SLOBODNI f-IDEMPOTENTNI GRUPOIDI
Збор. труд., Втор конгрес мат. и инф. Македонија Охрид 2000
(Сојуз мат. Макед., Скопје 2003), 31–34
Snežana Ilić, Naum Celakoski, Đorgi Čupona

Apstrakt. Ispituje se problem određivanja slobodnog objekta sa bazom B u varijetetu grupoida sa aksiomom $f(x) = x$, a pritom se koristi apsolutno slobodni objekt sa bazom B.

0. Uvod

Ako je G neprazan skup, a $\cdot : (x, y) \mapsto xy$ preslikavanje iz G^2 u G, tada za par $\mathbf{G} = (G, \cdot)$ kažemo da je *grupoid*.[1)] Za grupoid $\mathbf{G}$ kažemo da je *injektivan* ako je odgovarajuće preslikavanje iz G^2 u G injektivno, t.j. $(\forall x, y, u, v \in G)\,(xy = uv \Rightarrow (x, y) = (u, v))$. Element $a \in G$ je *prost* u $\mathbf{G}$ ako je $(\forall x, y \in G)\; a \neq xy$.

Pomoću prethodna dva pojma se dobija sledeća karakterizacija apsolutno slobodnog grupoida (t.j. slobodnog grupoida u varijetetu V svih grupoida) ([1; L.1.5]).

Tvrđenje 0. *Grupoid* $\mathbf{F} = (F, \cdot)$ *je apsolutno slobodan sa bazom B akko zadovoljava sledeća dva uslova:*

(i) *Skup B prostih elemenata u* $\mathbf{F}$ *je neprazan i generiše* $\mathbf{F}$.

(ii) $\mathbf{F}$ *je injektivan.*

Nadalje, pretpostavljamo da je $\mathbf{F}$ apsolutno slobodan grupoid sa bazom B. Koristićemo pojmove *dužina* $|v|$ i *skup* $P(v)$ *delova od* v određene sa:

$$|b| = 1, \quad |tu| = |t| + |u|, \qquad P(b) = \{b\}, \; P(tu) = \{tu\} \cup P(t) \cup P(u)$$

za svaki $b \in B$, $t, u \in F$.

Označićemo sa $\mathbf{E} = (E, \cdot)$ apsolutno slobodni grupoid sa jednoelementnom bazom $\{e\}$, a njegove elemente sa $f, g, h, \ldots$ Elemente iz $\mathbf{E}$ zovemo *grupoidni stepeni*.

Interpretacija elementa $f \in E$ u grupoidu $\mathbf{G} = (G, \cdot)$ je preslikavanje $f^{\mathbf{G}} : G \to G$ definisano sa $f^{\mathbf{G}}(a) = \varphi_a(f)$, gde je $\varphi_a : E \to G$ homomorfizam iz $\mathbf{E}$ u $\mathbf{G}$ koji je ekstenzija preslikavanja $\lambda : e \mapsto a$. Dakle, $e^{\mathbf{G}}(x) = x$, $(fh)^{\mathbf{G}}(x) = f^{\mathbf{G}}(x)\, h^{\mathbf{G}}(x)$, za svaki $f, h \in E$, $a \in G$. U slučaju $\mathbf{G} = \mathbf{F}$ i $\mathbf{G} = \mathbf{E}$ pisaćemo $f(u)$ i $f(g)$ umesto $f^{\mathbf{G}}(u)$ i $f^{\mathbf{E}}(g)$.

Posmatraćemo, najpre, interpretacije elemenata iz $\mathbf{E}$ u apsolutno slobodnom grupoidu $\mathbf{F}$. Neka su $f, g \in E$, $t, u \in F$ proizvoljni elementi. Indukcijom po dužini ([5]), može se pokazati:

Tvrđenje 0.1. $|f(t)| = |f|\,|t|$.

Tvrđenje 0.2. $f(t) = g(u)\ \&\ |t| = |u| \Leftrightarrow (f = g\ \&\ t = u)$.

Tvrđenje 0.3. $f(t) = g(u)\ \&\ |t| \geq |u| \Leftrightarrow (\exists! h \in E)\,(t = h(u)\ \&\ g = f(h))$.

Analogna tvrđenja Tv.0.1′–Tv.0.3′ prethodnim tvrđenjima, za $\mathbf{E}$ su jasna, pa neće biti eksplicitno formulisana.

Definisaćemo na E novu operaciju "$\circ$" sa: $f \circ g = f(g)$.

Ako važi jednakost $f = g \circ h$, tada ka`emo da je h *desni*, a g *levi delitelj* za f. Jasno je da su f i e i levi i desni delitelji za f. Reći ćemo da je f *reduciran* u E ako je

$$f \neq e\ \&\ (f = g \circ h \Rightarrow g = e \text{ or } h = e).$$

Na ovaj način je konstruisan monoid $(E, \circ, e)$, za koji važi sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 0.4. *Monoid* $(E, \circ, e)$ *je slobodan. Baza je beskonačan prebrojiv skup reduciranih elemenata.*

1. Slobodni f-idempotentni grupoidi

Pretpostavićemo, nadalje, da je $f \in E \setminus \{e\}$ fiksiran, a sa V_f ćemo označiti varijetet grupoida u kojima važi identitet $f(x) = x$. Naš cilj je da konstruišemo slobodan objekt u V_f sa datom bazom B. Pri tome ćemo koristiti sledeći rezultat, dokazan u [4].

Teorema 1.0. *Neka je* $R_f \in F$ *odre|en sa*:

$$R_f = \{u \in F \mid (\forall\, t \in F)\; f(t) \notin P(u)\},$$

i neka je za $u, v \in R_f$, $u * v$ *definisan sa*:

$$u * v = \begin{cases} uv, & uv \in R_f \\ t, & uv = f(t). \end{cases}$$

[1)] Pojmovi: podgrupoid, semigrupa, monoid, generatorni skup, homomorfizam grupoida,... imaju uobičajeno značenje ([2]).

Tada:

(i) $\mathbf{R}_f = (R_f, *)$ *je grupoid sa najmanjim generatornim skupom B.*

(ii) *Ako* $\mathbf{G} = (G, \cdot) \in V_f$ i $\lambda : B \to G$, *tada postoji (jedinstven) homomorfizam* $\varphi : \mathbf{R}_f \to \mathbf{G}$ *koji proširuje* λ.

(iii) *Ako je* f *reduciran, tada* $\mathbf{R}_f \in V_f$.

(iv) *Ako* $\mathbf{R}_f \in V_f$, *tada je* $\mathbf{R}_f$ *slobodan objekt u* V_f *sa bazom B.*

U radu ćemo dokazati sledeća tvrđenja.

Teorema 1. *Ako je* $f = g^{(n)}$, [2] *gde je* $g \in E$ *reduciran, tada* $\mathbf{R}_f \in V_f$.

Teorema 2. *Neka je* $f = g \circ h$, *gde su* $g, h \in E$ *reducirani i pri tom* $g \neq h$. *Tada,* $\mathbf{R}_f \in V_f$ *akko* $g \notin P(h)$.

2. Dokazi Teorema 1 i 2

Prvo, ako $f \in E$ i $\mathbf{G} = (G, \bullet)$ je grupoid, tada ćemo sa $f^{\bullet}$ označiti interpretaciju f u $\mathbf{G}$, t.j. $e^{\bullet}(x) = x$, $(h_1 h_2)^{\bullet}(x) = h_1^{\bullet}(x)\, h_2^{\bullet}(x)$, za svaki $x \in G$, $h_1, h_2 \in E$.

Dokaz Teoreme 1

Neka je $f = g^{(n)}$, $n \geq 1$, i $g \in E$ reducuran element. Tada je

$$R_f = \{t \in F \mid (\forall\, \alpha \in F)\ g^{(n)}(\alpha) \notin P(t)\}, \qquad t * u = \begin{cases} tu, & tu \in R_f \\ \alpha, & tu = g^{(n)}(\alpha) \end{cases}.$$

Neka je $t \in R_f$. Tada:

$$g^*(t) = \begin{cases} g(t), & t \neq g^{(n-1)}(\alpha_1) \\ \alpha_1, & t = g^{(n-1)}(\alpha_1) \end{cases}, \quad g^{(2)^*}(t) = \begin{cases} g(\alpha_1), & t = g^{(n-1)}(\alpha_1) \\ \alpha_2, & t = g^{(n-2)}(\alpha_2) \\ g^{(2)}(t), & t \neq g^{(n-2)}(\alpha_2) \end{cases}.$$

Pretpostavimo da za $k < n$ važi:

$$g^{(k)^*}(t) = \begin{cases} g^{(k-1)}(\alpha_1), & t = g^{(n-1)}(\alpha_1) \\ g^{(k-2)}(\alpha_2), & t = g^{(n-2)}(\alpha_2) \\ \dots & \dots \\ \alpha_k, & t = g^{(n-k)}(\alpha_k) \\ g^{(k)}(t), & t \neq g^{(n-k)}(\alpha_k) \end{cases}.$$

Prema tome, imamo:

$$g^{(n-1)^*}(t) = \begin{cases} g^{(n-2)}(\alpha_1), & t = g^{(n-1)}(\alpha_1) \\ g^{(n-3)}(\alpha_2), & t = g^{(n-2)}(\alpha_2) \\ \dots & \dots \\ \alpha_{n-1}, & t = g(\alpha_{n-1}) \\ g^{(n-1)}(t), & t \neq g(\alpha_{n-1}) \end{cases},$$

odakle sledi da je

$$g^{(n)^*}(t) = \begin{cases} g^{(n-1)}(\alpha_1) = t, & t = g^{(n-1)}(\alpha_1) \\ g^{(n-2)}(\alpha_2) = t, & t = g^{(n-2)}(\alpha_2) \\ \dots & \dots \\ g(\alpha_{n-1}) = t, & t = g(\alpha_{n-1}) \\ t, & t \neq g(\alpha_{n-1}) \end{cases}.$$

Time smo pokazali da je $g^{(n)^*}(t) = t$, t.j. $f^*(t) = t$, za svaki $t \in R_f$, pa $\mathbf{R}_f \in V_f$. ◊

Dokaz Teoreme 2

U L.2.1 i L.2.2 pretpostavićemo da $t \in R_f$.

Lema 2.1. *Ako je* $l^*(t) = l(t)$, *za svaki* $l \in P(f) \setminus \{f\}$, *tada je* $f^*(t) = t$.

Dokaz. Za $f = f_1 f_2$, imamo $f_1, f_2 \in P(f) \setminus \{f\}$, odakle sledi:

$$f^*(t) = f_1^*(t) * f_2^*(t) = f_1(t) * f_2(t) = t. \ \lozenge$$

Lema 2.2. *Neka* $l \in E$ *je takav da* $l \in P(f) \setminus \{f\}$, $l^*(t) \neq l(t)$, *I pri tom* $|l|$ *je najmanja. Tada postoje jedinstveni* $u \in R_f$, $\xi \in E$, *takvi da je* $t = \xi(u)$, $f = l \circ \xi$.

Dokaz. Zbog $l^*(t) \neq l(t)$ imamo $l \neq e$, pa ako je $l = l_1 l_2$, tada: $l_1^*(t) = l_1(t)$, $l_2^*(t) = l_2(t)$, pa je $l^*(t) = l_1^*(t) * l_2^*(t) \neq l_1(t) * l_2(t) = l(t)$, odakle (prema definiciji $*$) sledi da je $l^*(t) = u$, gde je $l(t) = f(u)$. Zbog $|l| < |f|$, dakle $|t| > |u|$, prema Tv.0.3, postoji $\xi \in E$, takav da je $t = \xi(u)$, pa iz $(l \circ \xi)(u) = f(u)$ sledi $f = l \circ \xi$. ◊

Lema 2.3. *Neka je* $f = g \circ h$, *gde su* $g, h \in E$, *različiti reducirani elementi. Tada, postoji* $t \in R_f$ *takav da je* $h^*(t) \neq h(t)$ *akko* $g \in P(h)$.

---
[2] $g^{(1)} = g$, $g^{(k+1)} = g^{(k)} \circ g$

Dokaz. Neka $t \in R_f$ je takav da je $h^*(t) \neq h(t)$. Pokazaćemo da postoji $l \in P(h) \setminus \{h\}$, takav da je $l^*(t) \neq l(t)$. Zaista, kada bi bila tačna jednakost $l^*(t) = l(t)$, za svaki

$l \in P(h) \setminus \{h\}$, tada bi imali $h_1^*(t) = h_1(t)$, $h_2^*(t) = h_2(t)$, gde je $h = h_1h_2$. Odatle, zbog $u = h^*(t) \neq h(t) = h_1(t)\,h_2(t)$, imamo $h(t) = f(u)$. Iz poslednje jednakosti, zbog $|u| < |t|$ (prema Tv.0.3), postoji $\xi \in E$, takav da je $t = \xi(u)$, $h \circ \xi = f = g \circ h$, što nije moguće jer su g i h različiti reducirani elementi iz E.

Neka $l \in P(h) \setminus \{h\}$ je takav da je $l^*(t) \neq l(t)$, pri čemu $|l|$ je najmanja moguća. Ako je $l = l_1l_2$, tada je $l^*(t) = l_1^*(t) * l_2^*(t) \neq l_1(t) * l_2(t) = l(t)$ akko je $l(t) = f(u)$. Odatle, prema Tv.0.3, dobijamo da je $t = \xi(u)$, $l \circ \xi = f = g \circ h$. Poslednja jednakost povlači da je g levi delitelj za l, a h desni delitelj za ξ, što je moguće samo ako je $l = g$, $\xi = h$.

Time smo dokazali da ako je $h^*(t) \neq h(t)$, za neko $t \in R_f$, tada $g \in P(h)$.

Pretpostavimo da $g \in P(h)$. Pokaza}emo da postoji $t \in R_f$ takav da je $h^*(t) \neq h(t)$. U tu svrhu, stavićemo $t = h(a)$, gde je $a \in B$. Tada $|t| = |h| < |f|$, odakle sledi da $t \in R_f$. (Naime, iz definicije skupa R_f sledi da ako $v \in F$ je takav da $v \notin R_f$, tada je $|f| \leq |v|$.) Dovoljno će biti da pokažemo da je $|h^*(h(a))| < |h|^2$.

Zbog toga što je $g(h(a))$ deo od $h(h(a))$, i $g^*(h(a)) = a$, na osnovu Tv.0.1 i Tv.0.1', dobijamo da važi gornja nejednakost. ◊

Lema 2.4. *Ako* $g \notin P(h)$, *tada* $\mathbf{R}_f \in \mathrm{V}_f$.

Dokaz. Prema L.2.3 imamo $h^*(t) = h(t)$, za svaki $t \in R_f$. Odatle sledi da je

$$f^*(t) = g^*(h^*(t) = g^*(h(t)) = t. \ \Diamond$$

Lema 2.5. *Ako* $g \in P(h)$, *tada* $\mathbf{R}_f \notin \mathrm{V}_f$.

Dokaz. Kao i u poslednjem delu dokaza L.2.3, stavićemo $t = h(a)$, gde je $a \in B$. Prema L.2.3, imamo $u = h^*(t) \neq h(t)$. Treba pokazati da je

$$g^*(u) = g^*(h^*(t)) \neq t.$$

Ako je $u = h(v)$, tada $f^*(t) = g^*(u) = g^*(h(v)) = v \neq t$.

Preostaje slučaj kada je, za svaki v, $u \neq h(v)$. Tada je

$$g^*(u) = g(u) = g(h^*(t)) \neq t = h(a).$$

Jednakost $g(u) = h(a)$ nije moguća budući, prema Tv.0.3, iz nje bi sledilo da postoji $\xi \in E$, takav da je $u = \xi(a)$, a zatim i $g \circ \xi = h$, što protivureči činjenici da su g i h različiti reducirani elementi iz E. ◊

Time smo kompletirali dokaz Teoreme 2.

Literatura

[1] R.H. Bruck, *A Survey of Binary Systems*, Springer-Verlag, 1958.

[2] P.M. Cohn, *Universal Algebra*, Harper & Row, 1965.

[3] Ġ. Čupona, N. Celakoski, *Free groupoids with* $x^n = x$, Proceed. of the First Congress of Math. and Informat. of Rep.of Macedonia, Ohrid 1996, p.19–25.

[4] Ġ. Čupona, S. Ili}, *Free groupoids with* $x^n = x$, II, Novi Sad J.Math., Vol. 29, No. 1, 1999, 147–154

[5] Ġ. Čupona, N. Celakoski, S. Ili}, *Grupoid powers*, Matematicki bilten 25 (LI), 2001, 5–12