АСОЦИЈАТИВИ СО КРАТЕЊЕ

Год. збор. ПМФ Скопје, 19 (1969), 5–14

Во работава се покажува дека секој асоцијатив со кратење е подасоцијатив на полугрупа, а се дава и карактеристика на класата асоцијативи што се подасоцијативи на полугрупи со кратење.

О. ПРЕТХОДНИ ДЕФИНИЦИИ

Нека $A(F)$ е алгебра без нултарни операции. Ако $f \in F$ е $k+1$-тарна операција, тогаш обично, пишуваме $n=n_f$, и $y=f\,x_0\,x_1 \ldots x_n$, ако f: $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \to y$. Ако $f_0, f_1 \ldots, f_k \in F$, $n_\nu = n_{f_\nu}$, $n=n_0+\ldots+n_k$, и ако $i_1, \ldots, i_k$ е низа не негативни цели броеви, такви што $i_\nu \leqslant i_{\nu+1} \leqslant n_0 + \ldots + n_\nu$, тогаш на очигледен начин се определува следниот „сложен производ" со должина n.

$$p\,x_0\,x_1 \ldots x_n = f_0 x_0 \ldots x_{i_1-1} f_1 x_{i_1} \ldots f_k\, x_{i_k} \ldots x_n \tag{0.1}$$

За алгебрата $A(F)$ велиме дека е асоцијатив, ако произволни два сложени производи со иста должина се еднакви. Од ова следува дека ако $f, g \in F$ и $n_f=n_g$, тогаш операциите f и g се еднакви како пресликувања. Затоа можеме да претпоставиме дека за даден ненегативен цел број k постои најмногу една операција. Ако ставиме $J=\{n_f; f \in F\}$ добиваме множество ненегативни цели броеви. Во овој случај велиме дека A е J-асоцијатив. Според ова, ако $n_1, n_2, \ldots, n_k$ се елементи од J, и ако $n=n_1+n_2+\ldots+n_k$, тогаш во A е еднозначно определен „производот" $f_1\,f_2 \ldots f_k\,x_0 x_1 \ldots x$, каде што $k_{f_\nu}=k_\nu$. Затоа знаците за операциите нема да ги пишуваме; тој производ ќе го пишуваме во облик $(x_0 x_1 \ldots x_n)$. Исто така, ќе претпоставуваме и дека J е потполугрупа од полугрупата $N^0(+)$[1]. Ако $0 \in J$, ставајќи $(x)=x$, добиваме пак асоцијатив, но постојат асоцијативи кај коишто $(a) \neq a$, за некое a.

За J-асоцијативот A велиме дека е *J-асоцијатив* со лево (десно) кратење ако

$$(\forall n \in J)\ (a_1 \ldots a_n\,x) = (a_1 \ldots a_n\,y) \Rightarrow x = y \tag{0.2}$$

$$(\forall n \in J)\ (x\,a_1 \ldots a_n) = (y\,a_1 \ldots a_n) \Rightarrow y = x \tag{0.2'}$$

Еден J-асоцијатив што е асоцијатив со лево и со десно кратење, велиме дека е J-асоцијатив со кратење. J-група е секој J-асоцијатив A што го задоволува условот:

$$(\forall k \in J)\ (\forall\, a_1, \ldots, a_n,\ b \in A)\ (\exists\, x, y \in A)\ (a_1 \ldots a_n\,x) = (y\,a_1 \ldots a_n) = b. \tag{0.3}$$

Лесно се покажува дека ако условот за кратливост (0.2), или (0.2'), е задоволен за некој $k \in J, k \geq 1$, тогаш ќе биде задоволен и за секој $k \in J$. Истото се однесува и за (0.3). Од овде следува дека не е битно што претпоставуваме дека J е потполугрупа од $N^o(+)$, а не поризволно подмножество на N^o.

Ќе воведеме уште неколку поими.

Нека B е K-асоцијатив, $A \subseteq B$ и $J \subseteq K$. Ако

$$(\forall n \in J)\ a_0, a_1, \ldots, a_n \in A \Rightarrow (a_0 a_1 \ldots a_n) \in A, \tag{0.4}$$

тогаш велиме дека A е J-подасоцијатив од K-асоцијативот B.

Ако $J=\{n\,k;\ k=0, 1, \ldots\}$, тогаш еден J-асоцијатив се вика и n-асоцијатив. Во таа смисла полугрупите можат да се сметаат за 1-асоцијативи. Евидентно е значението на поимите: J-подасоцијатив од полугрупа, или пак J-подргупа од а) K-група, в) група.

1. АСОЦИЈАТИВИ СО КРАТЕЊЕ.

Ќе ја докажеме сега следнава

ТЕОРЕМА. Секој J-асоцијатив со лево (десно) кратење е J-подасоцијатив на некоја полугрупа.

Доказ

(i) Да покажеме прво дека во еден асоцијатив A со лево кратење не постои неидентична унарна операција. Навистина, поради $((x))=(x)$, ако во (0.2) ставиме $n=0$ и $y=(x)$, добиваме дека $(\forall\, x \in A)\ (x)=x$. Ова ни дозволува да претпоставуваме дека $0 \in J$ и дека $(x)=x$.

[1] N^0 е множеството ненегативни цели броеви.

(ii) Нека претпоставиме сега дека A е произволен J-асоцијатив со кратење, а T полугрупата што е слободно генерирана од множеството A, т. е. T се состои од сите конечни низи, $a_1 a_2 \ldots a_k$, каде што $a_\nu \in A$, а операцијата во T е обичното суперпонирање на низи. Во T ја определуваме релацијата ρ, на следниот начин: Ако $u = b_0\, b_1 \ldots b_i$, $v = c_0 c_1 \ldots c_j$ се два елемента од T, каде што b_ν, $c_\lambda \in A$, тогаш:

$$
\begin{aligned}
u \rho v \Leftrightarrow (\exists\, & a_0, \ldots, a_m \in A;\ n_0, \ldots, n_i, m_0, \ldots, m_j \in J) \\
& m = m_0 + \cdots + m_j + j = n_0 + \cdots + n_i + i \\
& b_0 = (a_0 \ldots, a_{n_0}),\ b_1 = (a_{n_0+1} \ldots a_{n_1+n_0+1}), \ldots, b_i = (\ldots a_m) \\
& c_0 = (a_0 \ldots a_{n_0}),\ c_1 = (a_{m_0+1} \ldots a_{m_0+m_1+1}), \ldots, c_j = (\ldots a_m).
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

Потоа нека α е транзитивното проширување на ρ, т. е.

$$u \alpha v \Leftrightarrow (\exists\ u_1 \ldots, u_s \in T)\ u \rho u_1,\ u_1 \rho u_2, \ldots,\ u_s \rho v \tag{1.2}$$

Имајќи предвид дека $(a) = a$, за секој $a \in A$, добиваме дека ρ е рефлексивна релација, а јасна е и нејзината симетричност. Според тоа, α е еквивалетност во T. Имајќи предвид дека

$$u \rho v \Rightarrow uw \rho vw\ \&\ wu \rho wv \tag{1.3}$$

добиваме и дека α е конгруенција во полугрупата T.

(iii) Нека $M = T/\alpha$, и нека, за секој $u \in T$, со u^α ја означиме класата на еквивалентноста α во која се содржи u. Во иста смисла: $A^\alpha = \{a^\alpha;\ a \in A\}$.

Ако $n \in J$, $a_0, \ldots, a_n$, $a \in A$ и $a = (a_0 a_1 \ldots a_n)$ во A, тогаш имаме $a \rho a_0\, a_1 \ldots a_n$ во T, од што следува дека:

$$a^\alpha = a_0^\alpha\, a_1^\alpha \ldots a_n^\alpha, \text{ во } M,$$

па значи добиваме дека A^α е J-подасоцијатив од полугрупата M, а и дека пресликувањето φ: $a \to a^\alpha$ е епиморфизам од J-асоцијативот A во J-асоцијативот A^α. Ќе покажеме во (iv) дека φ е изоморфизам, од што ќе следува дека можеме да сметаме дека A е J-подасоцијатив на M.

(iv) Овде ќе покажеме дека

$$a, b \in A\ \&\ a \alpha b \Rightarrow a = b$$

од што ќе следува дека φ е навистина изоморфизам.

Нека $a, b \in A$ и $a \alpha b$. Тогаш постојат $u_1, \ldots, u_k \in T$, такви што:

$$a \rho u_1 \rho u_2 \rho \ldots \rho u_k \rho b\,. \tag{1.4}$$

Нека

$$u_\nu = c_{\nu 0}\, c_{\nu 1} \ldots c_{\nu\, i_\nu}\,, \tag{1.5}$$

каде што $c_{\nu\lambda} \in A$. Според (1.1), (1.4) и (1.5), постои низа

$$a_{00}\,, a_{01}\,, \ldots, a_{0m_0}\,, a_{10}, \ldots, a_{1m_1}, \ldots, a_{k0}\,, \ldots, a_{km_k}\,,$$

чии членови се во A, и броеви $p_{\nu\lambda}$, $q_{\nu\lambda}$, такви што:

$$m_0,\ m_k,\ p_{\nu\lambda},\ q_{\nu\lambda},\ m_{\nu-1} - i_\nu,\ m_\nu - i_\nu \in J, \tag{1.6}$$

$$\sum_{\lambda=0}^{i_\nu} p_{\nu\lambda} + i_\nu = m_{\nu-1},\ \sum_{\lambda=0}^{i_\nu} q_{\nu\lambda} + i_\nu = m_\nu\,, \tag{1.7}$$

и

$$
\begin{aligned}
a &= (a_{00} \ldots a_{0\, m_0}),\ b = (a_{k0} \ldots a_{km_k}), \\
c_{\nu 0} &= (a_{\nu-1\, 0} \ldots a_{\nu-1\, p_{\nu 0}}) = (a_{\nu 0} \ldots a_{\nu\, q_{\nu 0}}) \\
c_{\nu 1} &= (a_{\nu-1\, p_{\nu 0}+1} \ldots a_{\nu-1\, p_{\nu 0}+p_{\nu 1}+1}) = (a_{\nu\, q_{\nu 0}+1} \ldots a_{\nu\, q_{\nu 0}+q_{\nu 1}+1}) \\
&\vdots \\
c_{\nu i_\nu} &= (\ldots a_{\nu-1\, m_{\nu-1}}) = (\ldots a_{\nu m_\nu})
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

Нека ставиме:

$$s = \sum_{\nu=1}^{k} (m_{\nu-1} - i_\nu) + \sum_{\nu=1}^{k} (m_\nu - i_\nu),\ s_\nu = s - (m_{\nu-1} - i_\nu) \tag{1.9}$$

Според (1.6), s и s_ν се елементи од J.

Нека e е произволен елемент на A и нека ставиме:

$$a' = (\underbrace{e \ldots e}_{s} a),\ b' = (\underbrace{e \ldots e}_{s} b) \tag{1.10}$$

Ќе покажеме дека $a' = b'$, од што ќе следува и $a = b$.

Ги користиме равенствата (1.8) и тоа што s, s_ν, $m_{\nu-1} - i_\nu \in J$.

$$a' = (\underbrace{e \ldots e}_{s} a) = (\underbrace{e \ldots e}_{s} (a_{00} \ldots a_{0m_0})) = (\underbrace{e \ldots e}_{s_1} (\underbrace{e \ldots e}_{m_0 - i_1} c_{10}\, c_{11} \ldots c_{1\, i_1})) =$$

$$= (\underbrace{e \dots e}_{s}\ a_{10} \dots a_{1m_1}) = (\underbrace{e \dots e}_{s_2}\ (\underbrace{e \dots e}_{m_1 - i_2}\ c_{20}\, c_{21} \dots c_{2\, i_2})) =$$
$$= (\underbrace{e \dots e}_{s}\ a_{20} \dots a_{2m_2}) = \dots = (\underbrace{e \dots e}_{s}\ a_{k0} \dots a_{km_k}) =$$
$$= (\underbrace{e \dots e}_{s}\ (a_{k0} \dots a_{km_k})) = (\underbrace{e \dots e}_{s}\ b) = b'.$$

(v) Од (i)–(iv) следува дека секој асоцијатив со лево кратење е подасоцијатив од некоја полугрупа. Од причини на симетрија истото се однесува и за асоцијативите со десно кратење. Според тоа, доказот на теоремата е комплетиран.

(Да забележиме дека условот за кратливост е користен само во (iv) и тоа само еден специјален случај од тој услов).

2. J-ГРУПИ

Овде ќе покажеме дека поимот J-група не е битно обопштување на поимот k-група.

ТЕОРЕМА. Секоја J-група е J-подгрупа на некоја група. Нека A е J-група и нека k е најголемиот заеднички делител на елементите од J. На мно жеството A може да се изгради структура на k-група, за која дадената J-група е J-подгрупа.

Доказ. Добро е познато дека ако A е n-група, тогаш за секој i: $0 \leqslant i \leqslant n$, и секоја низа елементи $a_1, \dots, a_n, b \in A$, равенката $(a_1 \dots a_i\, x\, a_{i+1} \dots a_n) = b$ е еднозначно решлива по x во A. Според тоа, секоја J-група е J-асоцијатив со кратење, од што, според теоремата 1, следува дека J-групата A е J-подасоцијатив од некоја полугрупа S. Земајќи G да е потполугрупата на S генерирана од A, лесно се уочува дека G е и група, од што ќе следува првиот дел на теоремата.

Имајќи предвид дека кај секоја J-група имаме:

$$(\forall n \in J)\ \ A = \{(a_0\, a_1 \dots a_n);\ \ a_\nu \in A\}$$

според теоремата 4, од работата [2], добиваме дека во A може да се дефинира $k+1$-тарна операција, така што A да постане k-асоцијатив, за кој што дадената J-група A е J-подасоцијатив. Според забелешката направена на крајот од уводот, заклучуваме дека добиениот k-асоцијатив A е и k-група.

Со тоа го комплетиравме доказот на теоремата.

За $k=1$, од вториот дел на теоремата се добива и следната

ПОСЛЕДИЦА. Нека A е J-група при што елементите од J немаат заеднички делител поголем од 1. Тогаш постои бинарна операција „$\cdot$" во A, таква што $A(\cdot)$ е група и притоа:

$$(\forall n \in J)\ (\forall\, x_0, \dots, x_n \in A)\ (x_0 \dots x_n) = x_0 \cdot x_1 \dots x_n.$$

3. ПОДАСОЦИЈАТИВИ НА ПОЛУГРУПИ СО КРАТЕЊЕ

Во работата [1] (пример 3.1 стр. 9) е покажано дека постојат асоцијативи со кратење коишто не се подасоцијативи на полугрупи со кратење. Овде ќе дадеме карактеристика на класата асоцијативи што се подасоцијативи на полугрупи со кратење. Притоа, ќе докажеме соодветен резултат за случај на лева кратливост, а од причини на симетрија ќе биде точен соодветен резултат и за десната кратливост, па затоа таков резултат не се ни формулира.

ТЕОРЕМА. J-асоцијативот A е J-подасоцијатив на некоја полугрупа со лево кратење, ако и само ако се исполнети следните два услова

1) A е J-асоцијатив со лево кратење.

2) Ако $s+k$, $s+m \in J$ и ако е точно равенството

$$(a_1 \dots a_s\ b_0 \dots b_k) = (a_1 \dots a_s\ c_0 \dots c_m) \tag{3.1}$$

за некоја низа $a_1, \dots, a_n \in A$, тогаш за секој број k што го задоволува условот $n+k$, $n+m \in J$, и секоја низа елементи $x_1, \dots, x_n \in A$ е точно равенството:

$$(x_1 \dots x_n\ b_0 \dots b_k) = (x_1 \dots x_n\ c_0 \dots c_m) \tag{3.2}$$

Доказ. Доказот на теоремата во еден смер е очигледен. Имено, ако A е J-подасоцијатив на полугрупа со лево кратење S, и ако во A имаме

$$(a_1 \dots a_n\, x) = (a_1 \dots a_n\, y),\ \text{т. е. во } S\text{: } a_1 \dots a_n x = a_1 \dots a_n\, y,$$

тогаш ќе добиеме $x = y$. Значи, A е J-асоцијатив со лево кратење, т. е. исполнет е условот (1). Од исти причини, ако е исполнето равенството (3.1),

добиваме дека во S е точно равенството $b_0 b_1 \dots b_k = c_0 c_1 \dots c_m$, па и
$$x_1 \dots x_n\ b_0 \dots b_k = x_1 \dots x_n\ c_0 \dots c_m,$$
т. е. (3.2). (Да забележиме дека условот 1) е специјален случај од 2), а се добива имено, за $n=k=m=0$; притоа, треба да се претпостави и дека во A е определена идентичната унарна операција.)

Да претпоставивме сега дека A е J-асоцијатив што ги задоволува и двата услова 1) и 2). Нека M е полугрупата добиена при доказот на теоремата 1, т. е. $M=T/\alpha$, каде што T е полугрупата слободно генерирана од A, а α транзитивното проширување на релацијата ρ дефинирана со (1.1).

Во M ја определуваме релацијата τ со:
$$u \tau v \Leftrightarrow (\exists\, w \in M)\ w u = w v \tag{3.3}$$
Ќе докажеме дека τ е конгруенција во полугрупата M и дека полугрупата M/τ е полугрупа со кратење во која што дадениот J-асоцијатив A може да се смести како J-подасоцијатив.

Доказот ќе го спроведеме во неколку етапи.

(i) Ќе покажеме прво дека ако во M е точно равенство од облик
$$a_0 a_1 \dots a_i = b_0 b_1 \dots b_j, \tag{3.4}$$
каде што $a_\nu, b_\lambda \in A$, тогаш постојат $m, n \in J$, такви што
$$m+i=n+j. \tag{3.5}$$
Во слободната полугрупа T, равенството (3.4) добива облик:
$$a_0\ a_1 \dots a_i\ \alpha\ b_0 b_1 \dots b_j\,, \tag{3.4'}$$
Да претпоставиме прво дека
$$a_0 a_1 \dots a_i\ \rho\ b_0 b_1 \dots b_j. \tag{3.4'}$$
Од дефиницијата на ρ (дадена во (1.1)) и фактот што J е полугрупа во однос на операцијата собирање, јасно е дека постојат броеви $m, n \in J$, што го задоволуваат равенството (3.5).

Нека:
$$a_0 a_1 \dots a_i\ \rho\ c_0 c_1 \dots c_k\ \rho\ b_0 b_1 \dots b_j.$$
Тогаш, постојат $m', n', r', s' \in J$, такви што
$$m'+i=n'+k,\ r'+k=s'+j \tag{3.5'}$$
Ако во (3.5') ставиме $m=m'+r'$, $n=n'+s'$ го добиваме равенството (3.5).

Јасно е како натаму би се комплетирал доказот на изнесеното тврдење, т. е. дека од (3.4) односно (3.4'), следува егзистенцијата на $m, n \in J$, коишто го задоволуваат равенството (3.5)

(ii) Ќе покажеме сега дека, ако
$$b_0 b_1 \dots b_k\ \tau\ c_0 c_1 \dots c_m, (b_\nu,\ c_\lambda \in A), \tag{3.6}$$
тогаш постои низа $a_1, a_2, \dots, a_s \in A$ таков што $s+k$, $s+m \in J$, при што во A е точно равенството;
$$(a_1 \dots a_s b_0 \dots b_k) = (a_1 \dots a_s c_0 \dots c_m) \tag{3.7}$$
Според (3.3) од (3.6) следува дека постои низа $d_1, d_2, \dots, d_r \in A$, таква што во M е точно равенството:
$$d_1 \dots d_r b_0 \dots b_k = d_1 \dots d_r\ c_0 \dots c_m. \tag{3.4''}$$
Од (3.4''), според (i), добиваме дека постојат $p, q \in J$, такви што
$$p+r+k=q+r+m. \tag{3.5''}$$
Можеме да претпоставиме дека барем еден од броевите p, q не е нула, бидејќи за $p=q=0$ избирајќи $n \in J$, $n \geq r+k$, и множејќи го (3.4'') со $e_1 e_2 \dots \dots e_{n-r-k}$ го добиваме (3.7). Поради симетријата што постои меѓу p и q, можеме да претпоставиме дека $p \neq 0$. Ако го избереме природниот број t така што $r+m<tp$, и ако ставиме
$$n=tp-r-m, \tag{3.8}$$
според (3.5), имајќи предвид и дека $p,\ q \in J$, добиваме:
$$n+r+m=tp \in J,\ n+r+k=(t-1)\ p+q \in J. \tag{3.9}$$
Од (3.4''), добивама дека за секои $e_1, e_2, \dots, e_n \in A$ имаме
$$e_1 \dots e_n d_1 \dots d_r b_0 \dots b_k = e_1 \dots e_n d_1 \dots d_r c_0 \dots c_m,$$
од што за $s=r+n$, ако се има предвид и (3.9), се добива дека е исполнето равенствочо (3.7), каде што $a_\nu = e_\nu$ за $\nu \leqslant n$ и $a_{n+\nu} = d_\nu$.

(iii) Овде ќе покажеме дека τ е еквивалетност. Пред се, јасно е дека τ

е рефлексивна и симетрична релација. Ни преостанува да покажеме дека τ е и транзитивна релација.

Нека $\quad u = b_0 b_1 \dots b_i \, \tau \, c_0 c_1 \dots c_j = v, \; v \, \tau \, d_0 d_1 \dots d_k = w, \qquad (3.10)$

каде што $b_\nu, c_\lambda, d_s \in A$. Според (ii) постојат броеви r и s такви што:

$$r+i, \; r+j, \; s+j, \; s+k \in J, \tag{3.11}$$

и низи $a_1, \dots, a_r, a_1', \dots a_s'$ на елементи од A, такви што:

$$\begin{aligned}(a_1 \dots a_r b_0 b_1 \dots b_i) &= (a_1 \dots a_r c_0 \dots c_j),\\ (a_1' \dots a_s' c_0 \dots c_j) &= (a_1' \dots a_s' d_0 \dots d_k).\end{aligned} \tag{3.12}$$

Од (3.11), следува дека:

$$n+i, \; n+j, \; n+k \in J, \tag{3.13}$$

каде што $n = r+s+j$. Од равенствата (3.12), ако се има предвид условот (2), добиваме дека за секоја низа елементи $e_1, \dots, e_n$, во дадениот асоцијатив се точни равенствата

$$(e_1 \dots e_n b_0 \dots b_i) = (e_1 \dots e_n c_0 \dots c_j) = (e_1 \dots e_n d_0 \dots d_k), \tag{3.14}$$

т.е дека во M е точно равенството

$$e_1 \dots e_n b_0 \dots b_i = e_1 \dots e_n d_0 \dots d_k. \tag{3.15}$$

Од (3.15), според (3.3), добиваме

$$u = b_0 \dots b_i \, \tau \, d_0 \dots d_k = v,$$

а со тоа докажавме дека τ е и транзитивна релација.

(iv) Сега ќе докажеме дека τ е конгруенција во полугрупата M, и дека M/τ е полугрупа со лево кратење.

Нека $u \, \tau \, v$, и $\quad u = a_0 a_1 \dots a_i, \; v = b_0 b_1 \dots b_j, \; w = d_0 d_1 \dots d_k \in M,$

каде што $a_\nu, b_\lambda, d_s \in A$. Според (3.3), постои $t \in M$. таков што $tu = tv$, од што следува и $tuw = tvw$, т.е. $uw \, \tau \, vw$. Од $u \, \tau \, v$, според (ii), следува дека постои низа $e_1, e_2, \dots, e_n$ елементи од A такви што во дадениот асоцијатив е точно равенството:

$$(e_1 \dots e_n a_0 a_1 \dots a_i) = (e_1 \dots e_n b_0 \dots b_j). \tag{3.7'}$$

Нека m е некој елемент од J таков што $m+n-k=r \geq 0$. Од (3.7'), според 2) добиваме дека за секоја низа елементи $c_1, \dots, c_r$ од A, имаме

$$(c_1 \dots c_r d_0 \dots d_k a_0 \dots a_i) = (c_1 \dots c_r d_0 \dots d_k b_0 \dots b_j),$$

од што, според (3.3), следува

$$wu = d_0 \dots d_k a_0 \dots a_i \, \tau \, d_0 \dots d_k b_0 \dots b_j = w v.$$

Докажавме, значи, дека τ е конгруенција во M.

Нека $wu \tau wv$. Според (3.3), постои $t \in M$, таков што $twu = twv$, од што повторно според (3.3), добиваме $u \tau v$. Според тоа M/τ е полугрупа со лево кратење.

(v) Преостанува да покажеме дека τ ги раздвојува елементите од A, т.е. дека $a', a'' \in A \;\&\; a' \, \tau \, a'' \Rightarrow a' = a''$.

Од $a' \, \tau \, a''$, според (ii), добиваме дека постои $r \in J$ и низа елементи $a_1, \dots, a_r \in A$ такви што во дадениот асоцијатив е точно равенството

$$(a_1 \dots a_r a') = (a_1 \dots a_r a''),$$

од што, според (i), следува $a' = a''$.

Со тоа го комплетиравме доказот на теоремата.

Добиените резултати за левата кратливост, на очигледен начин, се пренесуваат и на случајот на десна кратливост. Уште повеќе, ако се проследи доказот на теоремата ќе се уочи дека, без битни измени, истиот важи и за наредниот став, па затоа можеме да го сметаме овој став за последица на теоремата.

ПОСЛЕДИЦА. J-асоцијативот A е J-подасоцијатив од некоја полугрупа со кратење, ако и само ако е исполнет следниов услов:

1') A е J-асоцијатив со кратење.

2') Ако $s+k, s+m \in J$ и ако е точно равенството

$$(a_1 \dots a_\nu b_0 \dots b_k a_{\nu+1} \dots a_s) = (a_1 \dots a_\nu c_0 c_1 \dots c_m a_{\nu+1} \dots a_s), \tag{3.1'}$$

за некое $0 \leqslant \nu \leqslant s$, тогаш за секој број n што го задоволува условот $n+k$ $n+m \in J$, секоја низа $x_1, \dots, x_n \in A$ и секој број λ: $0 \leqslant \lambda \leqslant n$, е точно равенството:

$$(x_1 \dots x_\lambda b_0 \dots b_m x_{\lambda+1} \dots x_k) = (x_1 \dots x_\lambda c_0 \dots c_n x_{\lambda+1} \dots x_k). \tag{3.2'}$$

ЗАБЕЛЕШКА. Ако еден J-асоцијатив може да се смести во полугрупа со лево кратење S, и ако $J \subseteq K$, тогаш A секако може да се смести и во K-асоцијатив со лево кратење B. Имено, доволно е за B да се земе K-подасоцијативот на S генериран од A. Но, дури и кога A не може да се смести во полугрупа со лево кратење, постои можност за сместување во K-асоцијатив со лево кратење. Нужен и доволен услов за тоа се добива ако во 2) се додаде и условот $k, m \in K$. Со тоа ќе се добие теорема што е обопштување на докажаната, но и ова обопштување се докажува на ист начин како и нејзиниот специјален случај. Со соодветна формулација на последицата се добива нужен и доволен услов за да даден J-асоцијатив може да се смести во K-асоцијатив со кратење.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ѓ Чупона, Полугрупи генерирани од асоцијативи, Годишен Зборн. Прир. Мат. Фак. Скопје, Секција А, 15 (1964), 5—25.

[2] Ѓ. Чупона, За асоцијативите, Прилози I 1, МАНУ, одд. Природо-матем. науки, (1969), 9—20.

ON CANCELLATIVE ASSOCIATIVES

(Summary)

Let $A(F)$ be a universal algebra without O-ary operations. If $f \in F$ is an $n+1$-ary operation, such that f: $(x_0, \ldots, x_n) \rightarrow y$, then we write $n_f = n$ and $y = fx_0 \ldots x_n$. Let $f_0, \ldots, f_k \in F$, and $n = n_0 + n_1 + \ldots + n_k$, where $n_\nu = n_{f_\nu}$. If the integers i_ν satisfy the conditions $0 \leqslant i_\nu \leqslant i_{\nu+1} \leqslant n_0 + \ldots + n_\nu$, then the following „continued product" can be defined in an obvinous way:

$$p\ x_0 \ldots x_n = f_0\, x_0 \ldots x_{i_1-1}\, f_1\, x_{i_1} \ldots f_k\, x_{i_k} \ldots x_n. \tag{1}$$

The algebra $A(F)$ is said to be an associative if two arbitrary continued products $px_0 \ldots x_n$ and $qx_0 \ldots x_n$, with the same length are equal, i. e. if every continued product $px_0 \ldots x_n$ is uniquely defined by the sequence $x_0, \ldots, x_n \in A$. Then we write:

$$p\ x_0 \ldots x_n = (x_0 \ldots x_n), \tag{2}$$

and say that A is a J-associative, where

$$J = \{n_{f_1} + \ldots + n_{f_n};\ f_\nu \in F\}. \tag{3}$$

The following results are obtained in this paper.

1. Let A be a J-associative satisfying the following condition:

$$(\forall n \in J)\ \ (a_1 \ldots a_n\, x) = (a_1 \ldots a_n\, y) \Rightarrow x = y. \tag{4}$$

There exists a semigroug S, such that $A \subseteq S$, and

$$(\forall n \in J)\, (\forall a_0, \ldots, a_n \in A)\ \ (a_0 \ldots a_n) = a \cdot a_1 \ldots a_n.^{1)} \tag{5}$$

And, there exists such a left cancellative semigroup, if, and only if, the following condition is satisfied:

(L) If s, k and m are nonnegative integers, such that $s+k, s+m \in J$, and if, for some $a_1 \ldots a_s$, $b_0, \ldots, b_k$, $c_0, \ldots, c_m$ A, the following equation is satisfied:

$$(a_1 \ldots a_s b_0 \ldots b_k) = (a_1 \ldots a_s\, c_0 \ldots c_m), \tag{6}$$

then, for every nonnegative integer n such that $n+k, n+m \in J$ and every sequence $x_1, \ldots, x_n \in A$, the following equation is satisfied:

$$(x_1 \ldots x_n b_0 \ldots b_k) = (x_1 \ldots x_n c_0 \ldots c_m). \tag{7}$$

2. Let A be a J-associative such that:

$$(\forall n \in J)\ (\forall a, a_1, \ldots a_n \in A)\ (\exists\ x, y \in A).$$
$$(xa_1 \ldots a_n) = a = (a_1 \ldots a_n\ y), \tag{8}$$

and let m be the greatest common divisor of the integers belonging to J. Then, there is an $m+1$-ary operation on A:

$$(a_0, a_1, \ldots, a_m) \rightarrow [a_0 a_1 \ldots a_n],$$

such that $A[\ ]$ is an m-group, and

$$(\forall\, km \in J)\ (\forall\ x_0, \ldots, x_{km} \in A)\ \ (x_0 \ldots x_{km}) = [x_0 \ldots x_{km}], \tag{9}$$

where:

$$[x_0 \ldots x_{km}] = \underbrace{[\ldots[}_{k} x_0 \ldots x_m]\, x_{m+1} \ldots x_{2m}] \ldots x_{km}].$$

---

1) There are associatives for which do not exist semigroups with this property. ([2])