ЗА ЕДЕН ВИД КОНЕЧНИ НЕКОМУТАТИВНИ ГРУПИ

Билтен ДМФ НРМ, Скопје, 7 (1956), 42–43

1. Како што е познато, постои комутативна група со произволен број елементи, но не е ист случајот и со некомутативните групи; така например, не постои некомутативна група со p^2 елементи, ако p е прост број[1]).

Во точката 2 од ова работа, даваме еден пример за некомутативна група со $2m$ елементи, а потоа, во точката 3, покажуваме дека таа е единствената група со $2m$ елементи што има m максимални циклични подгрупи со по 2 елементи, а една со m; исто така, покажуваме и дека постојат само 2 групи со $2p$ елементи кога p е прост број.

2. Нека M е множество со $2m$ елементи, во коешто ја дефинираме операцијата „o" со релациите

$1°$ $x \circ a_m = a_m \circ x = x$ за секое $x \in M$, $2°$ $a_i \circ a_j = a_{i+j}$, $3°$ $b_i \circ b_i = a_m$

$4°$ $b_i \circ b_j = a_{i-j}$, $5°$ $b_i \circ a_j = b_{i-j}$, $6°$ $a_i \circ b_j = b_{i+j}$

а при тоа место $i-j$ $(i+j)$, во случај кога $i-j \leqslant 0$ $(i+j > m)$, се заменува најмалиот природен број r што ја задоволува релацијата $i-j \equiv r \pmod m$ $(i+j \equiv r \pmod m)$.

Лесно се покажува дека M_0 е група и тоа некомутативна, за $m > 2$. Навистина, од $1°$ следува дека a_m е идентичен елемент, а од $2°$ $(3°)$ дека a_{m-i} (b_i) е инверзен елемент за a_i (b_i). Исто така, упоредувајки ги сите изрази од облик $x \circ (y \circ z)$ со $(x \circ y) \circ z$, се покажува дека операцијата „o" е асоцијативна. Например, $b_i \circ (b_j \circ b_v) = b_i \circ a_{j-v} = b_{i-j+v}$; $(b_i \circ b_j) \circ b_v = a_{i-j} \circ b_v = b_{i-j+v}$. За $m > 2$ групата е некомутативна, оти например $b_2 \circ b_1 = a_1 \neq a_{m-1} = b_1 \circ b_2$.

3. Теорема 1. Постои само една група со $2m$ елементи што има m максимални циклични подгрупи со по два елементи, а една со m.

Теоремата ке ја докажеме на тој начин што ке покажиме дека секоја група G со горните особини е изоморфна на изнесениот пример 2.

Ако со a^1 е означен некој генератор од цикличната подгрупа со m елементи, а со b_i генераторите на цикличните подгрупи со по 2 елементи, очигледно ке бидат задоволени релациите $1°$, $2°$ и $3°$. Со промена на индексите во b_i може да се уреди да биде задоволена и релацијата $6°$. Навистина, не може да биде $a^i b_j = a^v$, оти спрема $2°$, во тој случај би добиле $a^{m-i}(a^i b_j) = a^{v-i}$ т. е. $b_j = a^{v-i}$ што не е можно. Значи $a^i b_j = b_v$; ако ставиме $b_1 = b'_1$, $a^i b_1 = b'_{i+1}$, $a^i b'_{i+1} = b'_{i+(i+1)}$ и т. н. ја добиваме релацијата $6°$, а од тоа следува дека ке бидат исполнети и релациите $4°$ и $5°$, оти тие произлегуваат непосредно од $1°$, $2°$, $3°$ и $6°$. Со тоа покажавме дека G е изоморфна со примерот M_0 од 2, а од тоа, бидејки обично изоморфните групи не се сметаат за различни, следува точноста на теоремата.

Во случајот кога m е прост број, како следствие од теоремата 1 можеме да ја изнесеме и следната

---

[1]) Да се види например *G. Scorza Gruppi Astratti, Roma* 1942 стр. 185

Теорема 2. Постојат само две групи со $2p$ елементи кога p е прост број.

Доказ. Ке покажиме дека освен цикличната група и примерот M_0 од 2, не постои друга група со $2p$ елементи. Спрема општо познатата теорема на Sylov, секој елемент од групата со $2p$ елементи може да има ред 2 или p. Од тоа следува можноста да постои група со $2p$ елементи и од облик $G = \{a, a^2, \cdots a^{p-1}, b, b^2, \cdots b^{p-1}, c, e\}$, каде $a^p = b^p = c^2 = e$ е идентичниот елемент. Лесно се покажува дека тоа не е можно за $p > 2$. Навистина, не може да биде $a^i b^j = a^v$, оти од тоа би добиле $b^j = a^{v-i}$. Значи $a^i b^j = c$ за секое i, но и тоа не е можно, оти например за $i = 1$ и $i = 2$ добиваме $a = a^2$. Ако е $p = 2$ последниот случај е навистина можен, но очигледно се сведува на споменатат група M_0 од 2.

Последната теорема не е точна кога m не е прост број; например за $m = 4$ постои и нецикличната комутативна група со 8 елементи определена со таблицата

o	*e*	*a*	*b*	*c*	*d*	*f*	*g*	*h*
e	*e*	*a*	*b*	*c*	*d*	*f*	*g*	*h*
a	*a*	*e*	*c*	*b*	*f*	*d*	*h*	*g*
b	*b*	*c*	*e*	*a*	*g*	*h*	*d*	*f*
c	*c*	*b*	*a*	*e*	*h*	*g*	*f*	*d*
d	*d*	*f*	*g*	*h*	*e*	*a*	*b*	*c*
f	*f*	*d*	*h*	*g*	*a*	*e*	*c*	*b*
g	*g*	*h*	*d*	*f*	*b*	*c*	*e*	*a*
h	*h*	*g*	*f*	*d*	*c*	*b*	*a*	*e*

Summary

ON FINITE GROUPS

In this note an example of noncommutative group with $2m$ elements is given, and it is shown that it is the only one group which hase m maximals cyclics subgroups with two elements and one maximal cyclic subgroup with m elements. Hence folows that only two groups vith $2p$ elements exist if p is a prime.