Во рамнината $\pi(B_n)$, по сила на завршната припадност на B_n, ќе совпаднат точките: $2(n+3) \equiv 6$, $2(n+3)+1 \equiv 3$, $2(n+4) \equiv 4$, $2(n+4)+1 \equiv \equiv 7$, ... , $2(2n+3) \equiv 2(n+2)$, $2(2n+3)+1 \equiv 2(n+2)+1$, каде е $2(2n+3)+1$ добиена од $m \equiv k(n+1)-1$ за $k=2$. Совпаднувањето ќе продолжи и понатака при што првите $2(n+2)+1$ точки ќе се повторат: $2(2n+4) \equiv 6$, . . ., $2(3n+ +4)+1 \equiv 2(n+2)+1$, каде е последната точка добиена од $m=k(n+1)-1$ за $k=3$. После $k-1$ пат повторување на првите $2(n+2)+1$ точки, на крајот ќе се добие: $2[(k-1)n+k+1] \equiv 6$, ..., $2(kn+k+1)+1 \equiv 2(n+2)+1$ односно, B_m дегенерира во B_n.

2°. Ако $n+1$ не е делител на $m+1$, можеме да напишеме $m+1 = = k_1(n+1)+r_1+1$, каде е $r_1 < n$. Ако е во рамнината π реализирана теоремата B_n, точките од B_m ќе почнат периодично да се повторуваат совпаднувајќи со точките од B_n, а $2(k_1 n+k_1+1)+1$ ќе биде последната од сите точки што совпаднале со $2(n+2)+1$. После оваа точка ќе добиеме (точките што следат по $2(k_1 n+k_1+1)+1$ ќе ги означуваме со оние точки со кои тие совпаднуваат):

$$\left.\begin{matrix} 1 & 4 \\ 5 & 2(k_1 n+k_1+1)+1 \end{matrix}\right\} 6 \quad \left.\begin{matrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{matrix}\right\} 3 \quad \left.\begin{matrix} 1 & 4 \\ 5 & 3 \end{matrix}\right\} 4 \quad \left.\begin{matrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{matrix}\right\} 7 \ldots$$

$$\left.\begin{matrix} 1 & 4 \\ 5 & 2(r_1+1)+1 \end{matrix}\right\} 2(r_1+2) \quad \left.\begin{matrix} 1 & 3 \\ 2 & 2(r_1+2) \end{matrix}\right\} 2(r_1+2)+1.$$

Ако сакаме сега во π да биде реализирена и B_m, точките 5, 6 и $2(r_1+2)+1$ мора да припаѓаат на една права, т. е. во π мора да биде реализирана и Br_1. Ако е r_1+1 делител на $n+1$, точноста на овој дел од теоремата следува од 1°., ако пак тоа не е случај, можеме да напишеме $n+1 = = k_2(r_1+1)+r_2+1$, каде $r_2 < r_1$. Спроведувајќи ја дословно штотуку изнесената постапка, ќе дојдеме до заклучок дека е во π реализирана и Br_2, а применета истата постапка конечен број пати, ако $n+1$ и $m+1$ не се релативно прости, ќе не доведе до заклучокот дека во π е реализирана и B_d, каде $d+1$ е најголемиот заеднички делител на $n+1$ и $m+1$, а B_n и B_m, спрема 1°, ќе бидат во π дегенерирано реализирани.

3.° Доказот на овој дел следува од таму што, ако $n+1$ и $m+1$ се релативно прости. во низата на броевите r_1, r_2, . . . добиена по горе опишаниот начин, ќе дојдеме до два броја r_{i-1} и r_i за кои важи $r_i+1 = s(r_{i-1}+ +1)+1$, па ако сакаме во π да бидат реализирани и двете теореми B_n и B_m, ќе добиеме дека на една права припаѓаат точките 3, 5 и 6, што пак не е можно.

Теорема 6. 1.° *Ако е $m=k(n+1)-1$, во рамнината $\pi(A_n)$ може да се реализира теоремата A_m, притоа точките од завршната припадност на A_m совпаѓаат со точките од завршната припадност на A_n, па ќе речеме дека A_m се реализира дегенерирано во $\pi(A_n)$.*

2°. *Ако $n+1$ и $m+1$ не се релативно прости, рамнината π во која се реализирани едновремено A_n и A_m е од облик $\pi(A_d)$, каде $d+1$ е најголемиот заеднички делител на $n+1$ и $m+1$ а A_n и A_m се тогаш дегенирано реализирани во $\pi(A_d)$.*

3°. *Ако се* $n+1$ *и* $m+1$ *релативно прости, не постои рамнина во која можат да се реализираат едновремено и* A_n *и* A_m.

Доказ. Последните две теореми се разликуваат во тоа што во овој случај немаме дегенерирање како во претходниот. Ако е $m=k(n+1)-1$, не сите точки од A_m совпаднуваат со точките од A_n. Заради тоа и доказот на оваа теорема ќе биде донекаде сличен со доказот на претхндната теорема.

1°. Нека ја примениме теоремата B_n (која спрема теоремата 2 е реализирана во $\pi(A_n)$) над точките 3, 1, $2(n+4)+1$ и $2(n+5)$ од теоремата A_m во дадениот распоред. Ќе добиеме дека точките $2, 2(n+4)$ и $2(2n+4)+1$ припаѓаат на една права. Бидејќи пак точката $2(2n+4)+1$ припаѓа и на правата $3\frown 6$, а оваа со правата $2\frown 2(n+4)$ се сече во точката $2(n+3)+1$, се добива дека $2(2n+4)+1\equiv 2(n+3)+1$. Точките пак што ја следат точката $2(2n+4)+1$, ќе почнат да се повторуваат периодично, совпаднувајќи со точките што ја следат точката $2(n+4)$, за да се добие на крајот $2(m+3)+1\equiv 2(n+3)+1$, што и го докажува тврдењето.

2°. Нека се во π реализирани теоремите A_n и A_m. Спрема теоремата 1, идентитетот (5), во секое природно тело на рамнината π е точен идентитетот $a+_n(b+a)=b$, од каде, спрема првиот дел на оваа теорема, точен е и идентитетот

$$(*) \qquad a+_{r(n+1)-1}(b+a)=b,$$

а спрема теоремите 2, 3, идентитетот (11) и 5, 1°, во секое природно тело на π е точен и идентитетот

$$(**) \qquad a+_{s(m+1)-1}(a+b)=b.$$

Ако $n+1$ и $m+1$ не се релативно прости, можеме да напишеме

$$(***) \qquad r(n+1)=s(m+1)+d+1,$$

каде $d+1$ е најголемиот заеднички делител на $n+1$ и $m+1$.

За да го докажеме тврдењето, спрема теоремата 1, идентитетот (5), ќе покажеме дека $a+_d(b+a)=b$. Навистина,

$$
\begin{aligned}
& & & a+_d(b+a)=\\
&\text{— поради (**) —} & & =a+_{s(m+1)-1}(a+(a+_d(b+a)))=\\
&\text{— поради } (p)\text{, —} & & =a+_{s(m+1)-1}(a+_{d+1}(b+a))=\\
&\text{— поради } (p_1)\text{, —} & & =a+_{s(m+1)+d}(b+a)=\\
&\text{— поради (***) —} & & =a+_{r(n+1)-1}(b+a)=\\
&\text{— поради (*) —} & & =b.
\end{aligned}
$$

Дека A_n и A_m се дегенирано реализирани во π, следува од 1° од оваа теорема.

3°. Точноста на овој дел од теоремата се добива како следствие на теоремата 5, 3°.

4. Ќе разгледаме уште две проективни рамнини: $\pi(\alpha_n)$ и $\pi(\beta_n)$, каде е,

$$\alpha_n:\ \left.\begin{matrix}1&2\\3&5\end{matrix}\right\}6\quad \left.\begin{matrix}1&4\\2&3\end{matrix}\right\}7\quad \left.\begin{matrix}2&5\\6&7\end{matrix}\right\}8\quad \left.\begin{matrix}1&6\\3&4\end{matrix}\right\}9\quad \left.\begin{matrix}4&6\\5&9\end{matrix}\right\}10\quad \left.\begin{matrix}3&6\\1&8\end{matrix}\right\}11\ \ldots$$

$$\left.\begin{matrix}3 & 6\\ 1 & 4n\end{matrix}\right\} 4n+3 \quad \left.\begin{matrix}6 & 7\\ 2 & 4n+3\end{matrix}\right\} 4(n+1) \quad \left.\begin{matrix}3 & 6\\ 1 & 4n+2\end{matrix}\right\} 4(n+1)+1$$

$$\left.\begin{matrix}4 & 6\\ 9 & 4(n+1)+1\end{matrix}\right\} 4(n+1)+2 \;\Big|\; 1 \quad 4(n+1) \quad 4(n+1)+2,$$

$$\beta_n:\ 1\ 2\ 4 \quad \left.\begin{matrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{matrix}\right\} 6 \quad \left.\begin{matrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{matrix}\right\} 7 \quad \left.\begin{matrix}2 & 5\\ 3 & 4\end{matrix}\right\} 8 \quad \left.\begin{matrix}1 & 5\\ 6 & 7\end{matrix}\right\} 9 \quad \left.\begin{matrix}1 & 8\\ 4 & 7\end{matrix}\right\} 10 \quad \left.\begin{matrix}1 & 3\\ 2 & 9\end{matrix}\right\} 11 \ \dots$$

$$\left.\begin{matrix}1 & 3\\ 2 & 4n+1\end{matrix}\right\} 4n+3 \quad \left.\begin{matrix}1 & 3\\ 2 & 4n+2\end{matrix}\right\} 4(n+1) \quad \left.\begin{matrix}1 & 5\\ 6 & 4n+3\end{matrix}\right\} 4(n+1)+1$$

$$\left.\begin{matrix}1 & 8\\ 4 & 4(n+1)\end{matrix}\right\} 4(n+1)+2 \;\Big|\; 2 \quad 4(n+1)+1 \quad 4(n+1)+2.$$

Лесно се проверува дека теоремите α_n и β_n преставуваат обопштувања на теоремите D_{10} и D_9 во истиот смисол како B_n за 7_3; $\alpha_1 \equiv D_{10}$ и $\beta_1 \equiv D_9$.

Теорема 7. 1°. *Рамнината π ќе биде од облик $\pi(\alpha_n)$ тогаш, и само тогаш, ако во секое нејзино природно тело е точен идентитетот*

(15) $T_n\,(a, b, c) = ab +_n c$.

2°. *Рамнината π ќе биде од облик $\pi(\beta_n)$ тогаш, и само тогаш, ако во секое нејзино природно тело е точен идентитетот*

(16) $T_n\,(a, b, ab) = ab +_n ab$.

Доказ. Доказот на оваа теорема се добива исто како и доказот на теоремата 1, ако:

1°. За генераторни на α_n се изберат точките:

$1 \equiv P_y$, $2 \equiv [1]$, $3 \equiv 0$, $4\,(a, ab)$ и $5\,(o, c)$,

2°. За генераторни на β_n се изберат точките:

$1 \equiv P_x$, $2 \equiv P_y$, $3 \equiv 0$, $4 \equiv [b]$ и $5\,(ab, ab)$.

Ако во идентитетот (15) ја извршиме смената $c = ab$, ќе го добиеме идентитетот (16), па спрема теоремата 7 имате

Теорема 8. $\alpha_n \dashrightarrow \beta_n$.

Очигледно, при $n = 1$, од оваа теорема се добива познатиот резултат ([1], [2]), дека $D_{10} \dashrightarrow D_9$.

Теорема 9. *Ако во една рамнина π се реализирани било кои две од трите теореми α_n, α_m и α_{n+m}, во π е реализирана и третата од нив.*

Доказ. Ако во π се реализирани теоремите α_n и α_m, можеме да напишеме.

$$T_{n+m}\,(a, b, c) =$$

— поради (t_1), — $= T_n\,(a, b, T_m\,(a, b, c)) =$

— поради (15) — $= T_n\,(a, b, ab +_m c) =$

— поради (15) — $= ab +_n (ab +_m c) =$

— поради (p_1), — $= ab +_{n+m} c$,

па, спрема теоремата 7, во π е реализирана и α_{n+m}.

Обратно, ако во π се реализирани α_{n+m}, и, на пример α_m, можеме да напишеме:

— поради (15), од тоа што во π е реализирана α_{n+m},

$$T_{n+m}(a, b, k) = ab +_{n+m} k,$$

односно, поради (p_1) и (t_1), т. 2,

$$(\alpha) \qquad T_n(a, b, T_m(a, b, k)) = ab +_n (ab +_m k),$$

— поради (15), од тоа што во π е реализинана α_m,

$$T_m(a,b,k) = ab +_m k = c,$$

кое, заменето во (α) ќе ни даде

$$T_n(a, b, c) = ab +_n c,$$

т. е., спрема (15) од теоремата 7, во π е реализирана и α_n.

Теорема 10. *Ако во рамнината $\pi(\alpha_n)$ е реализирана една од двете теореми β_m и β_{n+m}, во $\pi(\alpha_n)$ е реализирана и другата од нив.*

Доказ. Нека е во $\pi(\alpha_n)$ реализирана теоремата β_m. Имаме,

$$T_{n+m}(a, b, ab) =$$

— поради (t_1), — $= T_n(a, b, T_m(a, b, ab)) =$

— поради (15) — $= ab +_n T_m(a, b, ab)) =$

— поради (16) — $= ab +_n (ab +_m ab) =$

— поради (p_1) — $= ab +_{n+m} ab,$

па во $\pi(\alpha_n)$ е реализирана и β_{n+m}.

Обратно, ако во $\pi(\alpha_n)$ е реализирана β_{n+m}, можеме да ставиме,

$$(\beta) \qquad T_{n+m}(a,b,ab) = ab +_{n+m} ab =$$

— поради (P_1), — $= ab +_n (ab +_m ab).$

Од друга страна,

$$T_{n+m}(a, b, ab) =$$

— поради (t_1) — $= T_n(a, b, T_m(a, b, ab)) =$

— поради (15) — $= ab +_n T_m(a, b, ab).$

Земајќи ги во предвид последното равенство и (β), имаме,

$$ab +_n T_m(a, b, ab) = ab +_n (ab +_m ab),$$

од каде, после n последователни скратувања се добива:

$$T_m(a, b, ab) = ab +_m ab,$$

што значи дека во $\pi(\alpha_n)$ е реализирана теоремата β_m.

Од теоремата 3, идентитетите (7) и (11), имаме дека во секое природно тело на рамнината $\pi(B_n)$ е точен идентитетот $T_{n+1}(a, b, c) = ab +_{n+1} c$, од каде, спрема теоремите 7 и 9 се добива

Теорема 11. $B_n \to \alpha_{k(n+1)}$, $k = 1, 2, \ldots$

Теорема 12. 1°. $B_n \to \beta_{k(n+1)-1}$, 2°. $B_n \to \beta_{k(n+1)}$ $k = 1, 2, \ldots$

Доказ. 1°. Доказот на ова тврдење ќе го спроведеме индуктивно по k.

При докажувањето на претходната теорема видовме дека во секое природно тело на рамиината $\pi(B_n)$ е точен идентитетот $T_{n+1}(a,b,c) = ab +_{n+1} c$, од каде, ставајќи $c = o$ и земајќи ги во предвид (p) и (t), т. 2, се добива дека во секое природно тело на $\pi(B_n)$ е точен и идентитетот

$$T_n\,(a, b, a^b) = ab +_n ab.$$

Спрема теоремата 7 имаме значи $B_n \longrightarrow \beta_n$, т. е. за $k = 1$ тврдењето е точно.

Нека претпоставиме дека тврдењето е точно и за $k = p$, т. е. $B_n \longrightarrow \beta_{p(n+1)-1}$. Но, во рамнината $\pi(B_n)$, спрема теоремата 11 е реализирана α_{n+1}, па, спрема теоремата 10, во $\pi(B_n)$ е реализирана и $\beta_{p(n+1)-1+n+1}$, односно, $\beta_{(p+1)(n+1)-1}$, што и го докажува тврдењето.

2°. Доказот на ова тврдење направо следува од теоремите 8 и 11.

За специјалниот случај, $k = 1$ и $n = 1$, од оваа теорема се добива познатиот резултат ([1], § 13) дека $7_3 \longrightarrow D_9$.

5. Користејќи познати резултати, како и резултатите што сега ги добиваме, ќе добиеме некои врски помеѓу коофигурационите теореми што овде ги разгледуваме и некои познати конфугурациони теореми.

Познато е дека од теоремата D_9 следува теоремата D_{10} ако никаде во рамнината не е реализирана теоремата 7_3 ([1], § 13). Спрема теоремата 5, во рамнината $\pi(B_{2k})$ не е реализнрана никаде теоремата 7_3, па е:

Секоја рамнина $\pi(B_{2k})$ во која е реализирана теоремата D_9 е алтернативна.

Пратејќи го овој резултат, испитувавме дали од B_2 следува D_9. Меѓутоа, добивме дека од B_2 следува еден специјален облик на D_9 од кој пак самата D_9 не следува. Имено, од теоремата 3, идентитетите (13) и (14) добиваме дека во секое природно тело на рамнината $\pi(B_2)$ е точен идентитетот $a + (a + a) = (a + a) + a$, кој ([2], теоремата (2. 8)) ја генерира теоремата D_8. Така имаме,

Во рамнината $\pi(B_2)$ е реализирана теоремата D_8.

Ако таблицата за припадност на теоремата D_8 ја напишеме во облик

$$\left.\begin{matrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{matrix}\right\}5 \quad \left.\begin{matrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{matrix}\right\}6 \quad \left.\begin{matrix}1 & 4\\ 2 & 3\end{matrix}\right\}7 \quad \left.\begin{matrix}3 & 4\\ 5 & 7\end{matrix}\right\}8 \quad \left.\begin{matrix}2 & 4\\ 6 & 7\end{matrix}\right\}9 \quad \left.\begin{matrix}1 & 4\\ 2 & 8\end{matrix}\right\}10 \;\Big|\; 3\ 9\ 10,$$

и за генераторни ги избереме точките: $1\,(o, a)$, $2 \equiv P_y$, $3\,(a, o)$ и $4 \equiv P_x$, ќе добиеме дека во секое природно тело на рамнината $\pi(D_8)$ равенките $a.\, y_{\circ}\, a = o$ и $ay = -a$ ($-a$ е решение на равенката $a + x = o$) се еквивалентни по y. Бидејќи пак во секое природно тело на рамнината $\pi(D_8)$ ([2], теорема (2. 8)) е $-a = \sim a$ ($\sim a$ е решение на равенката $x + a = o$), значи дека во секое природно тело на рамнината $\pi(D_8)$ по y се еквивалентни и равенките (y) $a.\, y_{\circ}\, a = o$ и $ay = \sim a$.

Избирајќи ги генераторните точки на теоремата D_9 по ред: $1 \equiv P_x$, $2 \equiv P_y$, $3\,(o, a)$, $4 \equiv [1]$ и $5\,(a, o)$, ќе добиеме дека равенките (y) се еквивалентни по y. Меѓутоа, со ваквиот избор на генераторите на D_9 е наложена припадноста на пресечената точка од правите $2 \frown 3$ и $1 \frown 5$ со правата $4 \frown 7$, односно, земен е само еден специјален облик од теоремата D_9. Ако овој специјален облик го обележиме со D_9^*, имаме,

Од теоремата D_8 следува теоремата D_9^*.

Бидејќи пак ([1], § 13) од D_8 не следува D_9, се добива дека, Од теоремата $D_9{}^*$ не следува теоремата D_9.

Како интересно се наметнува прашањето, дали резултатот (теорема 4) што важи за теоремите A_1 и B_1 може најопшто да се пренесе на теоремите A_n и B_n. Ако во рамнината $\pi(B_n)$ е реализирана правата мала теорема на Пап $\Pi(9; 9, 10)$, идентитетот (11) можеме да го напишеме $a +_{n+1} c = a +_n (a + c) = a +_n (c + a) = c$, од каде спрема теоремата 3, и теоремата 1, идентитетот (5) се добива,

Во рамнината $\pi(B_n)$ во која е реализирана теоремата $\Pi(9; 9, 10)$, реализирана е и теоремата A_n

Така значи, прашањето за еквивалентноста на теоремите A_n и B_n е поврзано со прашањето дали од теоремата B_n следува $\Pi(9; 9, 10)$.

Од друга страна, спрема теоремите 1, 2 и 3, имаме дека во секое природно тело на рамнината $\pi(A_n)$ е точен идентитетот $a +_n (a + c) = a +_n (c + a)$, од каде, после n последователни скратувања, се добива $a + c = c + a$, па спрема познатиот резултат ([1], лема D, или [2], § 2) дека комутативноста на собирањето ја генерира теоремата $\Pi(9; 9, 10)$, имаме,

Од теоремата A_n следува $\Pi(9; 9, 10)$.

Користејќи го последниот резултатат, а спрема теоремата 1, идентитетите (3) и (4), од тоа што во секое природно тело на рамнината $\pi(A_n)$ е точен идентитетот $a +_n (c + (a + d)) = ((c + a) + d)\ {}_n{+}\, a$ се добива дека во секое природно тело на рамнината $\pi(A_n)$ е точен идентитотот $c + (a + d) = (c + a) + d$, т. е. спрема познатиот резултат ([2], § 4) дека,

Од теоремата A_n следува теоремата ${}_aA(10; 11, 13)$, кое што исто така може да се добие и од последниот резултат и [1], лема D.

Во [4], теоремата 1 е покажано дека, ако во една конечна рамнина е реализирана првата мала теорема на Пап $\Pi(9; 9, 10)$, во неа е реализирана и самата теорема на Пап $\Pi(10; 9, 9)$. Спрема погоре добиен ото имаме,

Секоја конечна рамнина $\pi(A_n)$ е Папова.

Би можело да се испита дали ваков резултат важи и за рамнините $\pi(B_n)$. Притоа може да се користи методот по кој во [3] е добиено дека секоја конечна рамнина $\pi(7_3)$ е Дезаргова.

Со оглед на тоа дека во секое природно тело на рамнините $\pi(B_n)$ точни се идентитетите (11) и (12), каде операциите „$+_n$“ и „${}_n{+}$“ играат во извесен смисол симетрична улога, може да се постави прашањето дали таквата улога играат и „T_n“ и „${}_nT$“. Меѓутоа, ако се конструира конфигурациона теорема (по методата опишана например во [1] и [2]) за идентитетот ${}_{n+1}T(c, b, a) = c$, ќе се добие, за $n \geqslant 2$, теоремата

$$Kn:\quad 1\ 2\ 3\ \left.\begin{matrix}1 & 5\\ 3 & 4\end{matrix}\right\}6\quad \left.\begin{matrix}2 & 6\\ 4 & 5\end{matrix}\right\}7\quad \left.\begin{matrix}3 & 5\\ 1 & 7\end{matrix}\right\}8\ \ldots$$

$$\left.\begin{matrix}2 & 6\\ 4 & 2(n+1)\end{matrix}\right\}2(n+1)+1\quad \left.\begin{matrix}3 & 5\\ 1 & 2(n+1)+1\end{matrix}\right\}2(n+2)\ \Big|\ 2\ \ 4\ \ 2(n+2).$$

Идентитетот ${}_{n+1}T(c, b, a) = c$, за $b = 1$ преминува во (13), па спрема теоремата 3 е,

Од теореата K_n следува теоремата B_n.

Теоремите A_n и B_n не можат да се реализираат во обичната проективна рамнина. Овие теореми, ако е $n+1$ прост број можат да се реализираат во рамнините конструирани над поле со карактеристика $n+1$. Ако $n+1$ не е прост во такви рам иини, т. е. во рамнини конструирани над поле со конечна карактеристика, спрема теоремите 5 и 6, ќе бидат дегениранн реализирани тие теореми. Меѓутоа, природно се наметнува прашањето, дали постојат рамнини во кои A_n и B_n можат да се реализираат не дегенерирано ако $n+1$ не е прост. Ако одговорот на ова прашање е позитивен, тогаш, при $m > n$, како следствие на теоремите 5 и 6 би имале,

Од теоремата A_m не следува B_n (спрема тоа ни A_n).

Од друга страна, како што беше погоре покажано, некои теореми што се реализирани во обичната рамнина, реализирани се и во рамнините $\pi(A_n)$ и $\pi(B_n)$. Во овој смисол и со теоремите 11 и 12 се дадени некои врски помеѓу теоремите A_n и B_n од една страна и теореми што можат да се реализираат во обичната проективна рамнина од друга страна, ако приметиме, дека при било какво n секоја од теоремите α_n и β_n е реализирана во обичната проективна рамнина, што направо се добива како следствие од теоремите 8, 9 и 10.

На крајот, нека спомонеме само уште едно следствие од теоремата 9, дека,

Секоја рамнина, во која се реализирани теоремите α_m и α_n, каде m и n се релативно прости, е алтернативна.

ЛИТЕРАТУРА:

[1] Л. А. Скорняков, Проективные плоскости. Усп. мат. Н. Т. 6 Н. 6 (46), 112 — 154 (1951).

[2] Б. И. Аргунов, Конфигурационные постулаты и их алгебраические эквиваленты. Мат. сб. Т. 26 (68) Н. 3, 425 — 456 (1950).

[3] A. Gleason, Finite Fano planes. Amer. J. Math. 78, 797—808 (1956).

[4] H. Lüneburg, Über die beiden kleinen Sätze von Pappos. Arch. Math. 11, 339 — 341 (1960).

[5] G. Pickert, Projektive Ebenen. Berlin 1955.

О НЕКОТОРЫХ ПРОЕКТИВНЫХ ПЛОСКОСТЯХ

Б. Трпеновски

Резюме

В работе рассматриваются конфигурационные предложения A_n (стр. 20), B_n (стр. 22), α_n и β_n (стр. 26). Последние три предложения можно считать как обопщения конфигурационных предложений 7_3, D_{10} и D_9: $B_1 \equiv 7_3$, $\alpha_1 \equiv D_{10}$ и $\beta_1 \equiv D_9$.

Исходя из определений тернарной операции и операций сложения и умножения (как это сделано например в [1]), на стр. 19. введены обозначения (p) и (t), использованные в работе.

Доказывается, что среди локальных алгебраических эквивалентов предложения A_n содержатся соотношения (1) — (6) (стр. 20); среди локальных алгебраических эквивалентов предложения B_n содержатся соотношения (7) — (14) (стр. 22); одним из локальных алгебраических эквивалентов предложения α_n является соотношение (15), а предложения β_n, соотношение (16) (стр, 26).

Понимая под выполнением одного предложения в данной проективной плоскости его проективное выполнение, и точно так же, под „следует" — проективно следует, доказывается, что предложение B_n следует из предложения A_n. Предложения A_1 и B_1 эквивалентные.

Если $m = k(n+1) - 1$, $k = 1,2, \ldots$, в плоскости, в которой выполняется предложение A_n (B_n), выполняется, вырождено, предложение A_m (B_m). В этом случае понятие „вырождено" применяется в смысле того что, в плоскости, в которой выполняется предложеиие A_n, точки образующие замыкающую инциденцу предложения A_m совпадают с точками образующими замыкающую инциденцу предложения A_n (в плоскости, в которой выполняется предложение B_n, конфигурация B_m преобращается в конфигурацию B_n).

Если $d+1$ наибольший общий делитель чисел $n+1$ и $m+1$, в плоскости, в которой выполняются предложения A_n и A_m (B_n и B_m), выполняется и предложение A_d (B_d), а A_n и A_m (B_n и B_m) выполняются тогда вырождено. Если $n+1$ и $m+1$ взаимно простые числа, то не существует плоскость, в которой бы выполнялись предложения A_n и A_m (B_n и B_m).

Предложение β_n следует из предложения α_n.

Выполнение каких-либо двух из предложений α_n, α_m и α_{n+m} влечёт выполнение и третьего из них; а в плоскости, в которой выполняется предложение α_n, выполнение одного из предложений β_m и β_{n+m} влечёт выполнение и другого из них.

Предложения $\alpha_{k(n+1)}$, $\beta_{k(n+1)-1}$ и $\beta_{k(n+1)}$, к $= 1,2, \ldots$. следуют из предложения B_n.

Выполнение двух предложений B_n и П (9; 9,10) влечёт выполнение предложения A_n; так, если из B_n следует П (9; 9,10), предложения A_n и B_n окажутся эквивалентиыми.

С другой стороны, предложения П (9; 9,10) и aA (10; 11,13) следуют из предложения A_n. Из предложения B_2 следует предложение D_8.

Всякая конечная плоскость, в которой выполняется предложение A_n оказывается Папповой.

Предложения α_n и β_n выполняются в альтернативных плоскдстях, а если m и n взаимно-простые числа, плоскость, в которой выполияются предложения α_n и α_m окажется альтернативной.

Альтернативной окажется и плоскость, в которой выполняются предложения B_{2k} и D_9.

Предложения A_n и B_n не выполняются в обычной проективной плоскости, но, если $n+1$ простое число, A_n и B_n выполняются в плоскостях постртоенных над полем характеристики $n+1$. Существование плоскостей, в которых бы выполнялись невырождено предложения A_n и B_n, когда $n+1$ не простое число, имело бы следствием, что при $m > n$, из предложения A_m не следует B_n.