ЗА КВАЗИПРСТЕНИТЕ

Билтен ДМФ СРМ, Скопје, 20 (1969), 19–22

Во оваа забелешка се врши куса дискусија во врска со класата квазипрстени, којашто е еквивалентна со класата прстени.

1. *Квазипрстени.* Нека R е непразно множество и „$+$", „о" две (бинарни) операции во R со следните особини:

(i) $R(+)$ е комутативна група

(ii) $(\forall x, y, z \in R)\ x \circ (y+z) = x \circ y + x \circ z - x, \quad (x+y) \circ z = x \circ z + y \circ z - z.$

Тогаш, велиме дека $R(+, \circ)$ е квазипрстен. За квазипрстенот велиме дека е комутативен, односно асоцијативен, ако соодветната особина ја има операцијата „о".

Со директна проверка се установува дека:

1°. Ако $R(+, \circ)$ е прстен, и ако операцијата „о" е определена со:

$$(\forall x, y, z \in R)\ x \circ y = x + y - xy \tag{1}$$

[1]тогаш $R(+, \circ)$ е квазипрстен. И обратно, ако $R(+, \circ)$ е квазипрстен и ако операцијата „." е определена со:

$$(\forall x, y, z \in R)\ xy = x + y - x \circ y \tag{1'}$$

тогаш $R(+, .)$ е прстен. Прстенот $R(+, .)$ е:

а) комутативен, б) асоцијативен, ако и само ако, соодветната особина ја има квазипрстенот $R(+, \circ)$.

Може да се изнесе и уште појако тврдење, имено, дека теориите на прстените и квазипрстените се еквивалентни во таа смисла што секој поим осмислен за класата прстени има свој еквивалент во класата квазипрстени, а и обратно. На пример:

1) Ако $R(+,\cdot)$ е поле, тогаш квазипрстенот $R(+,\circ)$ ги има следните особини:

(iii) $(\forall x, y \in R)\ x \circ y = y \circ x$

(iv) $(\exists e \in R,\ e \neq 0)\ (\forall x \in R)\ x \circ e = e$

(v) $(\forall x \in R,\ x \neq 0)\ (\exists x^{-1} \in R)\ x \circ x^{-1} = x + x^{-1} - e.$

И обратно, ако квазипрстенот $R(+, \circ)$ ги задоволува условите (iii) — (v) тогаш соодветниот прстен $R(+, \cdot)$ е поле.

2) Ако квазипрстенот $R(+, \circ)$ е таков што мултипликативниот групоид $R(\circ)$ е група, тогаш прстенот $R(+, \cdot)$ е асоцијативен и ја има следнава особина

(vi) $(\forall x \in R)\ (\exists x^* \in R)\ xx^* = x + x^*.$

И обратно, ако во еден асоцијативен прстен е исполнета особината (vi), тогаш во соодветниот квазипрстен $R(+,\circ)$ мултипликативниот групоид $R(\circ)$ е група.

Да споменеме уште една особина на квазипрстените чијшто доказ е јасен.

2°. Ако $R(+, \circ)$ е квазипрстен тогаш:

(vii) $\left(\sum_1^m x_i\right) \circ \left(\sum_1^n y_j\right) = \Sigma(x_i \circ y_j) - (n-1)\,\Sigma\, x_i - (m-1)\,\Sigma\, y_j,$

за секои $x_1, \ldots, x_m, y_j, \ldots, y_n \in R$.

2. *Сместување на даден групоид во квазипрстен.* Добро е познато дека секој групоид $G(.)$ може да се смести во прстен R, така што дадениот групоид да биде подгрупоид од мултипликативниот групоид на прстенот. Овде ќе покажеме дека истото важи и за класата квазипрстени. Имено тоа се гледа од следната особина.

3°. Нека $G(\circ)$ е даден групоид. Постои квазипрстен $R(+, \circ)$ таков што групоидот $G(\circ)$ е подгрупоид од $R(\circ)$.

Доказ. Нека $R(+)$ е слободната (адитивно означена) абелова група генерирана од G, т.е. R се состои од сите формални збирви $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \ldots + \xi_n x_n$, каде што $\xi_1, \ldots, \xi_n$ се цели броеви, а $x_1, \ldots, x_n$ елементи од G. Притоа, ако $x_1, \ldots, x_n$ се меѓу себе различни, како и $y_1, \ldots, y_m$, имаме:

$$\xi_1 x_1 + \ldots + \xi_n x_n = \eta_1 y_1 + \ldots + \eta_m y_m \Leftrightarrow n = m,\ x_\nu = y_\nu\,;$$

освен тоа: $1x = x$, $0x = 0$ (= нулата на групата.)

Како што е добро познато, елементите од R можеме да ги претставиме во облик $\sum_{x \in G} \xi_x \cdot x$, каде ξ_x се цели броеви, при што само за конечно многу

[1] Улогата на оваа операција во теоријата на прстените е добро позната. (Да се види, на пример, N. H. McCoy: THE THEORY OF RINGS, New York 1964 стр. 110).

елементи x, ξ_x може да не е нула. Тогаш, нулата на R има облик $\sum_{x\in G} 0.x$, а собирањето е определено со:

$$\left(\sum_x \xi_x \cdot x\right)+\left(\sum_x \eta_x \cdot x\right)=\sum_x (\xi_x+\eta_x)\, x. \qquad (1)$$

Операцијата множење „о" во R ја дефинираме со:

$$\left(\sum_x \xi_x x\right) \circ \left(\sum_y \eta_y y\right)=\sum_{x,y} (\xi_x \cdot \eta_y)(x \circ y)+\left(1-\sum_x \eta_y\right)\sum_x \xi_x x+\left(1-\sum_x \xi_x\right)\sum_y \eta_y y. \qquad (2)$$

Ако се има предвид дека при $\xi_x=0$ за $x\neq a$ и $\xi_a=1$, имаме $a=\sum_x \xi_x x$, тогаш добиваме дека G (о) е подгрупоид од R (о). Со директна проверка се покажува дека се исполнети и равенствата (ii), од што ќе следува дека $R(+, \circ)$ е квазипрстен. Ке докажеме едно од тие рвенства.

Нека $u=\sum_x \xi_x x$, $v=\sum_y \eta_y y$, $w=\sum_y \zeta_y y$ се три елементи од R. Тогаш имаме:

$$u \circ (v+w)=\left(\sum_x \xi_x x\right) \circ \left(\sum_y (\eta_y+\zeta_y)\, y\right)=$$

$$=\sum_{x,y} \xi_x (\eta_y+\zeta_y)(x \circ y)+\left[1-\sum_y (\eta_y+\zeta_y)\right]\sum_x \xi_x x+\left(1-\sum_x \xi_x x\right)\sum_y (\eta_y+\zeta_y)\, y=$$

$$=\sum_{x,y} \xi_x \eta_y (x \circ y)+\sum_{x,y} \xi_x \zeta_y (x \circ y)+\left(1-\sum_y \eta_y\right)\sum_x \xi_x x+\left(1-\sum_y \zeta_y\right)\sum_x \xi_x x+$$

$$+\left(1-\sum_x \xi_x\right)\sum_y \eta_y y+\left(1-\sum_x \xi_x\right)\sum_y \zeta_y y-\sum_x \xi_x x=u \circ v+u \circ w-u.$$

На потполно ист начин се докажува и другото равенство, со што би се комплетирал доказот на особината.

(Да забележиме и тоа дека ако дадениот групоид G (о) е комутативен, односно асоцијативен, тогаш соодветната особина ќе ја има и конструираниот квазипрстен $R(+, \circ)$).

Ќе изнесеме и една последица на докажаната особина.

4°. Нека G (о) е даден групоид. Постои прстен $R(+, .)$, таков што, $G \subseteq R$ и: $x \circ y=x+y-xy$, за секои $x, y \in G$.

Доказ. Според 3°, постои квазипрстен $R(+, \circ)$, таков што G (о) е подгрупоид од R (о). Ако во R определиме операција „.", со $x \cdot y=x+y-x \circ y$, добиваме прстен со бараната особина.

Забелешки. 1. Давање директен доказ на особината 4° не е така едноставно, што се гледа и од следната негова скица. Прво се определува прстенот F што е слободно генериран од G. Потоа се формира идеалот I во F што е генериран од подмножеството на F:

$$\{x+y-xy-x \circ y \mid x, y \in G\}$$

и се означува со R фактор прстенот F/I. Наредната етапа би била да се докаже дека пресликувањето $a \to I+a$ од G во P/I е инјекција, но ние не сме успеале тоа да го направиме.

2. Ако $R(+, .)$ е прстен, и ако во R определиме операција „*" со: „·" $x * y=x+y+xy$, тогаш пак добиваме квазипрстен, што лесно се проверува. Од ова следува и тоа дека секој групоид G (*) може да се смести во прстен $R(+, .)$, така што $x * y=x+y+xy$, за секои $x, y \in G$. Имено, прво G (*) се сместува во квазипрстен $R(+, *)$, а потоа се дефинира во R операција „·" со: $xy=x * y-x-y$ и се добива прстен со бараната особина.

ON QUASIRINGS

Summary

An algebra $R(+, o)$ is said to be a quasiring iff:

(i) $R(+)$ is an abelian group;

(ii) $(\forall x, y, z \in R)$ $x \circ (y+z)=x \circ y+x \circ z-x$

$(x+y) \circ z=x \circ z+y \circ z-z$.

The following results are shown in this note.

1. If G (o) is a (commutative, associative) groupoid, then there is a (commutative, associative) quasirng $R(+, o)$ such that G (o) is a subgroupoid of R (o).

2. If G (o) is a (commutative, associative) groupoid, then there is a (commutative, associative) ring $R(+, \cdot)$ such that $G \subseteq R$, and $(\forall x, y \in G)$ $x \circ y=x+y-xy$.