

ЗА РЕДУЦИБИЛНИТЕ ПОЛУГРУПИ

Год. збор. Филоз. фак., Прир. -мат. оддел, Скопје, 11 (1958), 19-27

Во ова работа се разгледуваат редуцибилните полугрупи како едно оопштување на полугрупите со неутрални елементи.

1. **Редуцибилни пресликувања.** Нека $(\forall x \in M) f(x) \subseteq M^1$, т. е. со f секој елемент од M се пресликува во некое подмножество од M . За подмножеството R велиме дека е *f-редуцирано* ако ги задоволува релациите

$$(1.1) f(R) = M, \text{ при што } f(R) = \bigcup_{x \in R} f(x)$$

$$(1.2) (\forall x, y \in R) \text{ од } f(x) \subseteq f(y) \text{ следува } x = y$$

$$(1.3) (\forall x \in R, y \in M) \text{ од } f(x) \subseteq f(y) \text{ следува } f(x) = f(y).$$

Во случај кога постојат две различни f -редуцирани множества R_1 и R_2 , ако $(\forall x \in M) f(f(x)) \subseteq f(x)$, од (1.1) и (1.2) следува дека меѓу нивните елементи постои реципрочно еднозначна кореспонденца окарактеризирана со релацијата

$$(1.4) (\forall x \in R_1, y \in R_2) x \rightarrow y \text{ е еквивалентно со } f(x) = f(y).$$

Пресликувањето f е *редуцибилно* во M , ако постои некое f -редуцирано подмножество од M .

Наредната теорема претставува еден критериј за редуцибилноста на дадено пресликување.

Теорема 1. Ако пресликувањето f ја задоволува релацијата $(\forall x \in M) f(f(x)) \subseteq f(x)$, тоа е редуцибилно во M ако и само ако се точни релациите

$$(1.5) f(M) = M$$

$$(1.6) (\forall x \in M) (\exists y \in M) (\forall z \in M) f(x) \subseteq f(y), f(y) \subseteq f(z).^1)$$

Доказ. Ако R е f -редуцирано, од (1.1) следува (1.5), а од (1.1) и (1.3), поради споменатата особина на f , следува (1.6). Обратно, нека f ги задоволува релациите (1.5) и (1.6) и нека M' ги содржи сите елементи $y \in M$ со особината $(\forall x \in M) f(y) \subseteq f(x)$; групирајќи ги елементите од M во класи така да f биде константа во секоја класа и земајќи по еден елемент од секоја класа добиваме едно f -редуцирано множество.

Теорема 2. Нека пресликувањата f_1 и f_2 ја задоволуваат релацијата

$$(1.7) (\forall x \in M) f_1(x) \subseteq f_2(x), f_1(f_2(x)) \subseteq f_1(x), i, j = 1, 2.$$

Од редуцибилноста на f_1 следува редуцибилноста на f_2 ; обратно, при $f_1(M) = M$, од редуцибилноста на f_2 следува редуцибилноста на f_1 .

Доказ. Нека R_1 е f_1 -редуцирано множество. Прво ќе покажеме дека е точна следната релација:

$$(1.8) (\forall x \in R_1) x \in f_1(x).$$

Сpreма (1.7), имаме $(\forall x \in R_1) (\exists y \in R_1) x \in f_1(y)$, од каде спрема (1.7), следува $f_1(x) \subseteq f_2(f_1(y)) \subseteq f_1(y)$, а од тоа, спрема (1.2), се добива $x = y$, т. е. точноста на (1.8).

Од (1.7) и (1.8) се добива релацијата

$$(1.9) (\forall x \in R_1) f_1(x) = f_2(x).$$

Навистина, од $x \in f_1(x)$, спрема (1.7), следува $f_2(x) \subseteq f_2(f_1(x)) \subseteq f_1(x)$, од каде, поради $f_1(x) \subseteq f_2(x)$, се добива (1.9).

Од (1.9), заради тоа што R_1 е f_1 -редуцирано, следува дека R_1

¹⁾ Нека $S \equiv T$ означува дека S се пишува наместо T .

$(\forall x \in M) \equiv$ „за секој елемент x од M “; $(\exists x \in M) \equiv$ „постои некој елемент x од M “; $(\exists! x \in M) \equiv$ „постои еден и само еден ел. x од M “; $F \subseteq Q \equiv$ „ F не е право подмножество од Q “.

ги задоволува релациите (1.1) и (1.2) и во однос на f_2 , а од тоа, спрема (1.7), следува дека е задоволена и (1.3). Значи R_1 е f_2 -редуцирано.

Нека сега претпоставиме дека R_2 е f_2 -редуцирано. Од $f_1(M) = M$ следува $(\forall x_2 \in R_2) (\exists x_1 \in M) x_2 \in f_1(x_1)$, па значи, постои барем едно подмножество R_1 од M со особината $(\forall x_2 \in R_2) (\exists! x_1 \in R_1) x_2 \in f_1(x_1)$; ќе покажеме дека R_1 е f_1 -редуцирано. Навистина, од (1.7), следува $(\forall x_2 \in R_2) f_2(x_2) \subseteq f_2(f_1(x_1)) \subseteq f_1(x_1) \subseteq f_2(x_1)$, од каде, поради тоа што R_2 е f_2 -редуцирано, се добива $f_2(x_2) = f_1(x_1)$, а од тоа лесно се добива дека R_1 е f_1 -редуцирано.

Со тоа е докажана точноста на теоремата.

2. Редуцибилни полугрупи. Нека (M, \cdot) е *полугрупа*, т. е. алгебарска структура со една бинарна *асоцијативна операција*. Со помош на бинарната операција, во M можат да се дефинираат различни пресликувања, па потоа да се пренесе појмот за редуцибилност кај полугрупите, барајќи определеното пресликување да биде редуцибилно во M . Овде ќе се задржиме на два вида редуцибилни полугрупи.

Нека $M \cdot x = \bigcup_{y \in M} \{y \cdot x\}$, а $M(x)$ нека ги содржи сите елементи

од M за кои x е десен неутрален елемент, т. е.

$$(2.1) (\forall x, y \in M) y \in M(x) \text{ екивалентно со } y \cdot x = y.$$

Лесно се покажува точноста на наредните три релации.

$$(2.2) (\forall x \in M) M(x) \subseteq M \cdot x$$

$$(2.3) (\forall x, y \in M) \text{ од } y \in M \cdot x \text{ следува } M \cdot y \subseteq M \cdot x$$

$$(2.4) (\forall x, y \in M) \text{ од } y \in M(x) \text{ следува } M \cdot y \subseteq M(x).$$

Тие се, имено, непосредни следствија од дефиницијата на множествата $M \cdot x$ и $M(x)$ и асоцијативноста на операцијата од полугрупата.

Полугрупата (M, \cdot) е *редуцибилна* ако пресликувањето $x \rightarrow M \cdot x$ е редуцибилно, а *неујтрално редуцибилна*, ако е редуцибилно пресликувањето $x \rightarrow M(x)$.

Ако ставиме $(\forall x \in M) f_2(x) = M \cdot x, f_1(x) = M(x)$, од (2.2), (2.3) и (2.4) следува дека ќе биде исполнета и релацијата (1.7), а од тоа, спрема теоремата 2, се добива следната

Т е о р е м а 3. *Секоја неујтрално редуцибилна полугрупа е редуцибилна; обратно, ако во редуцибилната полугрупа (M, \cdot) е точна релацијата $\bigcup_{x \in M} M(x) = M$, таа е и неујтрално редуцибилна.*

Од релацијата (1.7) се добива и тоа дека сите елементи од некое неутрално редуцирано множество R_0 (т. е. множество кое е редуцирано во однос на пресликувањето $x \rightarrow M(x)$) се идемпотентни, а од тоа се добива дека $(\forall x \in R_0) (M(x), \cdot)$ е потполугрупа со десен неутрален елемент x . Истотака, секој елемент од некое редуцирано множество R (т. е. множество кое е редуцирано во однос на пресликувањето $x \rightarrow M \cdot x$) има лев неутрален елемент, т. е. $(\forall x \in R) (\exists x' \in M) x' \cdot x = x$.

3. Придружени пресликувања. Нека (M, \cdot) е полугрупа и $(\forall x \in Q) h(a) \subseteq M$, каде $Q \subseteq M$. Ќе велиме дека h е *ипридружено пресликување* на Q во полугрупата, а за пократко ќе пишуваме само п. п., ако се исполнети следните релации

$$(3.1) \text{ од } a \in Q, x, y \in M, x \cdot a = y \cdot a \text{ следува } (\forall a' \in h(a)) x \cdot a' = y \cdot a'$$

$$(3.2) \text{ од } a, b \in Q, x, y \in M, x \cdot a = y \cdot b \text{ следува}$$

$$(\forall a' \in h(a)) (\exists b' \in h(b)) x \cdot a' = y \cdot b'.$$

Дека постојат п. п-а за секое множество Q , може да се види ако се стави, например, $(\forall a \in Q) h(a) = a$.

Ќе покажеме сега дека е точна следната

Т е о р е м а 4. *За секое подмножество Q , постои едно и само*

едно максимално п. п. g , *иако да од h е п. п. на Q следува*
 $(\forall a \in Q) h(a) \subseteq g(a)$.

Доказ. Нека H е множеството на сите п. п. а на Q и нека
 $(\forall a \in Q) g(a) = \bigcup_{h \in H} h(a)$. Од тоа следува дека $(\forall a \in Q, h \in H) h(a) \subseteq g(a)$,
а исто така лесно се покажува дека g ги задоволува релациите (3.1)
и (3.2), т. е. дека g е п. п. за Q .

Во натамошната работа множеството $g(a)$ ќе го наречеме *при-*
дружено множество на a во однос на Q . Кореспонденцијата меѓу еле-
ментите од две редуцирани множества на една редуцибилна полугрупа,
окарактеризирана со (1.4), индуцира соодветна кореспонденција меѓу
двете фамилии придружени множества; таа индуцирана кореспонденција
е донекаде окарактеризирана со следната

Теорема 5. Нека R_1 и R_2 се редуцирани множества од реду-
цибилната полугрупа (M, \cdot) и нека $a_1 \in R_1, a_2 \in R_2$ е еден пар кореспон-
дентни елементи, т. е. $(\exists c_1, c_2 \in M) a_1 = c_1 \cdot a_2, a_2 = c_2 \cdot a_1$.

Придружените множества $g_1(a_1)$ и $g_2(a_2)$ ¹⁾ се поврзани со релациите
(3.3) $c_2 \cdot g_1(a_1) \subseteq g_2(a_2), c_1 \cdot g_2(a_2) \subseteq g_1(a_1)$,
а во случај кога полугрупата содржи некој лев неутрален елемент e ²⁾
точни се равенствата

$$(3.4) \quad c_2 \cdot g_1(a_1) = g_2(a_2), \quad c_1 \cdot g_2(a_2) = g_1(a_1).$$

Доказ. Нека ставиме $(\forall a_2 \in R_2) h_2(a_2) = c_2 \cdot g_1(a_1)$; при тоа можеме
да сметаме дека за секој пар кореспондентни елементи a_1, a_2 , парот
 c_1, c_2 е еднозначно определен. Ќе покажеме прво дека h_2 е п. п. на
 R_2 а со тоа ќе биде покажана точноста на првата релација од (3.3);
од причини на симетрија, од тоа ќе следува точноста и на втората
релација.

Од $x \cdot a_2 = y \cdot a_2$ се добива

$$(x \cdot c_2) \cdot a_1 = x \cdot (c_2 \cdot a_1) = x \cdot a_2 = y \cdot a_2 = y \cdot (c_2 \cdot a_1) = (y \cdot c_2) \cdot a_1,$$

од каде, спрема (3.1), следува

$$(\forall a_1' \in g_1(a_1)) x \cdot (c_2 \cdot a_1') = (x \cdot c_2) \cdot a_1' = (y \cdot c_2) \cdot a_1' = y \cdot (c_2 \cdot a_1'),$$

т. е. дека h_2 ја задоволува релацијата (3.1).

Нека $b_2 \in R_2$, а b_1 е елементот од R_2 што му кореспондира на
 b_2 , т. е. $(\exists d_1, d_2 \in M) b_2 = d_2 \cdot b_1, b_1 = d_1 \cdot b_2$. Од $u \cdot a_2 = v \cdot b_2$ следува
 $(u \cdot c_2) \cdot a_1 = u \cdot (c_2 \cdot a_1) = u \cdot a_2 = v \cdot b_2 = v \cdot (d_2 \cdot b_1) = (v \cdot d_2) \cdot b_1$,
од каде, спрема (3.2), следува

$$(\forall a_1' \in g_1(a_1)) (\exists b_1' \in g_1(b_1)) (u \cdot c_2) \cdot a_1' = (v \cdot d_2) \cdot b_1',$$

од каде се добива $u \cdot (c_2 \cdot a_1') = v \cdot (d_2 \cdot b_1')$, т. е. дека h_2 ја задоволува
релацијата (3.2). Значи h_2 е п. п. за R_2 , а од тоа следува точноста
на (3.3).

Нека сега претпоставиме дека e е лев неутрален елемент на
полугрупата, т. е. дека

$$(\forall a_1 \in R_1) e \cdot a_1 = a_1 = c_1 \cdot a_2 = c_1 \cdot (c_2 \cdot a_1) = (c_1 \cdot c_2) \cdot a_1,$$

а од тоа добиваме

$$(\forall a_1' \in g_1(a_1)) a_1' = e \cdot a_1' = (c_1 \cdot c_2) \cdot a_1' = c_1 \cdot (c_2 \cdot a_1'),$$

т. е. дека $g_1(a_1) = c_1 \cdot (c_2 \cdot g_1(a_1))$, а од тоа, спрема (3.3) се добива вто-
рот равенство од (3.4). И во овој случај, од причини на симетрија,
од тоа следува точноста и на првото равенство. Со тоа точноста на
теоремата е во потполност покажана.

Наредната теорема покажува дека кај еден посебијален вид ре-
дуцибилни полугрупи, со помош на придружените множества на некое
редуцирано множество, потполно се определени сите десни *транслации*
на полугрупата, т. е. еднозначните пресликувања од M во M , за кои

¹⁾ g , е п. п. на R_1 .

²⁾ т. е. $(\forall x \in M) e \cdot x = x$.

важи релацијата $(\forall x, y \in M) \varphi(x \cdot y) = x \cdot \varphi(y)$.

Теорема 6. Нека R е редуцирано множество во полугрупата (M, \cdot) и нека $(\forall a, b \in R)$ од $a \neq b$ следува $(\forall x, y \in M) x \cdot a \neq y \cdot b$.

На секое еднозначно пресликување ψ од R во M со особина $(\forall a \in R) \psi(a) \in g(a)$ и коресиондира една десна транслација на полугрупата; обратно, на секоја десна транслација и коресиондира едно пресликување од тој вид.

Доказ. Нека $(\forall a \in R) \psi(a) \in g(a)$ и $\varphi(x \cdot a) = x \cdot \psi(a)$. φ е еднозначно определена, бидејќи спрема направената претпоставка, од $x = x_1 \cdot a = x_2 \cdot b, a, b \in R$ следува $a = b$. т. е. $x = x_1 \cdot a = x_2 \cdot a$, а заради $\varphi(a) \in g(a)$, од тоа се добива $\varphi(x) = x_1 \cdot \psi(a) = x_2 \cdot \psi(a)$. Ќе покажеме сега дека φ е десна транслација; навистина, ако $y = y_1 \cdot b, b \in R$ имаме

$$\varphi(x \cdot y) = \varphi((x \cdot y_1) \cdot b) = (x \cdot y_1) \cdot \psi(b) = x \cdot (y_1 \cdot \psi(b)) = x \cdot \varphi(y).$$

Обратно, нека φ е десна транслација; ќе покажеме дека е точна релацијата $(\forall a \in R) \varphi(a) \in g(a)$, а од тоа ќе следува и точноста на теоремата, бидејќи може да се стави $(\forall a \in R) \psi(a) = \varphi(a)$. Од $x \cdot a = y \cdot a, a \in R$ следува $x \cdot \varphi(a) = \varphi(x \cdot a) = \varphi(y \cdot a) = y \cdot \varphi(a)$,

а од тоа спрема направената претпоставка за полугрупата следува $\varphi(a) \in g(a)$.

Лесно се покажува дека вториот дел од горната теорема е точен за секоја редуцибилна полугрупа.

Забелешка. Редуцибилноста на полугрупите дефинирана во 2. е десна. Аналогно може да се дефинира *лева редуцибилност* и да се пренесат резултатите од 2. и 3. и на тој случај. Имено, ако ставиме $(\forall x, y \in M) x \cdot y = y \cdot x$, лесно се покажува дека (M, \cdot) е полугрупа, ако и само ако (M, \cdot) е полугрупа, па можеме да речеме дека (M, \cdot) е *лева редуцибилна* ако (M, \cdot) е десно редуцибилна.

4. Примери.

Пример 1. Ако полугрупата (M, \cdot) има некој *десен неутрален* елемент e^1 , тој самиот формира едно неутрално редуцирано множество (спрема Теоремата 3 односно 2, тоа е и редуцирано); во тој случај секое редуцирано множество има само еден елемент. Обратно, ако полугрупата содржи редуцирано множество со еден елемент a и ако тој е *скрајнив* од десно²⁾ во полугрупата, постои некој десен неутрален елемент; навистина од $M \cdot a = M$ следува $(\exists a' \in M) a' \cdot a = a$, од каде се добива $(\forall x \in M) (x \cdot a') \cdot a = x \cdot (a' \cdot a) = x \cdot a$, т. е. $x \cdot a' = x$; значи a' е десен неутрален елемент.

Пример 2. Ако операцијата во полугрупата (M, \cdot) е дефинирана со $(\forall x, y \in M) x \cdot y = y$, M ќе биде неутрално редуцирано множество. Важи и обратното, т. е. ако M е редуцирано множество во полугрупата (M, \cdot) тогаш $(\forall x, y \in M) x \cdot y = y$.

Пример 3. Нека M е дадено множество и нека $[M] = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$ каде $M_1 = M$, а M_i е определено со

$$(4 \cdot 1) \quad x \in M_i \text{ еквивалентно со } (\exists! j < i) (\exists! y_j \in M_j, z \in M_{i-j}) x = [y, z].$$

Значи, $[M]$ е *слободниот групоид* со M генератори, каде операцијата на групоидот е означена со $[\quad]$.

Во $[M]$ ќе дефинираме една бинарна операција „ \cdot “ со

$$(4 \cdot 2) \quad (\forall s \in M, x, y, z \in [M]) s \cdot x = x, [y, z] \cdot x = [y \cdot x, z \cdot x].$$

Очигледно, од $x \in M_i, y \in M_j$ следува $x \cdot y \in M_{ij}$.

Ако елементот $p \in M$ ја задоволува релацијата

$$(4 \cdot 3) \quad p = p_1 p_2 \text{ еквивалентно со } p_1 \in M, p_2 = p,$$

велме дека е *прости*; множеството од сите прости елементи на $[M]$ го обележуваме со P . Дека P не е празно множество може да се види на пример од тоа што ако i е прост природен број, сите елементи од M_i се прости.

¹⁾ т. е. $(\forall x \in M) x \cdot e = x$ ²⁾ т. е. $(\forall x, y \in M)$ од $x \cdot a = y \cdot a$ следува $x = y$

Ќе изнесеме сега некои особини на операцијата „·“.

(4.4) $([M], \cdot)$ е полугрупа.

Доказ. Спрема (4.2) сите елементи од M се леви неутрални за операцијата „·“, па значи $(\forall s \in M, x, y \in [M]) s \cdot (x \cdot y) = x \cdot y = (s \cdot x) \cdot y$. Од $x = [x_1, x_2]$ следува

$$\begin{aligned} (\forall y, z \in [M]) x \cdot (y \cdot z) &= [x_1, x_2] \cdot (y \cdot z) = [x_1 \cdot (y \cdot z), x_2 \cdot (y \cdot z)] = [(x_1 \cdot y) \cdot z, (x_2 \cdot y) \cdot z] \\ &= [x_1 \cdot y, x_2 \cdot y] \cdot z = ([x_1, x_2] \cdot y) \cdot z = (x \cdot y) \cdot z, \end{aligned}$$

а со тоа точноста на (4.4) е покажана.

(4.5) Нека $p, q \in P$; од $(\exists x, y \in [M]) x \cdot p = y \cdot q$ следува $p = q$.

Доказ. Ако барем еден од елементите x, y припаѓа на M спрема (4.3), имаме $p = q$; нека $x = [x_1, x_2], y = [y_1, y_2]$; од $x \cdot p = y \cdot q$ следува $[x_1 \cdot p, x_2 \cdot p] = [y_1 \cdot q, y_2 \cdot q]$, т. е. на пример, $x_1 \cdot p = y_1 \cdot q$, од каде се добива $p = q$.

(4.6) $(\forall x \in [M]) (\exists y \in [M]) (\exists! p \in P) x = y \cdot p$.

Доказ. За $x \in P$, точноста е очигледна; од $x = x_1 \cdot x_2; x_2 = x_2' \cdot p, p \in P$ следува $x = x_1 \cdot (x_2' \cdot p) = (x_1 \cdot x_2') \cdot p$; дека p е еднозначно определен следува од (4.5).

(4.7) $(\forall x, y \in [M])$ од $(\exists u \in [M]) x \cdot u = y \cdot u$ следува $(\forall v \in [M]) x \cdot v = y \cdot v$.

Доказ. Од $x \in M$ се добива $u = y \cdot u$, т. е. $y \in M$, а од тоа следува $(\forall v \in [M]) x \cdot v = y \cdot v = u \cdot v$; нека $x = [x_1, x_2], y = [y_1, y_2]$; од $x \cdot u = y \cdot u$ следува $[x_1 \cdot u, x_2 \cdot u] = [y_1 \cdot u, y_2 \cdot u]$, т. е. $x_1 \cdot u = y_1 \cdot u, x_2 \cdot u = y_2 \cdot u$, од каде се добива

$$(\forall v \in [M]) x_1 \cdot v = y_1 \cdot v, x_2 \cdot v = y_2 \cdot v, \text{ т. е.}$$

$$x \cdot v = [x_1, x_2] \cdot v = [x_1 \cdot v, x_2 \cdot v] = [y_1 \cdot v, y_2 \cdot v] = [y_1, y_2] \cdot v = y \cdot v,$$

а со тоа точноста на (4.7) е покажана.

За парот x, y ќе велиме дека се еквивалентни и ќе пишуваме $x \pi y$, ако $(\exists u \in [M]) x \cdot u = y \cdot u$.

Очигледен е доказот и на релацијата

$$(4.8) (\forall x, y \in [M]) x \cdot y = x \text{ е еквивалентно со } y \in M, x \in M \cdot y.$$

Од последните релации лесно се добива точноста на следната

Теорема 7. $([M], \cdot)$ е редуцибилна полугрупа; P е единствено по нејзино редуцирано множество, а при тоа $(\forall p \in P) g(p) = M$. Таа полугрупа е неупирално редуцибилна, ако и само ако M се состои само од еден елемент.

Секој елемент од $[M]$ може да се претстави како производ од прости елементи, а тоа претставување е единствено во тој смисол што од $x = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_m = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \dots \cdot q_n, p_i, q_j \in P; p_i, q_j \notin M$, следува $m = n, p_m = q_n, p_i \pi q_i$.

ON REDUCIBLE SEMIGROUPS

(Summary)

1. Reducible systems. Let S be a set and $(\forall x \in S) T_x \subseteq S^1$. We say that the system $\{T_x, x \in S\}$ is reducible upon S if there exists a subset $R \subseteq S$ such that (i) $S = \bigcup_{x \in R} T_x$, (ii) $(\forall x, y \in R) T_x \subseteq T_y \rightarrow x = y$, and (iii) $(\forall x \in R, y \in S) T_x \subseteq T_y \rightarrow T_x = T_y$. We say that the system $\{T_x, x \in R\}$ is a reduced subsystem, and that the subset R is a reduced set.

A. Let $\{T_x, x \in S\}$ be a system of subsets of the set S , and (iv) $y \in S' \leftrightarrow \{(\forall z \in S) T_y \subseteq T_z \rightarrow T_y = T_z\}$. The system $\{T_x, x \in S\}$ is reducible upon S if, and only if, $S = \bigcup_{x \in S'} T_x$. The subsystem $\{T_x, x \in S'\}$ is a reduced subsystem, and if $R \subseteq S'$ contains one and only one element from every class mod π , where (v) $(\forall x, y \in S) x \pi y \leftrightarrow T_x = T_y$, then R is a reduced set.

B. Let $\{T_x, x \in S\}$ be a reducible system upon S , such that (vi) $(\forall x, y \in S) y \in T_x \rightarrow T_y \subseteq T_x$. If R is a reduced set then (vii) $(\forall x \in R) x \in T_x$. If R_1 and R_2 are two reduced sets then there is a one-to-one mapping θ of R_1 onto R_2 such that (viii) $(\forall x_1 \in R_1, x_2 \in R_2) x_2 = x_1 \theta \leftrightarrow T_{x_1} = T_{x_2}$. Hence it follows that the reduced subsystem is unique.

C. Let $T_1 = \{T_{1,x}, x \in S\}$ and $T_2 = \{T_{2,x}, x \in S\}$ be two systems such that

¹⁾ $(\forall x \in S) \dots \equiv$ for every $x \in S \dots$; $(\exists! x \in S) \dots \equiv$ there exists one and only one $x \in S \dots$; $(\exists x \in S) \dots \equiv$ there exists some $x \in S \dots$; $\dots \rightarrow \dots \equiv \dots$ it follows \dots ; $\leftrightarrow \dots \equiv \dots$ equivalent to \dots

(ix) $(\forall x \in S) T_{1,x} \subseteq T_{2,x}$, and (x) $(\forall x, y \in S) y \in T_{r,x} \rightarrow T_{s,y} \subseteq T_{r,x}$, where $r, s=1,2$. If the system T_1 is reducible, the system T_2 is reducible too. If the system T_2 is reducible, the system T_1 is reducible if and only if $S = \bigcup_{x \in S} T_{1,x}$.

2. Reducible semigroups. Let (S, \cdot) be a semigroup^{*)} and

- (i) $(\forall x \in S) S \cdot x = U \{yx\}$, (ii) $(\forall x, y \in S) y \in S(x) \leftrightarrow yx = y$.
 A. Clearly (iii) $(\forall x \in S) S(x) \subseteq S \cdot x$, (iv) $(\forall x, y \in S) y \in S \cdot x \rightarrow S \cdot y \subseteq S \cdot x$,
 (v) $(\forall x, y \in S) y \in S(x) \rightarrow S \cdot y \subseteq S(x)$.
 B. We say that the semigroup is reducible (neutrally reducible) if the system $\{S \cdot x, x \in S\}$ ($\{S(x), x \in S\}$) is reducible upon S . The set R is reduced (neutrally ueduced) if it is a reduced set for the system $\{S \cdot x, x \in S\}$ ($\{S(x), x \in S\}$).

From 1. C and 2. A it follows:

Every neutrally reducible semigroup is reducible; every neutrally reduced set is reduced too, and all its element are idempotent in the semigroup. A reducible semigroup is neutrally reducible if and only if $S = \bigcup_{x \in S} US(x)$; for every element a of a reduced set R , there exists a left identity, i. e. $(\exists a' \in S) a'a = a$.

3. Associate systems. Let (S, \cdot) be a semigroup and $Q \subseteq S$. We say that the system $\{T_x, x \in Q\}$ is associate to Q if

- (i) $(\forall a \in Q) \{xa = ya \rightarrow (\forall a' \in T_a) xa' = ya'\}$,
 (ii) $(\forall a, b \in Q) \{xa = yb \rightarrow (\forall a' \in T_a) (\exists b' \in T_b) xa' = yb'\}$.

A. Clearly, if $(\forall t \in A) \{T_{t,x} \mid x \in Q\}$ is an associate system to Q , then $\{U T_{t,x}, x \in Q\}$ is an associate system to Q too. Hence it follows that there exists a maximal associate system to Q $\{Z_x, x \in S\}$ such that, if $\{T_x, x \in Q\}$ is an associate system to Q then $(\forall x \in Q) T_x \subseteq Z_x$. Namely, if $t \in A \leftrightarrow \{T_{t,x}, x \in Q\}$ is an associate system to Q , then the system $\{U T_{t,x}, x \in Q\}$ is the maximal associate system to Q .

B. Let R_1 and R_2 be two reduced sets of a reducible semigroup (S, \cdot) and $a_1 \in R_1, a_2 \in R_2$ a corresponding pair, i. e., according to 1. B, $(\exists c_1, c_2 \in S) a_1 = c_1 a_2, a_2 = c_2 a_1$. Then we have (iii) $c_1 \cdot Z_{2,a_2} \subseteq Z_{1,a_1}, c_2 \cdot Z_{1,a_1} \subseteq Z_{2,a_2}$, where $\{Z_{t,a_i}, a_i \in R_i\}$ is the maximal associate system to R_i . If there is a left identity e in the semigroup, then (iv) $c_1 \cdot Z_{1,a_2} = Z_{1,a_1}, c_2 \cdot Z_{1,a_1} = Z_{2,a_2}$.

C. If φ is a right translation of the semigroup (S, \cdot) , i. e. if (v) $(\forall x, y \in S) (xy)\varphi = x \cdot y\varphi$, then for every subset $Q \subseteq S$, we have (vi) $(\forall x \in Q) x\varphi \in Z_x$.

Let R be a subset of the set S such that (vii) $S = SR = \bigcup_{x \in R} S \cdot x$, and (viii) $(\forall x, y \in R) x \neq y \rightarrow (\forall u, v \in S) ux \neq vy$. If ψ is a mapping of R into S such that (ix) $(\forall a \in R) a \psi \in Z_a$, then the mapping φ which is defined by (x) $(\forall a \in R, x \in S) a \cdot x = x_1 a \rightarrow x\varphi = x_1 a \psi$ is a right translation of the semigroup. Conversely, if φ is a right translation, then the mapping ψ induced by φ on the set R satisfies the relations (ix).

4. A Example. Let $[S] = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$, where $S_1 = S$ be a set, and

- (i) $x \in S_k \leftrightarrow (\exists ! r < k, y \in S_r, z \in S_{k-r}) x = [y, z]$, where $k > 1$.

On the set $[S]$ we define a binary operation „ \circ “ as follows:

- (ii) $(\forall a \in S) (\forall x, y \in [S]) a \circ x = x, [x, y] \circ z = [x \circ x, y \circ z]$.

We say that $p \in [S]$ is a prime if

- (iii) $(\forall x, y \in [S]) p = x \circ y \leftrightarrow x \in S, y = p$;

here we suppose that S contains more than one element; if S contains only one element a , we would say that p is a prime if $p = x \circ y \leftrightarrow x = a$ or $y = a$.

A. We have:

- (iv) $([S], \circ)$ is a semigroup;

- (v) $(\forall x, y \in [S]) x \circ y = x \leftrightarrow y \in S, x \in [S] \circ y; x \circ y = y \leftrightarrow x \in S$;

(vi) $(\forall x, y \in [S]) \{[(\exists u \in [S]) x \circ u = y \circ u] \rightarrow [(\forall v \in [S]) x \circ v = y \circ v]\}$;

in this case we say that x and y are similar and we write $x \omega y$;

- (vii) $(\forall x \in [S]) (\exists p_1, p_2, \dots, p_m \in P) x = p_1 \circ p_2 \circ \dots \circ p_m$,

where P is the set of all primes of the semigroup $([S], \circ)$;

- (viii) $(\forall p_i, q_j \in P \setminus S) p_1 \circ p_2 \circ \dots \circ p_m = q_1 \circ q_2 \circ \dots \circ q_n \rightarrow m = n, p_m = q_n, p_i \omega q_i$.

B. From the last five relations it follows:

$([S], \circ)$ is a reducible semigroup. If S contains more than one element, then P is the unique reduced set and $(\forall p \in P) Z_p = [S] \circ p$. The semigroup $([S], \circ)$ is neutrally reducible if and only if S contains only one element.

^{*)} i. e. „ \cdot “ is a binary associative operation on the set S .