О ГРЕШКАМА КОЈЕ ПРОИЗАЛАЗЕ ИЗ НЕТАЧНОСТИ ДАТИХ ПРИБЛИЖНИХ ВРЕДНОСТИ y_0', y_1', $\cdots$ y_n' ФУНКЦИЈЕ $y=f(x)$ ПРИ ЛИНЕАРНОЈ И КВАДРАТИЧНОЈ ИНТЕРПОЛАЦИЈИ

ПЛАТОН ДИМИЋ

При вршењу интерполације помоћу познатог Лагранжовог обрасца

$$F(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}y_0+$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)}y_1+\cdots\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}y_n$$

није редак случај да се уместо правих вредности неке непознате функције $y_0=f(x_0)$, $y_1=f(x_1)$, $\cdots$ $y_n=f(x_n)$ морају употребити њихове приближне вредности $y_0'=y_0+\Delta y_0$, $y_1'=y_1+\Delta y_1$, $\cdots$ $y_n'=y_n+\Delta y_n$, где је Δy_k $(k=0, 1, \cdots n)$ грешка приближне вредности y_k'[1]). Стога се може паставити питање: а) колика је горња граница L апсолутне вредности оне грешке $\Delta F(x)$, која произалази из нетачности датих вредности y_0', y_1', $\cdots$ y_n', ако је l горња граница апсолутних вредности грешака ових количина; и б) колика може да буде горња граница l апсолутних вредности грешака Δy_k, ако се хоће да апсолутна вредност грешке у резултату не не пређе извесну горњу границу L?

Овде ће бити расмотрени само случајеви линеарне и квадратичне интерполације.

1

За случај линеарне интерполације Лагранжов образац добија облик

$$F(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1.$$

---

[1]) До тога долази: а) када су количине $f(x_0)$, $f(x_1)$, $\cdots$ $f(x_n)$ одређене мерењем; и б) када су количине $f(x_0)$, $f(x_1)$ $\cdots$ $f(x_n)$ одређене рачунски, али су из било ког разлога израчунате само приближно.

Одатле следује

$$\Delta F(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \Delta y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \Delta y_1,$$

$$|\Delta F(x)| \leqslant \frac{|x - x_1|}{|x_0 - x_1|} \cdot |\Delta y_0| + \frac{|x - x_0|}{|x_1 - x_0|} \cdot |\Delta y_1|,$$

$$|\Delta F(x)| \leqslant \frac{|x - x_1|}{|x_0 - x_1|} l + \frac{|x - x_0|}{|x_1 - x_0|} l.$$

Претпоставимо ли затим да је $x_0 \leqslant x \leqslant x_2$, имаћемо:

$$|\Delta F(x)| \leqslant \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} l + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} l$$

или

$$|\Delta F(x)| \leqslant l.^{2)}$$

Одатле се пак види да грешка $\Delta F(x)$, до које долази због нетачности датих вредности y_0' и y_1' приликом линеарне интерполације, може по својој апсолутној вредности да достигне, али не и да премаши границу l апсолутних вредности грешака Δy_0 и Δy_1. Стога и обратно, ако се хоће да буде $|\Delta F(x)| \leqslant L$, морају се y_0' и y_1' одредити тако, како би било $l \leqslant L$.

2

За случај квадратичне интерполације Лагранжов образац добија облик

$$F(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} y_1 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} y_2.$$

Одатле следује

$$\Delta F(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \Delta y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \Delta y_1 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \Delta y_2,$$

---

[2]) Видети: F. A. Willers, Methoden der Praktischen Analysis, Berlin, 1950, str. 35.

$$|\Delta F(x)| \leqslant \frac{|x-x_1|\cdot|x-x_2|}{|x_0-x_1|\cdot|x_0-x_2|}\cdot|\Delta y_0| + \frac{|x-x_0|\cdot|x-x_2|}{|x_1-x_0|\cdot|x_1-x_2|}\cdot|\Delta y_1| +$$

$$+\frac{|x-x_0|\cdot|x-x_1|}{|x_2-x_0|\cdot|x_2-x_1|}\cdot|\Delta y_2|,$$

$$|\Delta F(x)| \leqslant \frac{|x-x_1|\cdot|x-x_2|}{|x_0-x_1|\cdot|x_0-x_2|}\, l + \frac{|x-x_0|\cdot|x-x_2|}{|x_1-x_0|\cdot|x_1-x_2|}\, l +$$

$$+\frac{|x-x_0|\cdot|x-x_1|}{|x_2-x_0|\cdot|x_2-x_1|}\, l,$$

$$|\Delta F(x)| \leqslant \left(\frac{|x-x_1|\cdot|x-x_2|}{|x_0-x_1|\cdot|x_0-x_2|} + \frac{|x-x_0|\cdot|x-x_2|}{|x_1-x_0|\cdot|x_1-x_2|} + \right.$$

$$\left. + \frac{|x-x_0|\cdot|x-x_1|}{|x_2-x_0|\cdot|x_2-x_1|}\right) l.$$

Функција $\varphi(x) = \frac{|x-x_1|\cdot|x-x_2|}{|x_0-x_1|\cdot|x_0-x_2|} + \frac{|x-x_0|\cdot|x-x_2|}{|x_1-x_0|\cdot|x_1-x_2|} + \frac{|x-x_0|\cdot|x-x_1|}{|x_2-x_0|\cdot|x_2-x_1|}$ понаша се у интервалу $[x_0, x_1]$ као функција

$$\varphi_1(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_2-x_0)} - \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_2-x_1)} - \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)},$$

а у интервалу $[x_1, x_2]$ као функција

$$\varphi_2(x) = -\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_2-x_0)} - \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_2-x_1)} + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}.$$

Функција $\varphi_1(x)$ остаје у целом интервалу $[x_0, x_1]$ позитивна и има за $x' = \frac{x_0+x_1}{2}$ свој максимум

$$\varphi_1(x') = \frac{1}{4}\cdot\frac{(x_1-x_0)^2+(x_0+x_1-2x_2)^2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}.$$

Функција $\varphi_2(x)$ остаје у целом интервалу $[x_1, x_2]$ позитивна и има за $x'' = \frac{x_1 + x_2}{2}$ свој максимум

$$\varphi_2(x'') = \frac{1}{4} \cdot \frac{(x_2 - x_1)^2 + (x_1 + x_2 - 2x_0)^2}{(x_2 - x_0)(x_1 - x_0)}.$$

Одатле следује да ће у интервалу $[x_0, x_1]$ бити

$$|\Delta F(x)| \leqslant \frac{1}{4} \cdot \frac{(x_1 - x_0)^2 + (x_0 + x_1 - 2x_2)^2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} l$$

и да ће у интервалу $[x_1, x_2]$ бити:

$$|\Delta F(x)| \leqslant \frac{1}{4} \cdot \frac{(x_2 - x_1)^2 + (x_1 + x_2 - 2x_0)^2}{(x_2 - x_0)(x_1 - x_0)} l.$$

Ако ставимо да је $x_1 - x_0 = h$, $x_2 - x_1 = k$ и да је $\frac{h}{k} = \theta_1$, $\frac{k}{h} = \theta_2$, имаћемо:

$$\varphi_1(x') = \frac{1}{4} \cdot \frac{h^2 + (h + 2k)^2}{(h + k)k} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\theta_1^2 + (2 + \theta_1)^2}{1 + \theta_1},$$

$$\varphi_2(x'') = \frac{1}{4} \cdot \frac{k^2 + (2h + k)^2}{(h + k)h} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\theta_2^2 + (2 + \theta_2)^2}{1 + \theta_2}.$$

Одатле се види да вредности максимума функција $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ зависе само од размера θ_1 и θ_2 и да варирају између 1 и ∞ када θ_1 односно θ_2 варира између 0 и ∞. Истовремено одатле следује да се уопште може написати

$$|\Delta F(x)| \leqslant \frac{1}{4} \cdot \frac{\theta + (2 + \theta)^2}{1 + \theta} l$$

с тим да је $\theta = \frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_1}$ у интервалу $[x_0, x_1]$ и да је $\theta = \frac{x_2 - x_1}{x_1 - x_0}$ у интервалу $[x_1, x_2]$.

Ако сад потражимо ону вредност односа θ_1, или односа θ_2, за коју је $\varphi_1(x') = \varphi_2(x'')$, добићемо:

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{\theta_1^2+(2+\theta_1)^2}{1+\theta_1}=\frac{1}{4}\cdot\frac{\theta_2^2+(2+\theta_2)^2}{1+\theta_2}$$

или, пошто је $\theta_1=\frac{1}{\theta_2}$,

$$\frac{\theta_1^2+(2+\theta_1)^2}{1+\theta_1}=\frac{1+(1+2\,\theta_1)^2}{(1+\theta_1)\cdot\theta_1},$$

одакле следује да је $\theta_1=1$, $\theta_2=1$.

Према томе функције $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ имаће једнаке максимуме ако је $h=k$, то јест ако је $x_1=\frac{x_0+x_2}{2}$. Вредност тих максимума биће:

$$\varphi_1(x')=\varphi_2(x'')=\frac{5}{4}\cdot$$

Лако је увидети да у случају када је $\theta_1\neq\theta_2\neq 1$, мора бити или $\varphi_1(x')$ или $\varphi_2(x'')$ веће од $\frac{5}{4}$. То следује отуда што са рашћењем количине θ_1 расте и $\varphi_1(x')$, а са опадањем количине θ_1 расте количина θ_2, па услед тога расте и $\varphi_2(x'')$. Отуда пак, непосредно, произалази и следеће: да ће горња граница L апсолутне вредности грешке $\Delta F(x)$ у интервалу $[x_0, x_2]$ бити најмања онда, када је $x_1=\frac{x_0+x_2}{2}$, и да ће износити $L=\frac{5}{4}\,l$.

То је, уосталом, уједно и најчешћи случај на који се наилази приликом интерполације, јер се вредности аргумента обично узимају у виду чланова једне аритметичке прогресије. Стога, ако се хоће да апсолутна вредност грешке при таквој интерполацији у нађеним вредностима функције $F(x)$ не буде већа од L, потребно је и довољно да буде испуњен услов[3])

$$l\leqslant\frac{4}{5}L.$$

[3]) Одређивање границе за грешку код квадратичне интерполације нисам успео да нађем у литератури која се односи на ову проблематику.

Résumé

UNE REMARQUE SUR LES ERREURS DES VALEURS ÉVALUÉES PAR LA FORMULE D'INTERPOLATION DE LAGRANGE

PLATON DIMIC

Dans cet article l'auteur donne une limite supérieure de l'erreur par la valeur absolu d'une fonction linéaire et quadratique, définie par la formule d'interpolation de Lagrange, conaissant la limite supérieure des erreurs Δy_i.

Dans le cas de fonction linéaire cette limite ne dépasse pas la limite supérieure l des valeurs absolus des erreurs Δy_i. Mais dans le cas de fonction quadratique cette limite est donnée par la formule

$$|\Delta F(x)| \leqslant \frac{1}{4} \cdot \frac{\theta + (2+\theta)^2}{1+\theta} l,$$

où $\theta = \frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_1}$ dans l'intérvalle $[x_0, x_1]$ et où $\theta = \frac{x_2 - x_1}{x_1 - x_0}$ dans l'intervalle $[x_1, x_2]$.