dots x_n = g_o\ g_1 \dots g_s\ x_o\ x_1 \dots x_n. \tag{1.3}$$

Нека $f_o, f_1, \dots, f_k$ е низа операции од F и нека $0 \leqslant i_v \leqslant i_{v+1} \leqslant$ $\leqslant n_0 + n_1 + \dots + n_v$ каде што $n_v = n_{f_v}$. Можеме да го формираме следниот сложен производ:

$$f_0\ x_0 \dots x_{i_1-1} f_1\ x_{i_1} \dots x_{i_k-1}\ f_k\ x_{i_k} \dots x_n \tag{1.4}$$

каде што $n = n_0 + n_1 + \dots + n_k$ (Се разбира, за да се осмисли изразот (1.4), треба да се даде соодветна рекурсивна дефиниција.)

Ако $A(F)$ е асоцијатив, тогаш со помош на (i) и (ii) лесно се добива дека сложениот производ (1.4) не зависи од низата $i_1, i_2, \dots, i_k$, ниту од низата операции $f_0, f_1, \dots, f_k$, а само од низата $x_0, x_1, \dots, x_n$ елементи на A. Специјално, ако $n_f = n_g$, тогаш од (ii) добиваме дека:

$$f\ x_0\ x_1 \dots x_n = g\ x_0\ x_1 \dots x_n, \tag{1.5}$$

за секој $x_v \in A$, т. е. дека f и g се еднакви како пресликувања. Затоа, можеме да сметаме дека за секој ненегативен цел број n постои најмногу една операција f таква што $n = n_f$.

Нека $A(F)$ е асоцијатив и нека J е множеството ненегативни цели броеви определено со $n \in J \Leftrightarrow (\exists f \in F)\ n = n_f$. За да го истакнеме ова, ќе кажеме дека A е J-асоцијатив. Нека $[J]$ е адитивната полугрупа генерирана од J, т. е.

$$m \in J \Leftrightarrow (\exists n_1, \ldots, n_k \in J)\ m = n_1 + n_2 + \ldots + n_k. \tag{1.6}$$

Ако f_i е $n_i + 1$-тарната операција на J-асоцијативот A, тогаш ставајќи

$$f\ x_0\ x_1 \ldots x_m = f_1\ f_2 \ldots f_k\ x_0\ x_1 \ldots x_m \tag{1.7}$$

добиваме $m + 1$-тарна операција во A, којашто, според (ii), не зависи од начинот по кој m е претставен како збир на елементи од J. Со тоа, за секој $m \in [J]$ определуваме по една операција f. Јасно е дека и добиената алгебра е асоцијатив. За натаму, обично, ќе сметаме дека $[J] = J$, т. е. дека J е полугрупа во однос на операцијата собирање.

Ако во еден асоцијатив нема унарна операција, тогаш додавајќи ја идентичната унарна операција e: $e(x) = x$, добиваме алгебра којашто исто така е асоцијатив. Но, може да се случи да постои и неидентична унарна операција. Таков асоцијатив се добива, ако на пример, во едно множество A (со барем два различни елементи) ставиме $f_n\ x_0\ x_1 \ldots x_n = a$ каде што a е фиксен елемент од A. За натаму, сепак, ќе претпоставуваме дека во еден асоцијатив е дефинирана идентичната унарна операција. Во последниот дел ќе покажеме дека резултатите што ќе бидат добиени за овие асоцијативи можат, на соодветен начин, да се пренесат и на асоцијативите со неидентична унарна операција.

Нека A е J-асоцијатив, каде што J е потполугрупа од адитивната полугрупа на ненегативните цели броеви, при што $0 \in J$. Фактот што за секој $n \in J$ е определена една и само една $n + 1$-нарна операција $f \in F$, ни дозволува за сите операции да употребуваме иста ознака; на пример, f. Обично, за натаму ќе пишуваме $(x_0\ x_1 \ldots x_n)$ за резултатот на примената на операцијата, т. е.

$$f\ x_0\ x_1 \ldots x_n = (x_0\ x_1 \ldots x_n). \tag{1.8}$$

(Според тоа, имајќи предвид дека претпоставуваме дека во асоцијативот се содржи идентичната унарна опарација, имаме $(x) = x$.)

2. *Подасоцијативи на полугрупи.* Нека S е полугрупа, а J множество ненегативни цели броеви. За помножеството $A \subseteq S$ велиме дека е J-подасоцијатив од полугрупата S, ако е исполнет следниов услов:

$$n \in J \,\&\, a_0, a_1 \ldots, a_n \in A \Rightarrow a_0 \cdot a_1 \ldots a_n \in A. \tag{2.1}$$

Според тоа, A е J-подасоцијатив од полугрупата S, ако и само ако A е подалгебра од алгебрата $S(F)$ определена со:

$$n \in J \,\&\, x_0, x_1 \ldots, x_n \in S \Rightarrow (x_0\, x_1 \ldots x_n) = x_0\, x_1 \ldots x_n. \tag{2.1}$$

Ако J-асоцијативот A е J-подасоцијатив од полугрупата S, и ако A е генераторно множество на S, тогаш велиме дека S е покривка на A. За покривката $И$ велиме дека е максимална, ако за секоја покривка S идентичното пресликување $a \to a$ од A во A може да се прошири до хомоморфизам од U во S.

Во работата [1] (теоремата 3) е формулиран (без доказ) став во кој се тврди дека секој J-асоцијатив A може да се покрие со полугрупа. Но, тој резултат не е точен, како што се гледа од следниов едноставен

ПРИМЕР. Нека A е множество со барем три различни елементи a, b, c и нека во A определиме две операции f и g со: $f\ cccc = b$, $f\ xyzu = a$, ако барем еден од елементите x, y, z, u е различен од c, и $gxyz = a$, за секои x, y, $z \in A$. Лесно се проверува дека $A(f, g)$ е асоцијатив, па, значи, можеме да ставиме $f\, x\, yzu = (x\, yzu)$, $g\, xyz = (xyz)$. Да претпоставиме дека овој асоцијатив е подасоцијатив на некоја полугрупа S. Тогаш, би имале:

$$b=(c\,c\,c\,c)=c\cdot c\cdot c\cdot c=c(c\,c\,c)=c\;\;a=c\,(b\,b\,b)=(c\;\;b\,b\,b)=a,$$
што противречи на претпоставката дека a и b се различни.

Во [2] е покажано дека ако во J не постои елемент n, таков што сите други елементи на J се делат со n, тогаш постои J-асоцијатив што не е подасоцијатив на полугрупа.

Теоремата што ќе ја докажеме подолу, дава извесна претстава за структурата на асоцијативите што се подасоцијативи на полугрупи.

ТЕОРЕМА. Нека A е J-асоцијатив и нека Т е полугрупата што е слободно генерирана од множеството A, т, е. T се состои од сите конечни низи $a_1\;a_2\ldots a_k$, каде што $a_v\in A$, а операцијата во T е обичното суперпонирање на низи. Да ја означиме со α минималната конгруенција во T што го задоволува условот:

$$a=(a_0\,a_1\ldots a_n)\text{ во }A\Rightarrow a\;\alpha\;a_0\,a_1\ldots a_n \tag{2.2}$$

Рестрикцијата β од α на множеството A е конгруенција во J-асоцијативот A, и притоа J-асоцијативот A/β е J-подасоцијатив од полугрупа, а имено може да се смета дека T/α е максималната покривка на A/β. Ако γ е конгруенција во J-асоцијативот A, таква што A/γ е J-подасоцијатив на некоја полугрупа, тогаш $\beta\subseteq\gamma$, т. е. β е минималната конгруенција во A, таква што A/β е J-подасоцијатив на некоја полугрупа.

Доказ. **Ќе дадеме прво поблизок опис на конгруенцијата α.**

Нека $a_1\ldots a_{i-1}\;a_i\;a_{i-1}\ldots a_k\in T$, и нека во J-асоцијативот A е точно равенството $a_i=(b_0\,b_1\ldots b_n)$. Тогаш пишуваме:

$$a_1\ldots a_k\vdash a_1\ldots a_{i-1}\;b_0\ldots\;b_n\,a_{i-1}\ldots a_k \tag{2.3}$$

Исто така

$$u\dashv\vdash v\Leftrightarrow u\vdash v\vee v\vdash u, \tag{2.4}$$

$$u\;\alpha\;v\Leftrightarrow(\exists\,u_1,\,u_2,\ldots,\,u_k\in T) \tag{2.5}$$

$$u\dashv\vdash u_1\dashv\vdash u_2\dashv\vdash\ldots\dashv\vdash u_k\dashv\vdash v.$$

Поради $(a)=a$, $\vdash$ е рефлексивна релација во T, од што следува дека $\dashv\vdash$ е рефлексивна и симетрична релација, а потоа и дека α е еквивалентност во T. Лесно се уочува и дека α е минималната конгруенција во T што го задоволува условот (2.2).

Да докажеме дека β е конгруенција во J-асоцијативот A. Уочуваме прво дека:

$$a'\,\beta\,a''\Leftrightarrow a',a''\in A\;\&\;a'\,\alpha\,a''. \tag{2.6}$$

Нека a', $a''\in A$ и $a'\,\beta\,a''$, т. е. $a'\,\alpha\,a''$.

Тогаш за секој $n\in J$, $v\colon 1\le v\le n$, и низа a_1, $a_2,\ldots a_n\in A$, имаме

$$a_1\ldots\;a_{v-1}\,a'\;\;a_v\ldots a_n\;\alpha\;a_1\ldots a_{v-1}\;\;a''\;a_v\ldots a_n,$$

а исто така и:

$$(a_1\ldots a_{v-1}\;\;a'\;\;a_v\ldots a_n)\;\;\alpha\;\;a_1\ldots a_{v-1}\;\;a'\;\;a_v\ldots a_n$$

$$(a_1\ldots a_{v-1}\;\;a''\;\;a_v\ldots a_n)\;\;\alpha\;\;a_1\ldots a_{v-1}\;\;a''\;\;a_v\ldots a_n,$$

од што следува:

$$(a_1\ldots a_{v-1}\;\;a'\;\;a_v\ldots a_n)\;\beta\;(a_1\ldots a_{v-1}\;\;a''\;\;a_v\ldots a_n),$$

па, значи, добивме дека β е конгруенција во J-асоцијативот A.

Ако $a\in A$, нека со a^α ја означиме класата на еквивалентноста α во која се содржи a; во иста смисла се употребува и ознаката a^β. Јасно е дека пресликувањето:

$$\varphi\colon a^\beta\to a^\alpha$$

е инјекција од A/β во T/α. Притоа, ако $n\in J$, $a_v\in A$, и $a=(a_0\,a_1\ldots a_n)$ во A, имаме

$$a^{\beta} = (a_0^{\beta}\ a_1^{\beta} \dots\ a_n^{\beta}) \text{ и } a^{\alpha} = a_0^{\alpha}\ a_1^{\alpha} \dots\ a_n^{\alpha},$$

од што следува дека φ е и мономорфизам. Според тоа, можеме да сметаме дека A/β е J-подасоцијатив на полугрупата $M = T/\alpha$, со тоа што ќе се земе дека $a^{\beta} = a^{\alpha}$.

Јасно е дека M е генерирана од A/β, т. е. дека M е покривка на A/β.

Нека S е било која покривка на A/β, т. е. S е полугрупа за која A/β е J-подасоцијатив, а освен тоа и генераторно множество. Од тоа што T е полугрупа слободно генерирана од A следува дека пресликувањето $a \to a^{\beta}$, може да се прошири до епиморфизам ψ од T во S. Ако $u = a_1\ a_2 \dots a_k \in T$, тогаш имаме:

$$\psi\ : u \to a_1^{\beta}\ a_2^{\beta} \dots\ a_k^{\beta}$$

па за $a_i = (b_0\ b_1 \dots b_n)$ во J-асоцијативот A, ќе имаме $a_i^{\beta} = b_0^{\beta}\ b_1^{\beta} \dots b_n^{\beta}$, од што следува дека при $u \vdash v$ имаме $\psi u = \psi v$, а потоа и дека $u\, \alpha\, v \Rightarrow \psi u = \psi v$, т. е. дека

$$\alpha \subseteq ker\ \psi$$

Од последното следува дека ψ индуцира епиморфизам φ од $M = T/\alpha$ во S.

Докажавме, значи, дека M е максимална покривка на асоцијативот A/β.

Да претпоставиме дека γ е конгруенција во J-асоцијативот A, таква што A/γ е J-подасоцијатив на полугрупата S. Имајќи предвид дека T е слободно генерирано од A, добиваме дека пресликувањето $a \to a^{\gamma}$ може да се проширa до хомоморфизам ξ од T во S. Од (2.3) се гледа дека $u \vdash v \Rightarrow \xi u = \xi v$, од што следува дека $\alpha \subseteq ker\ \xi$, а потоа и дека $\beta \subseteq \gamma$.

Со тоа го комплетиравме доказот на теоремата.

Како специјален случај од последниот дел на докажаната теорема ја добиваме следнава

ПОСЛЕДИЦА. J-асоцијативот A е подасоцијатив на полугрупа, ако, и само ако, β е релацијата равенство.

3. *Подасоцијативи од еден асоцијатив.* Ако B е K-асоцијатив, $J \subseteq K$ и $A \subseteq B$, тогаш за A велиме дека е J-подасоцијатив од K-асоцијативот B, ако:

$$n \in J\ \&\ a_0,\ a_1, \dots a_n \in A \Rightarrow (a_0\, a_1 \dots a_n)\ \in A. \tag{3.1}$$

Во тој случај, ако A е генераторно множество на K-асоцијативот B, ќе велиме дека B е K-покривка на A. (Јасно е дека ако A е J-подасоцијатив од некој K-асоцијатив, тогаш A е и J-асоцијатив.)

Поимите за J-подасоцијатив од некој K-асоцијатив, како и за K-покривка на еден J-асоцијатив се обопштување на соодветните поими за J-подасоцијативи на полугрупи или пак за покривачки полугрупи. (Имено, за $K = N^0$ се добиваат тие специјални случаи.) На очигледен начин се обопштуваат сите резултати од претходниот дел.

При формулирањето на теорема што е обопштување на теоремата 2, наместо со слободната полугрупа T, се работи со слободниот K-асоцијатив U (слободно) генериран од множеството A; со други зборови, U е множеството на сите низи $a_0\ a_1 \dots a_m$, каде што $a_v \in A$, $m \in K$. Во U се дефинира релацијата α на ист начин, а потоа и обопштува теоремата 2. Ако α го индуцира равенството на A, тогаш (и само тогаш) постои K-покривка, а $M = U/\alpha$, е имено, максималната K-покривка на J-асоцијативот A. Ако Λ е фамилијата од сите конгруенции во максималната K-покривка M што го индуцираат равенството на множеството A, тогаш B е K-покривка на J-асоцијативот A, ако, и само ако, $B \cong M/\rho$ за некоја конгренција $\rho \in \Lambda$.

Да споменеме уште еден резултат. Нека A е J-асоцијатив слободно генериран од множеството C, и нека B е K-асоцијативот слободно генериран од истото множество C, каде што претпоставуваме дека $J \subseteq K$. Тогаш B е K-покривка на A.

4. *Редуцибилни асоцијативи.* Како и во претходниот дел, ќе претпоставуваме дека J и K се потполугрупи од $N^0(+)$ при што $O \in J \subseteq K$.

За J-асоцијативот A велиме дека е K-редуцибилен, ако постои негова K-покривка дефинирана на истото множество A. Со други зборови, A е K-редуцибилен, ако за секој $m \in K \setminus J$ може во A да се определи по една $m+1$-тарна операција, така што, заедно со операциите на дадениот J-асоцијатив, A да постане K-асоцијатив. Нужен и доволен услов за K-редуцибилност се добива лесно, ако се претпостави дека A има K-покривка. Имено, во тој случај, ако M е максималната K-покривка, и ако Λ е фамилијата конгруенции во M што го индуцираат равенството на A, тогаш условот за K-редуцибилност е еквивалентен со следниот:

$$(\exists \rho \in \Lambda)\ (\forall u \in \mathrm{M})\ (\exists a \in \mathrm{A})\ a \rho u. \tag{4.1}$$

Но, (4.1) не дава многу поблизок опис на поимот K-редуцибилност, отколку погоре дадената дефиниција на овој поим.

Ќе испитаме сега еден специјален вид редуцибилни асоцијативи.

ТЕОРЕМА. Нека k е најголемиот заеднички делител на елементите од J, и нека $K = \{o, k, 2k, \ldots, n \cdot k, \ldots\} = \{n \cdot k;\ n \in N^0\}$. Нека A е J-асоцијатив, којшто може да се покрие со полугрупа. Ако освен тоа постои $n \in J$, $n \geq 1$, таков што:

$$(\forall a \in A)\ (\exists a_0, a_1, \ldots, a_n \in A)\ a = (a_0\ a_1 \ldots a_n), \tag{4.2}$$

тогаш A е K-редуцибилен, и сите K-покривки на A се изоморфни.

Доказ. Ќе покажеме прво дека условот (4.2) е исполнет за секој елемент $m \in J$. Прво, нека ја воведеме ознаката:

$$A^{m+1} = \{(a_0\, a_1 \ldots a_m);\ a_0, a_1, \ldots, a_m \in A\}. \tag{4.3}$$

Тогаш, (4.2) го добиваме следниот едноставен облик

$$A^{n+1} = A \tag{4.2'}$$

Ако $m \in J$, од (4.2) се добива прво $A^{mn+1} = A$, а имајќи предвид дека $A^{mn+1} \subseteq A^{m+1}$, добиваме $A^{m+1} = A$, т. е. дека условот (4.2) е навистина исполнет за секој $n \in J$.

Нека $J = \{o, n_1, n_2, \ldots\}$, каде што $n_v < n_{v+1}$. Нека d_1 е најголемиот заеднички делител на n_1 и n_2, и воопшо d_{v+1} нека биде најголемиот заеднички делител на d_v и n_{v+2}. Така, добиваме опаднувачка низа од природни броеви $d_1, d_2, \ldots, d_v, d_{v+1} \ldots$, од што следува дека постои i така што $d_i = d_{i+1} = d_{i+2} = \ldots$, па значи добиваме дека $d_i = k$ е најголемиот заеднички делител на елементите од J. Од начинот на кој е добиен $k = d_i$ следува дека k е најголем заеднички делител на подмножеството $\{n_1, n_2, \ldots, n_{i-1}\}$ од J.

Нека J-асоцијативот A го покриеме со полугрупа S.

Ако при делење на n_2 со n_1 се добие количник q и остаток r (т. е. ако $n_2 = qn_1 + r$), во S ќе имаме:

$$A = A^{n_2+1} = A^{qn_1+1}\ A^r = AA^r = A^{r+1}$$

Потоа, делејќи го n_1 со r ($n_1 = qr + r'$, $0 \leq r' < r$), добиваме $A = A^{r'+1}$, и продолжувајќи ја истата постапка ќе добиеме

$$A = A^{d_1+1},$$

каде што d_1 е најголемиот заеднички делител на n_1 и n_2. Работејќи потоа на ист начин со d_1 и n_3, и продожлувајќи ја таа постапка, ќе добиеме:

$$A = A^{k+1}.$$

Последното равенство кажува дека за секоја низа $a_0, a_1, \ldots a_k \in A$ производот $a_0\ a_1 \ldots a_k$ (во полугрупата S) е елемент на A, од што следува дека A е K-подасоцијатив на S, Ако во A определиме $K+1$ тарна операција со:

$$(a_0\ a_1 \ldots a_k) = a_0\ a_1 \ldots a_k,$$

добиваме K-асоцијатив A, кој е исто така и K-покривка на дадениот J-асоцијатив A.

Со тоа покажавме дека J-асоцијативот A е K-редуцибилен.

Преостанува да покажеме дека сите K-покривки на A се изоморфни. Заправо, ќе покажеме дека погоре добиената K-покривка A е единствената K-покривка на A.

Нека M е максималната K-покривка на A, и нека M е K-подасоцијатив на полугрупата S. Во тој случај, и A ќе биде J-подасоцијатив на S. Имајќи предвид дека A е генераторно множество за K-асоцијативот M, а и фактот што $K = \{nk;\ n \in N^0\}$, добиваме:

$$M = UA^{nk+1}, \quad n \in N^0,$$

но од друга страна, како што видовме погоре, имаме $A^{k+1} = A$, од што следува $M = A$ што и сакавме да добиеме.

Со тоа го комплетиравме доказот на теоремата.

За $k = 1$, ја добиваме и следнава

ПОСЛЕДИЦА. Нека A е J-подасоцијатив на полугрупа, и нека елементите од J немаат заеднички делител поголем од 1. Ако е исполнет условот (4.2) за некој $n \in J$, $n \geq 1$, тогаш постои полугрупа $A\ (\cdot)$, таква што

$$(a_0\ a_1 \ldots a_n) = a_0 \cdot a_1 \ldots a_n$$

за секои $n \in J$ и $a_v \in A$.

Фактот што во случајот кога сите елементи на K се делат со еден елемент $k \in K$, сите (неунарни) операции од еден K-асоцијатив A можат да се изразат со помош на една $k+1$-тарна операција, сугерира во овој случај да велиме дека A е k-асоцијатив. Според тоа, секоја полугрупа може да се смета за 1-асоцијатив.

Дека доволниот услов (4.2) за еден J-асоцијатив да биде K-редуцибилен не е потребен се гледа од следниов едноставен

ПРИМЕР. Ако $A = \{2, 3, \ldots, n+1, \ldots\}$ е множеството од сите природни броеви поголеми од 1, тогаш A е J-асоцијатив за секој J, во однос на обичната операција собирање. Следователно, A е K-редуцибилен асоцијатив за секое $K{:}\, J \subseteq K$, но при тоа равенството $(n+1)\ A = A$ не е точно ниту за еден природен број n.

5. *Подасоцијативи од комутативни полугрупи.* Нека S е комутативна полугрупа, а A J-подасоцијатив на S. Јасно е дека сите операции во овој J-асоцијатив се комутативни, т. е. дека

$$(a_0\ a_1 \ldots a_n) = (a_{\xi_0}\ a_{\xi_1} \ldots a_{\xi_n}), \tag{5.1}$$

За секои $n \in J$, $a_v \in A$ и секоја пермутација ξ на $0, 1 \ldots, n$. Примерот 2 е секако, комутативен асоцијатив, па значи постојат комутативни асоцијативи што не се подасоцијативи на полугрупи. Овде ќе докажеме дека ако еден асоцијатив може да се покрие со полугрупа, тогаш тој може да се покрие и со комутативна полугрупа.

ТЕОРЕМА. Нека M е максималната покривка на комутативниот J-асоцијатив A и нека δ е минималната конгруенција во M, таква што M/δ е комутативна полугрупа. Полугрупата M/δ е покривка на дадениот асоцијатив A. Ако S е комутативна покривка на A, тогаш пресликувањето $a^{\delta} \to a$ $(a \in A)$, може да се продолжи до хомоморфизам од M/δ во S. (Затоа, можеме да сметаме дека M/δ е максимална комутативна покривка на A.)

Полугрупата M е комутативна, ако и само ако множеството:

$$B = A \setminus \{a_0\ a_1 \ldots\ a_n);\ a_v \in A,\ n \in J\} \qquad (5.2)$$

не содржи повеќе од еден елемент. Во тој случај секоја покривка е комутативна. (При ова се претпоставува дека A не е полугрупа, т. е. дека $1 \notin J$.)

Доказ. Прво да дадеме опис на релацијата δ. Нека $s_0, s_1, \ldots s_m \in M$, а ξ нека биде пермутација на $0, 1, 2 \ldots m$. Во тој случај пишуваме

$$s_0\ s_1 \ldots\ s_m\ \gamma\ s_{\xi_0}\ s_{\xi_1} \ldots\ s_{\xi_m}. \qquad (5.3)$$

Лесно се покажува дека δ е транзитивното проширување на γ.

Да претпоставиме дака $a \in A$, $u \in M$ и $a \gamma u$. Според дефиницијата на γ, a и u можат да се претставaт во облик

$$a = s_0\ s_1 \ldots\ s_m,\ u = s_{\xi_0}\ s_{\xi_1} \ldots\ s_{\xi_m}, \qquad (5.4)$$

каде што ξ е пермутација на $0, 1, \ldots, m$. Имајќи предвид дека A е генераторно множество за M, можеме да претпоставиме дека $s_v \in A$. Во тој случај, поради комутативноста на дадениот J-асоцијатив A, имаме $a = u$, од што следува и:

$$a',\ a'' \in A\ \&\ a'\ \delta\ a'' \Rightarrow a' = a'',$$

што покажува дека M/δ е покривка на A.

Да претпоставиме сега дека S е произволна комутативна покривка на A. Од тоа што M е максимална покривка на A, следува дека идентичното пресликување $a \to a$ може да се прошири до епиморфизам φ од M во S. Поради комутативноста на S, имаме $\gamma \subseteq ker\ \varphi$, па и $\delta \subseteq ker\ \varphi$, од што следува дека φ индуцира епиморфизам φ^* од M/δ во S. Од сето тоа следува дека M/δ е максимална комутативна покривка на A.

Го докажавме значи првиот дел на теоремата.

Да претпоставиме дека сега B има барем два различни елементи a, b. Значи, ако $n \in J$ и $n > 0$, имаме

$$(\forall a_0\ a_1, \ldots, a_n \in A)\ a \neq (a_0\ a_1 \ldots\ a_n) \neq b. \qquad (5.5)$$

Нека T е полугрупата што е слободно генерирана од A и нека ab u, каде што $u \in T$, а релацијата $|\!-\!|$ е определена со (2.4). Од (2.3), (2.4) и (5.5) е јасно дека мора да биде $u = ab$. Од тоа следува дека $ab \,|\!\!\not-\!|\, ba$, па значи во полугрупата $M = T/\alpha$ имаме $ab \neq ba$, т. е. таа е некомутативна.

Преостанува случајот кога B нема повеќе од еден елемент. Да покажеме дека, во тој случај, секоја покривка S на A е комутативна.

Нека $a, b \in A$. Од направената претпоставка следува дека барем еден од овие елементи може да се претстави во облик $(a_0\ a_1 \ldots\ a_n)$, каде што $a_v \in A$, $n \in J$ и $0 < n$; нека тоа биде a. Тогаш, користејќи ја комутативноста на J-асоцијативот A, добиваме:

$$\begin{aligned} ab &= (a_0 \ldots a_n)\, b = a_0 \ldots a_n\, b = a_0\, (a_1 \cdots a_n\ b) = a_0\, (ba_1 \cdots a_n) \\ &= (a_0\, ba_1 \cdots a_{n-1})\, a_n = (ba_0\, a_1 \cdots a_{n-1})\, a_n = b\, (a_0\, a_1 \ldots a_n) = ba. \end{aligned} \qquad (5.6)$$

Ако се има предвид дека A е генераторно множество за S, од (5.6) добиваме дека S е комутативна полугрупа.

Со тоа го комплетиравме доказот на теоремата.

6. *Асоцијативи со неидентична унарна операција.* И покрај тоа што во 1 дадовме пример на асоцијатив со неидентична унарна операција, потоа претпоставувавме дека се работи за асоцијативи каде што таква унарна операција не постои. Во врска со тоа, се наложува прашањето кои од добиените резултати се точни ако таа претпоставка не се направи. Пред сè, да уочиме дека во 4 оваа претпоставка не ни беше потребна. Имено, ако е исполнет условот (4.2), тогаш ако во асоцијативот постои унарна операција f, таа мора да биде идентична, бидејќи ако во (4.2) ставиме $(a_0\ a_1 \dots a_n) = g\ a_0\ a_1 \dots a_n$, ќе имаме

$$f\ a = f\ a\ a_0\ a_1 \dots a_n = g\ a_0\ a_1 \dots a_n = a,$$

т. е. добиваме дека f е идентичната унарна операција.

Да претпоставиме сега дека во J-асоцијативот A постои неидентична унарна операција f. Како и досега, и во овој случај, ќе пишуваме $fx = (x)$, а исто така и

$$g\ x_0\ x_1 \dots x_n = (x_0\ x_1 \dots x_n) \text{ за секој } n \in J$$

Фактот што A е J-асоцијатив повлекува дека

$$(\forall n \in J)\ (x_0\ x_1 \dots x_n) = (y_0\ y_1 \dots y_n), \tag{6.1}$$

каде што

$$y_v = x \ \vee\ y_v = (x_v) \ \vee\ x_v = (y_v).$$

Нека $\overset{\frown}{J} = J \setminus \{o\}$. Можеме A да го сметаме за $\overset{\frown}{J}$-асоцијатив без унарна операција. Ако ја додадеме сега и идентичната унарна операција, ќе добиеме нов J-асоцијатив којшто се разликува од дадениот асоцијатив само во унарната операција. Со цел да ги разликуваме овие два асоцијатива, новиот ќе го означиме со J*.

Да претпоставиме сега дека J^*-асоцијативот A е покриен со полугрупа S. Во S дефинираме релација ξ со:

$$\begin{aligned} &t\ \xi\ s \Leftrightarrow (\exists k \geq 1,\ a_0, \dots, a_k, b_0, \dots, b_k \in A) \\ &\qquad a = b_v \vee a_v = (b_v) \vee b_v = (a_v),\ t = a_0\, a_1 \dots a_k,\ s = b_0\, b_1 \dots b_k. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Јасно е дека ξ е рефлексивна и симетрична релација и дека транзитивното проширување η од ξ е конгруенција во S. Факторполугрупата S/η ќе ја означиме со S^*.

Ќе покажеме дека η ги раздвојува елементите од a, т. е. дека

$$a, b \in A\ \&\ a\ \eta\ b \Rightarrow a = b. \tag{6.3}$$

Навистина, $a \in A\ \&\ a\ \xi\ s$ повлекува

$$a = a_0\ a_1 \dots a_k,\ s = b_0\ b_1 \dots b_k, \text{ каде што:}$$

$b_v = a \vee b_v = (a_v) \vee a_v = (b_v)$. Последното е можно само ако $k \in J$ и $k \geqslant 1$. Тогаш, според (6.2), добиваме:

$$a = (a_0 \dots a_k) = (b_0\ b_1 \dots b_k) = b_0\ b_1 \dots b = s.$$

Значи $s \in A$ и $s = a$. Од тоа следува и дека е исполнет условот (6.3). Од (6.3), пак, заклучуваме дека S може да се смета за покривка на дадениот J-асоцијатив. Имено S можеме да го сметаме за N^0-асоцијатив, каде што унарната операција $(\ )_*$ е дефинирана со:

$$\begin{aligned} &(a)_* = (a) \text{ За } a \in A \\ &(a_0\ a_1 \dots a_k)_* = a_0\ a_1 \dots a_k \text{ за } a_v \in A,\ k \geqslant 1. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Овој резултат ни укажува на тоа дека не ја намаливме битно општоста со тоа што претпоставуваме дека во асоцијативот нема неидентична унарна операција.

ЛИТЕРАТУРА

1. *G. Čupona*, On some primitive classes of universal algebras, Matematički Vesnik 3 (18) 1966, 105 — 108.

2. *G. Čupona*, Correction of a statement of the paper „On some primitive classes of universal algebras", Mat. Vesn.

SUMMARY
ON ASSOCIATIVES

Let $A\ (F)$ be a universal algebra without 0-ary operations, i. e. without constants. If $f \in F$ is an $n+1$-ary operation, then we write $n_f = n$, and $y = fx_0x_1 \ldots x_n$ if $f\colon (x_0, \ldots, x_n) \to y$. Let $f_0, f_1, \ldots, f_k \in F$, and $n = n_0 + n_1 + \ldots + n_k$, where $n_v = n_{f_v}$. If the integers $i_1, \ldots, i_k$ satisfy the conditions $0 \leqslant i_v \leqslant i_{v+1} \leqslant n_0 + \ldots + n_v$, then the following „continued product":

$$p\ x_0 \ldots x_n = f_0\ x_0 \ldots x_{i_1 - 1} f_1\ x_{i_1} \ldots f_k\ x_{i_k} \ldots x_n \tag{1}$$

can be defined in an obvious way. The algebra $A\ (F)$ is said to be an associative if two arbitrary continued products $p\ x_0 \ldots x_n$, $qx_0 \ldots x_n$ are equal, i. e. if the general associative law holds in $A\ (F)$.

An associative $A\ (F)$ is said to be a subassociative of a semigroup if there is a semigroup S, such that $A \subseteq S$, and

$$(\forall f \in F)\ (\forall\ x_0, \ldots, x_{n_f} \in A)\ f\ x_0 \ldots x_{n_f} = x_0 \cdot x_1 \ldots x_{n_f}. \tag{2}$$

If A is *a* generating subset of S, then S is said to be *a* covering semigroup of the associative $A\ (F)$. (Every semigroup S' isomorphic to S is also assumed to be *a* covering of $A\ (F)$.) The covering semigroup M of $A\ (F)$ is said to be *a* maximal one, if for an arbitrary covering S of $A\ (F)$, the identity mapping $a \to a\ (a \in A)$ can be extended to an epimorphism $\xi\colon M \to S$.

The following results are obtained in this paper.

1. Let $A\ (F)$ be an associative, and let T be the semigroup which is freely generated by the set A. If α is the minimal congruence on T, such that:

$$a = fa_1\ a_l \ldots a_n \text{ in } A\ (F) \Rightarrow$$
$$a\ \alpha\ a_0\ a_1 \ldots a_n \text{ in } T \tag{3}$$

then the restriction $\beta = \gamma | A$ of α on A is *a* congruence on $A\ (F)$, and the semigroup $M = T/\alpha$ is *a* maximal covering of the associative $A/\beta\ (F)$. The associative $A\ (F)$ is *a* subassociative of *a* semigroup, if, and only if, $\beta = \Delta_A$ is the diagonal in A, i. e. $a, b \in A\ \&\ a\ \alpha\ b \Rightarrow a = b$.

2. Let A (F) be an associative which can be covered by *a* semigroup, and suppose that there is an $f \in F$, such that $n = n_f > 1$, and

$$f\ A^{n+1} = \{f\ a_0 \ldots a_n;\ a_i \in A\} = A \tag{4}$$

If k is the greatest common divisor of the numbers of the set $J = \{n_f;\ f \in F\}$, then there is an associative $k+1$-ary operation g on A, such that:

$$(\forall f \in F)\ (\forall\ x_0, \ldots, x_n \in A)\ fx_0 \ldots x_{n_f} = \underbrace{g \ldots g}_{m_f}\ x_0 \ldots x_{n_f}, \tag{5}$$

where $n_f = m_f \cdot k$.

3. Let $A\ (F)$ be *a* subassociative of *a* semigroup. There is *a* commutative covering of A, if, and only if, all the operations of F are commutative. Then all the coverings of A are commutative, if and only if, the set

$$B = A \setminus \{fx_0 \ldots x_{n_f}\ ;\ x_i \in A, f \in F, n_f > 1\}$$

does not contain more than one element.

4. Let A be *a* set with at least three different elements a, b, c. Define two operations f and g on A by:

$$(\forall\ x, y, z, u \in A)\ gcccc = b,$$
$$(x, y, z, u) \neq (c, c, c, c) \Rightarrow gxyzu = a,$$
$$fxyz = a.$$

The algebra $A\ (f, g)$ is an associative which can not be covered by *a* semigroup.