[m,n] - ГРУПОИДИ
Билтен ДМФ СРМ, 21 (1970), 19–29

1. Во оваа работа се обопштува поимот за операција, а потоа се изнесуваат неколку резултати за новиот поим; всушност, се обопштуваат резултатите од работите [1] и [2].

Нека е M непразно множество и $f: M^{m+1} \to M^{n+1}$ (еднозначно) пресликување. За f велиме дека е $[m, n]$-*групоид на* M, или само $[m, n]$-*групоид*, сметајќи го M за фиксно. Ако е $f(x_0, x_1, \ldots, x_m) = (y_0, y_1, \ldots, y_n)$, ставајќи $f_k(x_0, x_1, \ldots, x_m) = y_k$, $\kappa = 0, 1, \ldots, n$, ќе добиеме $n+1$ $(m+1)$-тарни операции на M што ги викаме *компоненти* на f и пишуваме $f = (f_0, \ldots, f_n)$. Изучувањето на $[m, n]$-групоидите може да се спроведе преку нивните компонентни операции. Тие, меѓутоа, можат да се изучуваат и директно, како што е направено во оваа работа.

Натаму, за покусо, наместо $f(\ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_s, \ldots)$ ќе пишуваме $f(\ldots, x_k{}^s, \ldots)$; $x_k{}^{k-1}$ ќе означува празен симбол, додека $x_k{}^{k-s}$ за $s > 1$ нема смисла. Наместо $f(\ldots, \underbrace{x, x, \ldots, x}_{k}, \ldots)$ ќе пишуваме $f(\ldots, x^k, \ldots)$.

Нека е $m > n$. За $[m, n]$-групоидот f велиме дека е (i, j)-*асоцијативен*, $0 \leqslant i < j \leqslant m - n$, ако за секои $x_k \in M$, $\kappa = 0, 1, \ldots, 2m - n$, е точно равенството:

$$f(x_0{}^{i-1},\ f(x_i{}^{i+m}),\ x_{i+m+1}^{2m-n}) = f(x_0{}^{j-1},\ f(x_j{}^{j+m}),\ x_{j+m+1}^{2m-n}) \tag{1}$$

За f велиме дека е $[m, n]$-*полугрупа*, ако е (i, j)-асоцијативен $[m, n]$-прупоид за секои $0 \leqslant i < j \leqslant m - n$.

Ако за секои $x_0, x_1, \ldots, x_m \in M$ е

$$f(e_1{}^k,\ x_0{}^n,\ e_{k+1}^{m-n}) = (x_0, x_1, \ldots, x_n),\ 0 \leqslant k \leqslant m - n, \tag{2}$$

слогот $(e_1, e_2, \ldots, e_{m-n})$ ќе го викаме k-*неутрален* за f. Ако во κ-неутралниот слог сите елементи се еднакви со еден елемент e, тогаш e ќе го викаме k-*неутрален* елемент за f. Ако, пак, e е κ-неутрален елемент за секој $0 \leqslant \kappa \leqslant m - n$, тогаш за него ќе велиме дека е *неутрален* елемент за f.

Елементот $a \in M$ припаѓа на *центарот* од f ако за секои $0 \leqslant j, k \leqslant m+1$ и секое $x_\nu \in M$, $\nu = 1, 2, \ldots, m$ е

$$f(x_1{}^{j-1},\ a,\ x_j{}^m) = f(x_1{}^{k-1},\ a,\ x_k{}^m). \tag{3}$$

Ако е f $[n+s, n]$-групоид, ќе ставиме:

$$f^1(x_0{}^{n+s}) = f(x_0{}^{n+s}),\ f^k(x_0{}^{n+ks} = f(x_0{}^{s-1},\ f^{k-1}(x_s{}^{n+ks})), \tag{4}$$

Основните резултати од оваа работа се содржани во следниве две теореми:

Теорема 1. *Нека е* f $(j, j+k)$-*асоцијативен* $[m, n]$-*групоид*, $k \geq 1$, *со барем еден неутрален елемент. Нека е* s *најголемиот заеднички делител на* j, k *и* $m - n$ $(m - n = rs)$. *Тогаш* f *е* $(ts, (t+p)s)$-*асоцијативен* $[m, n]$-*групоид за секои* $t = 0, 1, \ldots$ *и* $p = 1, \ldots,$ *такви што е* $t + p \leqslant r$. *Уште повеќе, постои* $(0, s)$-*асоцијативен* $[n+s, n]$-*групоид* g *таков што за секои* $x_0, x_1, \ldots, x_{n+sr} \in M$ *е*

$$f(x_0{}^{n+rs}) = g^r(x_0{}^{n+rs}). \tag{5}$$

Теорема 2. *Нека е* f (j, k)-*асоцијативен* $[m, n]$-*групоид за еден пар* j, k: $0 \leqslant j < k \leqslant m - n$, *и нека е* e *неутрален елемент за* f. *Тогаш* f *ќе биде* $[m, n]$-*полугрупа ако, и само е припаѓа на неговиот центар. Во потврден случај постои* $[n+1, n]$-*полугрупа* g *таква што за секои* $x_0, x_1, \ldots, x_{n+r} \in M$, $r = m - n$, *е*

$$f\,(x_0^{n+r}) = g^r\,(x_0^{n+r}). \tag{5'}$$

Во врска со теоремата 2 се покажува дека: *ако е f $(j,\ j+k)$-асоцијашивен $[m, n]$-ірупоид со неушрален елеменш e и ако е $k = 1, 2$, шоїаш e ӣрийаѓа на ценшарош од f.*

2. Нека е f $[m, n]$-групоид и нека ставиме:

$$f^*\,(x_0, x_1, \ldots, x_m) = f\,(x_m, \ldots, x_1, x_0).$$

Очевидна е следнава

Лема 2. 1. *$[m, n]$-Груӣоидош f^* е (i^*, j^*)-асоцијашивен ако, и само ако, f е (i, j)-асоцијашивен, кадешшо е $i^* = m-n-j$, $j^* = m-n-i$.*

Лема 2. 2. *Ако е f $(j, j+k)$-асоцијашивен $[m, n]$-ірупоид, $k \geq 1$, со барем еден неушрален елеменш e и ако е $j \geq k$, шоїаш f е и $(j-k, j)$-асоцијашивен.*

Доказ. $f\,(x_0^{j-k-1},\ f\,(x_{j-k}^{j-k+m}),\ x_{j-k+m+1}^{2m-n}) =$

$= f\,(e^{j+k},\ f(x_0^{j-k-1},\ f(x_{j-k}^{j-k+m}),\ x_{j-k+m+1}^{2m-n}),\ e^{m-n-j-k}) =$

$= f\,(e^j,\ f(e^k, x_0^{j-k-1}, f\,(x_{j-k}^{j-k+m}), x_{j-k+m+1}^{2m-n-k}), x_{2m-n-k+1}^{2m-n},\ e^{m-n-j-k}) =$

$= f\,(e^j,\ f(e^k,\ x_0^{j-1}, f\,(x_j^{j+m}), x_{j+m+1}^{2m-n-k}), x_{2m-n-k+1}^{2m-n},\ e^{m-n-j-k}) =$

$= f\,(e^{j+k},\ f(x_0^{j-1},\ f\,(x_j^{j+m}), x_{j+m+1}^{2m-n}),\ e^{m-n-j-k}) =$

$= f\,(x_0^{j-1},\ f(x_j^{j+m}),\ x_{j+m+1}^{2m-n}).$

Од лемите 2.1 и 2.2 следува:

Лема 2. 3. *Ако е f $(j,\ j+k)$-асоцијашивен $[m, n]$-ірупоид, $k \geq 1$, со барем еден неушрален елеменш и ако е $m-n \geq j+2k$, шоїаш f е и $(j+k, j+2k)$-асоцијашивен.*

Лема 2. 4. *Нека е e неушрален елеменш во $(j,\ j+k)$-асоцијашивниош $[m, n]$-ірупоид f. Тоїаш се шочни равенсшваша:*

$$f\,(e^k,\ x_0^{m-k}) = f\,(x_0^{m-k},\ e^k), \tag{6}$$

$$f\,(e^{k-j},\ x_0^{m-k+j}) = f\,(x_0^{j-1},\ e^{k-j},\ x_j^{m-k+j}) = f(x_0^{m-k+j},\ e^{k-j}),\ \ j < k, \tag{7}$$

$$f\,(x_0^{j-1},\ e^{k-j},\ x_j^{m-k+j}) = f\,(x_0^{n+2j},\ e^{k-j},\ x_{n+2j+1}^{m-k+j}),\ j < k. \tag{8}$$

Доказ. Доказот на (6) и (7) се добива со едноставна модификација на доказите на соодветните равенства од лемата 2.1 од [2]. Да го покажеме тоа, на пример, за равенството $f(e^{k-j},\ x_0^{m-k+j}) = f\,(x_0^{m-k+j},\ e^{k-j})$, каде што е $j < к$.

$$f\,(e^{k-j},\ x_0^{m-k+j}) = f(e^j,\ f\,(e^{k-j},\ x_0^{m-k+j}),\ e^{m-n-j}) =$$

$$= f(e^k,\ x_0^{j-1},\ f(x_j^{m-k+j},\ e^k),\ e^{m-n-j-k}) =$$

$$—(6)— \qquad = f(x_0^{j-1}, f(x_j^{m-k+j}, e^k), e^{m-n-j}) = \overline{y} = (y_0, y_1, \ldots, y_n).$$

Ако е $m < 2\,к$, земајќи предвид дека е $j+к \leqslant m-n$, т.е. $m-n-j-к \geq 0$, имаме:

$$\overline{y} = f(x_0^{m-k+j},\ e^{2k-m-1},\ f(e^{m+1}),\ e^{m-n-k-j}) = f(x_0^{m-k+j},\ e^{k-j}).$$

За $2к \leqslant m < 3к$, пак, имаме:

$\overline{y} = f(x_0^{j+k-1},\ f(x_{j+k}^{m-k+j},\ e^{2k}),\ e^{m-n-j-k}) =$

$= f(e^j,\ f(x_0^{j+k-1}, f(x_{j+k}^{m-k+j}, e^{2k}), e^{m-n-j-k}),\ e^{m-n-j}) =$

$= f(e^j,\ x_0^{k-1},\ f(x_k^{j+k-1}, f(x_{j+k}^{m-k+j}, e^{2k}), e^{m-n-j}), e^{m-n-j-k}) =$

$$= f(e^j,\ x_0^{k-1},\ f(x_k^{m-k+j},\ e^{3k-m-1},\ f(e^{m+1}),\ e^{m-n-j-k}),\ e^{m-n-j-k}) =$$

$$= f(e^j,\ x_0^{k-1},\ f(x_k^{m-k+j},\ e^{2k-j}),\ e^{m-n-j-k}) =$$

$$= f(e^j,\ f(x_0^{m-k+j},\ e^{k-j}),\ e^{m-n-j}) = f(x_0^{m-k+j},\ e^{k-j}).$$

Од горното е јасно како ќе се добие доказот на равенството и во случајот $s\kappa \leqslant m < (s+1)\kappa$ за $s > 2$.

Да го докажеме сега разнеството (8):

$$f(x_0^{n+2j},\ e^{k-j},\ x_{n+2j+1}^{m-k+j}) = f(x_0^{j-1},\ f(e^{m-n},\ x_j^{n+j}),\ x_{n+j+1}^{n+2j},\ e^{k-j},\ x_{n+2j+1}^{m-k+j}) =$$

$$= f(x_0^{j-1},\ e^k,\ f(e^{m-n-k},\ x_j^{n+2j},\ e^{k-j}),\ x_{n+2j+1}^{m-k+j}) =$$

$$-(7)- \qquad = f(x_0^{j-1},\ e^k,\ f(e^{m-n-j},\ x_j^{n+2j}),\ x_{n+2j+1}^{m-k+j}) = \bar{z}.$$

Ако е $\kappa > n+j$ добиваме:

$$\bar{z} = f(x_0^{j-1}, f(e^{m+1}),\ e^{k-n-j-1},\ x_j^{m-k+j}) = f(x_0^{j-1},\ e^{k-j},\ x_j^{m-k+j}),$$

а за $k \leqslant n+j$, истиот резултат се добива на следниов начин:

$$\bar{z} = f(x_0^{j-1},\ f(e^{m+k-n-j},\ x_j^{n+2j-k}),\ x_{n+2j-k+1}^{m-k+j}) = f(x_0^{j-1},\ e^{k-j},\ x_j^{m-k+j}).$$

Лема 2. 5. *Нека е f (j, j + k)-асоцијативен $[m, n]$-групоид, $k \geq 1$, со барем еден неутрален елемент. Тогаш f е $(0, m-n)$-асоцијативен, $(0, k)$-асоцијативен и $(0, s)$-асоцијативен $[m, n]$-групоид, каде што s е најголемиот заеднички делител од j и k.*

Доказ. Нека е e неутрален елемент за f. Со оглед на лемата 2.2 можеме да претпоставиме дека е $j < k$. Користејќи ги равенствата од претходната лема добиваме:

$$f(x_0^{j+k-1},\ f(x_{j+k}^{m+j+k}),\ x_{m+j+k+1}^{2m-n}) =$$

$$= f(e^j,\ f(x_0^{j+k-1},\ f(x_{j+k}^{m+j+k}),\ x_{m+j+k+1}^{2m-n}),\ e^{m-n-j}) =$$

$$= f(e^j,\ x_0^{k-1},\ f(x_k^{j+k-1},\ f(x_{j+k}^{m+j+k}),\ x_{m+j+k+1}^{2m-n},\ e^k),\ e^{m-n-j-k}) =$$

$$= f(e^j, f(e^j, x_0^{k-1}, f(x_k^{j+k-1}, f(x_{j+k}^{m+j+k}),\ x_{m+j+k+1}^{2m-n}, e^k), e^{m-n-j-k}), e^{m-n-j}) =$$

$$= f(e^{2j}, x_0^{k-j-1}, f(x_{k-j}^{k-1}, f(x_k^{j+k-1}, f(x_{j+k}^{m+j+k}), x_{m+j+k+1}^{2m-n}, e^k), e^{m-n-j}), e^{m-n-j-k}) =$$

$$= f(e^{2j}, x_0^{k-j-1}, f(e^k, x_{k-j}^{k-1}, f(x_k^{j+k-1}, f(x_{j+k}^{m+j+k}), x_{m+j+k+1}^{2m-n}, e^k), e^{m-n-j-k}),$$
$$e^{m-n-j-k}) =$$

$$= f(e^{2j}, x_0^{k-j-1}, f(e^j, f(e^{k-j}, x_{k-j}^{j+k-1}, f(x_{j+k}^{m+j+k}), x_{m+j+k+1}^{2m-n}), e^{m-n-j}), e^{m-n-j-k}) =$$

$$= f(e^{2j},\ x_0^{k-j-1},\ f(e^{k-j},\ x_{k-j}^{j+k-1},\ f(x_{j+k}^{m+j+k}),\ x_{m+j+k+1}^{2m-n}),\ e^{m-n-j-k}) =$$

$$= f(e^{2j},\ x_0^{k-j-1},\ f(x_{k-j}^{k-1},\ e^{k-j},\ x_k^{j+k-1},\ f(x_{j+k}^{m+j+k}),\ x_{m+j+k+1}^{2m-n}),\ e^{m-n-j-k}) =$$

$$= f(e^{2j},\ x_0^{k-j-1},\ f(x_{k-j}^{k-1},\ f(e^{k-j},\ x_k^{m+j}),\ x_{m+j+1}^{2m-n}),\ e^{m-n-j-k}) =$$

$$= f(e^{2j},\ x_0^{k-j-1},\ f(x_{k-j}^{k-1},\ f(x_k^{m+j},\ e^{k-j}),\ x_{m+j+1}^{2m-n}),\ e^{m-n-j-k}) =$$

$$= f(e^j,\ f(e^j,\ x_0^{k-1},\ f(x_k^{m+j},\ e^{k-j}),\ x_{m+j+1}^{2m-n-k}),\ x_{2m-n-k+1}^{2m-n},\ e^{m-n-k-j}) =$$

$$= f(e^j,\ f(e^j,\ f(x_0^m),\ x_{m+1}^{m+j},\ e^{k-j},\ x_{m+j+1}^{2m-n-k}),\ x_{2m-n-k+1}^{2m-n},\ e^{m-n-j-k}) =$$

$$= f(e^j, f(e^k, f(x_0{}^m), x_{m+1}^{2m-n-k}), x_{2m-n-k+1}^{2m-n}, e^{m-n-j-k}) =$$

$$= f(e^{j+k}, f(f(x_0{}^m), x_{m+1}^{2m-n}), e^{m-n-j-k}) = f(f(x_0{}^m), x_{m+1}^{2m-n}),$$

па f е $(0, j+k)$-асоцијативен $[m, n]$-групоид.

Ако ја примениме конечен број пати лемата 2.3 по однос на $(j, j+k)$-асоцијативноста, ќе добиеме дека f е (j_1, j_1+k)-асоцијативен $[m, n]$-групоид, каде што е $j_1+k \leqslant m-n < j_1+2k$. За $j_1+k = m-n$ оттука ќе следува дека f е $(j+k,\ m-n)$-асоцијативен, што заедно со докажаната $(0, j+k)$-асоцијативност ја повплекува $(0, m-n)$-асоцијативноста на f. Ако е $j_1+k < m-n$, според лемата 2.1 и доказот за $(0, j+\kappa)$-асоцијативноста, се добива дека f е $(j, m-n)$-асоцијативен; од $(0, j+k)$ и $(j, j+k)$-асоцијативностите се добива дека f е и $(0, j)$-асоцијативен, така што, конечно, пак се добива дека f е $(0, m-n)$-асоцијативен $[m, n]$-групоид.

Да докажеме дека f е $(0, \kappa)$-асоцијативен, ќе ја користиме веќе споменатата $(0, j)$-асоцијативност:

$$f(f(x_0{}^m), x_{m+1}^{2m-n}) = f(e^j, f(f(x_0{}^m), x_{m+1}^{2m-n}), e^{m-n-j}) =$$

$$= f(f(e^j, f(x_0{}^m), x_{m+1}^{2m-n-j}), x_{2m-n-j+1}^{2m-n}, e^{m-n-j}) =$$

$$= f(f(e^j, x_0{}^{k-1}, f(x_k{}^{m+k}), x_{m+k+1}^{2m-n-j}), x_{2m-n-j+1}^{2m-n}, e^{m-n-j}) =$$

$$= f(e^j, f(x_0{}^{k-1}, f(x_k{}^{m+k}), x_{m+k+1}^{2m-n}), e^{m-n-j}) =$$

$$= f(x_0{}^{k-1}, f(x_k{}^{m+k}), x_{m+k+1}^{2m-n}).$$

Доказот дека f е $(0, s)$-асоцијативен $[m, n]$-групоид е ист со доказот на лемата 2.3 од [2].

Доказ на теоремата 1. Нека е s најголемиот заеднички делител на j, k и $m-n$, а s_1 — најголемиот заеднички делител на j и k; нека е $s_1 = a_1 s$. Според лемата 2.5 f е $(0, s_1)$-асоцијативен $[m, n]$-групоид, па ако е $a_1 = 1$, f ќе биде $(0, s)$-асоцијативен. Ако е $a_1 > 1$ ќе ставиме $m-n = ps_1 + s_2$, $s_2 < s_1$ и, очевидно, $p > 0$. Од $(0, s_1)$-асоцијативноста, со примена на лемата 2.3, добиваме дека f е $(0, ps_1)$-асоцијативен, а според лемата 2.5 и $(0, m-n)$-асоцијативен, така што тој е и $(ps_1, m-n)$ т.е. $(m-n-s_2, m-n)$-асоцијативен. Оттука следува дека f е и $(0, s_2)$-асоцијативен. Јасно е дека s го дели s_2; $s_2 = a_2 s$, при што од $s_2 < s_1$ следува дека е $a_2 < a_1$. Продолжувајќи во оваа смисла, ако е $a_2 > 1$, ќе ја добиеме низата $a_1 > a_2 > \ldots > a_t = 1$, таква што за секој $v = 1, 2, \ldots, t$ f е $(0, s_v)$-асоцијативен и $s_v = a_v s$. Оттука се добива дека f е $(0, s)$-асоцијативен, па првиот дел од теоремага се добива со примена на лемите 2.2. и 2.3.

Да ставиме $m-n = rs$ и

$$g(x_0{}^{n+s}) = f(x_0{}^{n+s}, e^{(r-1)s}).$$

Добиваме:

$$g(g(x_0{}^{n+s}), x_{n+s+1}^{n+2s}) = f(f(x_0{}^{n+s}, e^{(r-1)s}), x_{n+s+1}^{n+2s}, e^{(r-1)s}) =$$

$$= f(f(e^{(r-1)s}, x_0{}^{n+s}), x_{n+s+1}^{n+2s}, e^{(r-1)s}) = f(e^{(r-1)s}, x_0{}^{s-1}, f(x_s{}^{n+2s}, e^{(r-1)s})) =$$

$$= f(x_0{}^{s-1}, f(x_s{}^{n+2s}, e^{(r-1)s}), e^{(r-1)s}) = g(x_0{}^{s-1}, g(x_s{}^{n+2s})),$$

т.е. g е $(0, s)$-асоцијативен $[n+s, n]$-групоид (во горниот доказ е користена $(0, m-n)$-асоцијативноста на f).

Нека, на крајот, ја докажеме точноста на (5):

$$g^2(x_0{}^{n+2s}) = f(x_0{}^{s-1}, f(x_s{}^{n+2s}, e^{(r-1)s}), e^{(r-1)s}) = f(x_0{}^{2s-1}, f(x_{2s}^{n+2s}, e^{rs}), e^{(r-2)s}) =$$

$$= f(x_0{}^{2s-1}, x_{2s}^{n+2s}, e^{(r-2)s}) = f(x_0{}^{n+2s}, e^{(r-2)s}).$$

Повторена уште $r-2$ пати оваа постапка ќе не доведе до споменатото равенство. Теоремата е докажана.

3. Да го разгледаме случајот кога неутралниот елемент припаѓа на центарот на $[m, n]$-групоидот f.

Лема 3. 1. *Нека е f $(j, j+k)$-асоцијативен $[m, n]$-групоид, $k \geq 1$, и нека* **e** *е неутрален елемент за f. Тогаш f е $[m, n]$-полугрупа ако и само ако* **e** *припаѓа на центарот од f.*

Доказ. Нека е f $[m, n]$-полугрупа. Користејќи го првото равенство од лемата 2.4, за $\kappa=1$, добиваме:

$$f(e, x_1{}^m)=f(x_1{}^m, e)=f(e^{m-n-1}, f(x_1{}^m, e), e)=f(e^{m-n-1}, x_1, f(x_2{}^m, e, e))=$$
$$=f(e^{m-n-1}, x_1, f(e, x_2{}^m, e))=f(e^{m-n-1}, f(x_1, e, x_2{}^m), e)=f(x_1, e, x_2{}^m).$$

Натаму:

$$f(x_1, e, x_2{}^m)=f(f(x_1, e, x_2{}^m), e^{m-n})=f(x_1, f(e, x_2{}^m, e), e^{m-n-1})=$$
$$=f(x_1, f(x_2, e, x_3{}^m, e), e^{m-n-1})=f(f(x_1{}^2, e, x_3{}^m), e^{m-n})=$$
$$=f(x_1{}^2, e, x_3{}^m), \text{ и т.н.}$$

Да претпоставиме сега дека e припаѓа на центарот на $(j, j+\kappa)$-асоцијативниот $[m, n]$-групоид f. Користејќи ги асоцијативностите докажани во лемата 2.5 добиваме:

$$f(x_0, f(x_1{}^{m+1}), x_{m+2}^{2m-n})=f(e^k, f(x_0, f(x_1{}^{m+1}), x_{m+2}^{2m-n}), e^{m-n-k})=$$
$$=f(f(e^k, x_0, f(x_1{}^{m+1}), x_{m+2}^{2m-n-k}), x_{2m-n-k+1}^{2m-n}, e^{m-n-k})=$$
$$=f(f(e^{j-1}, x_0, f(x_1{}^{m+1}), x_{m+2}^{2m-n-k}, e^{k-j+1}), x_{2m-n-k+1}^{2m-n}, e^{m-n-k})=$$
$$=f(f(f(e^{j-1}, x_0{}^{m-j+1}), x_{m-j+2}^{2m-n-k}, e^{k-j+1}), x_{2m-n-k+1}^{2m-n}, e^{m-n-k})=$$
$$=f(f(f(x_0{}^{m-j+1}, e^{j-1}), e^{k-j+1}, x_{m-j+2}^{2n-n-k}), x_{2m-n-k+1}^{2m-n}, e^{m-n-k})=$$
$$=f(f(x_0{}^{k-1}, f(x_k{}^{m-j+1}, e^k, x_{m-j+2}^{m}), x_{m+1}^{2m-n-k}), x_{2m-n-k+1}^{2m-n}, e^{m-n-k})=$$
$$=f(f(x_0{}^{k-1}, f(x_k{}^m, e^k), x_{m+1}^{2m-n-k}), x_{2m-n-k+1}^{2m-n}, e^{m-n-k})=$$
$$=f(f(f(x_0{}^m), e^k, x_{m+1}^{2m-n-k}), x_{2m-n-k+1}^{2m-n}, e^{m-n-k})=$$
$$=f(f(e^k, f(x_0{}^m), x_{m+1}^{2m-n-k}), x_{2m-n-k+1}^{2m-n}, e^{m-n-k})=$$
$$=f(e^k, f(f(x_0{}^m), x_{m+1}^{2m-n}), e^{m-n-k})=f(f(x_0{}^m), x_{m+1}^{2m-n}).$$

Така добивме дека f е $(0, 1)$-асоцијативен $[m, n]$-групоид, а од тоа и лемата 2.3, следува дека f е $[m, n]$-полугрупа.

Доказ на теоремата 2. Директно следува од лемата 3.1 и теоремата 1.

4. Во врска со теоремата 2 е интересно да се види во кои случаи неутралниот елемент на еден $[m, n]$-групоид припаѓа на неговиот центар. Во таа смисла овде ќе забележиме дека:

Ако е f $(j, j+k)$-асоцијавен $[m, n]$-групоид со неутрален елемент e и ако е $k=1, 2$, тогаш e припаѓа на центарот од f.

Навистина, за $k=1$, односно за $k=2$ кога барем еден од броевите j и $m-n$ е непарен, f ќе биде $[m, n]$-полугрупа (според теоремата 1), па од лемата 3.1 следува дека e припаѓа на центарот од f. Треба да се разгледа уште случајот кога е $k=2$ и кога и j и $m-n$ се парни. Користејќи ги $(0, 2)$ и $(0, m-n)$-

асоцијативностите на f, што следуваат од теоремата 1, добиваме:

$$f(e^n, x_0^{m-n}) = f(e^{m-n}, f(e^n, x_0^{m-n})) = f(f(e^m, x_0), x_1^{m-n}) =$$

$$\text{— (6) —} \quad = f(f(e^{m-2}, x_0, e^2), x_1^{m-n}) = f(e^{n-1}, x_0, e, x_1^{m-n});$$

$$\begin{aligned} f(e^{n-2}, x_0^{m-n+2}) &= f(e^2, f(e^{n-2}, x_0^{m-n+2}), e^{m-n-2}) = \\ &= f(f(e^n, x_0^{m-n}), x_{m-n+1}^{m-n+2}, e^{m-n-2}) = \\ &= f(f(e^{n-1}, x_0, e, x_1^{m-n}), x_{m-n+1}^{m-n+2}, e^{m-n-2}) = \\ &= f(e^2, f(e^{n-3}, x_0, e, x_1^{m-n+2}), e^{m-n-2}) = \\ &= f(e^{n-3}, x_0, e, x_1^{m-n+2}), \end{aligned}$$

при што претпоставуваме дека е $n > 2$. Продолжувајќи во иста смисла ќе добиеме:

за $n=2s+1 : f(e, x_1^m) = f(x_1, e, x_2^m);$

за $n=2s \quad : f(e^2, x_1^{m-1}) = f(e, x_1, e, x_2^{m-1}).$

Во последниов случај, користејќи го равенството $f(e^2, x_0^{m-2}) = f(x_0^1, e^2, x_2^{m-2})$, коешто се докажува исто како и првото од рвенствата дадени во доказот на лемата 3.1, имаме:

$$\begin{aligned} f(e, x_1^m) &= f(e^2, f(e, x_1^m), e^{m-n-2}) = f(f(e^3, x_1^{m-2}), x_{m-1}^m, e^{m-n-2}) = \\ &= f(f(e, x_1, e^2, x_2^{m-2}), x_{m-1}^m, e^{m-n-2}) = \\ &= f(f(e^2, x_1, e, x_2^{m-2}), x_{m-1}^m, e^{m-n-2}) = \\ &= f(e^2, f(x_1, e, x_2^m), e^{m-n-2}) = f(x_1, e, x_2^m). \end{aligned}$$

Така добивме дека во секој случај е

$$f(e, x_1^m) = f(x_1, e, x_2^m). \tag{9}$$

Работејќи слично како и во почетокот, тргнувајќи од $f(e^{n-1}, x_0^{m-n+1})$, можеме да добиеме:

за $n = 2s \quad : f(e, x_1^m) = f(x_1^2, e, x_3^m);$

за $n = 2s+1 : f(e^2, x_1^{m-1}) = f(e, x_1^2, e, x_3^{m-1}),$

а потоа:

$$\begin{aligned} f(e^2, x_1^{m-1}) &= f(e, x_1^2, e, x_3^{m-1}) = f(f(e, x_1^2, e, x_3^{m-1}), e^{m-n}) = \\ &= f(e, x_1, f(x_2, e, x_3^{m-1}, e^2), e^{m-n-2}) = \\ &= f(e, x_1, f(e, x_2^{m-1}, e^2), e^{m-n-2}) = \\ &= f(f(e, x_1, e, x_2^{m-1}), e^{m-n}) = f(e, x_1, e, x_2^{m-1}), \end{aligned}$$

и, на крајот:

$$\begin{aligned} f(e, x_1^m) &= f(e^2, f(e, x_1^m), e^{m-n-2}) = f(f(e^3, x_1^{m-2}), x_{m-1}^m, e^{m-n-2}) = \\ &= f(f(e, x_1, e^2, x_2^{m-2}), x_{m-1}^m, e^{m-n-2}) = \\ &= f(e, x_1, f(e^2, x_2^m), e^{m-n-2}) = \\ &= f(e, x_1, f(e, x_2, e, x_3^m), e^{m-n-2}) = \\ &= f(f(e, x_1, e, x_2, e, x_3^{m-2}), x_{m-1}^m, e^{m-n-2}) = \\ &= f(f(e^2, x_1^2, e, x_3^{m-2}), x_{m-1}^m, e^{m-n-2}) = \\ &= f(e^2, f(x_1^2, e, x_3^m), e^{m-n-2}) = f(x_1^2, e, x_3^m). \end{aligned}$$

Според тоа добивме дека е и $f(e, x_1^m) = f(x_1^2, e, x_3^m)$, а со помош на ова равенство, како и со равенството (9), лесно може да се комплетира доказот на тврдењето од забелешката.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. Трпеновски и Ѓ. Чупона, Финитарни асоцијативни операции со неутрални елементи, Билтен на ДМФ од НРМ, XII (1961), 15—24.

[2] Б. Л. Трпеновски, Делумно асоцијативни n-групоиди со неутрални елементи, Билтен на ДМФ од СРМ, XIV (1963), 5—16.

ON $[m, n]$ -GROUPOIDS
(Summary)

Any mapping $f: G^{m+1} \to G^{n+1}$, G non-empty, is said to be an $[m, n]$-groupoid on G. An $[m, n]$-groupoid, $m > n$, is said to be (i, j)-associative, $0 \leqslant i < j \leqslant m - n$, if for every $x_k \in G$, $k = 0, \ldots, 2m - n$ the following holds:

$$f(x_0, \ldots, x_{i-1}, f(x_i, \ldots, x_{i+m}), x_{i+m+1}, \ldots, x_{2m-n}) =$$
$$= f(x_0, \ldots, x_{j-1}, f(x_j, \ldots, x_{j+m}), x_{j+m+1}, \ldots, x_{2m-n}).$$

An element $a \in G$ is in the centre of f if for every $x_k \in G$, $k = 1, 2, \ldots, m$ and every $0 \leqslant i, j \leqslant m + 1$,

$$f(x_1, \ldots, x_{i-1}, a, x_i, \ldots, x_m) = f(x_1, \ldots, x_{j-1}, a, x_j, \ldots, x_m),$$

If $f(\underbrace{e, \ldots, e}_{k}, x_0, \ldots, x_n, e, \ldots, e) = (x_0, \ldots, x_n)$ for every $x_j \in G, j = 0, 1, \ldots, n$ and every $k = 0, 1, \ldots, m - n$, then e is said to be a neutral element for f.

Let f be an $[n+s, n]$-groupoid on G and let us put:

$$f^1(x_0, \ldots, x_{n+s}) = f(x_0, \ldots, x_{n+s}),$$
$$f^k(x_0, \ldots, x_{n+ks}) = f(x_0, \ldots, x_{s-1}, f^{k-1}(x_s, \ldots, x_{n+ks})).$$

In this note the following theorems are proved:

Theorem 1. Let f be a $(j, j+k)$-associative $[m, n]$-groupoid, $m > n$, $k \geq 1$, containing a neutral element. If s is the greatest common divisor of j, k and $m - n$ $(m - n = rs)$, then f is $(ts, (t+p)s)$-associative for every $t = 0, 1, \ldots$ $p = 1, 2, \ldots$ such that $t + p \leqslant r$. Furthermore, there exists a $(0, s)$-associative $[n+s, n]$-groupoid g such that for every $x_k \in G$, $k = 0, 1, \ldots, n + rs$ the following holds:

$$f(x_0, \ldots, x_{n+rs}) = g^r(x_0, \ldots, x_{n+rs}).$$

Theorem 2. If f is a (j, k)-associative $[m, n]$-groupoid, $m > n$, for some pair (j, k) containing a neutral element e, then f is (j, k)-associative for every pair (j, k) $(0 \leqslant j < k \leqslant m - n)$ if and only if e is in the centre of f. If that is the case, then there exists a $(0, 1)$-associative $[n+1, n]$-groupoid g such that for every $x_k \in G$, $k = 0, 1, \ldots, n + r$, $r = m - n$, the following holds:

$$f(x_0, \ldots, x_{n+r}) = g^r(x_0, \ldots, x_{n+r}).$$

If f is $(j, j+k)$-associative $[m, n]$-groupoid with neutral element e and if $k = 1, 2$, then e belongs to the centre of f.