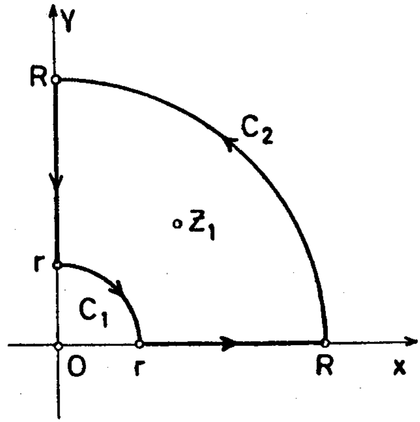
Dragan Dimitrovski

PRIMENA RAČUNA OSTATAKA NA IZRAČUNAVANJE NEKIH ODREĐENIH INTEGRALA*

Linijskom integracijom podesno izabranih kompleksnih funkcija po pogodno izabranoj konturi, uz primenu *Cauchy*-eve teoreme o ostacima, mogu se izračunati vrednosti mnogih određenih integrala koje se ne nalaze u poznatim tablicama i zbirkama. Ako odabrane funkcije sadrže i izvestan broj realnih parametara, tada se varijacijom tih parametara mogu dobiti razni određeni integrali, čije se izračunavanje obično izvodi posebno i uz izbor raznih funkcija i kontura. Čak i nevelik izbor funkcija i kontura integracije može dovesti do zanimljivih rezultata, što ćemo pokazati na sledećim primerima:



Sl. 1

I. Integracijom funkcije

$$F(z)=\frac{e^{i(az^2+bz)}}{z}\,\frac{c+dz^4}{m^4+n^4z^4}$$

($a \geq 0$, $b \geq 0$, $a+b\neq 0$, $m>0$, $n>0$; c i d realni brojevi)

---

* Prof. D. S. Mitrinović ukazao nam je na članak: F. Guglielmino: *Calcolo di integrali singolari mediante il teorema dei residui* (Le Matematiche, anno 1961, t. VI, p. 97, Catania). U tom članku sličnim postupkom izračunati su razni nesvojstveni integrali. Naš članak u stvari predstavlja dopunu i produžetak pomenutog, i ukazuje na dalje mogućnosti. Interesantno je napomenuti da integrali izračunati u pomenutom članku nisu uneseni u drugo izdanje poznate zbirke određenih integrala: *Integraltafel*, zweiter Teil — Bestimmte Integrale, Wien, 1958 von W. Gröbner und N. Hofreiter. Smatramo da bi sa integralima izračunatim u tom članku, i sa našim rezultatima, ova poznata zbirka postala potpunija.

po konturi C sa slike 1 mogu se generalisati mnogi poznati nesvojstveni integrali i dobiti neki novi integrali.

Od svih singulariteta funkcije $F(z)$ na konačnoj daljini samo je jedan unutar konture C, i to pod uslovom da je $R > \frac{m}{n}$ i $r < \frac{m}{n}$.

To je pol prvog reda $z_1 = \frac{m}{n} \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

Tada po *Cauchy*-evoj teoremi o ostacima imamo

$$\oint_C F(z)\, dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_1} F(z),$$

odnosno

$$\int_r^R F(x)\, dx + \int_{C_2} F(z)\, dz + \int_R^r F(iy)\, i dy + \int_{C_1} F(z)\, dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_1} F(z).$$

Integral po delu konture C_2 može se oceniti:

$$\left|\int_{C_2} F(z)\, dz\right| < \int_0^{\pi/2} \left|\frac{e^{i(aR^2 e^{2\theta i} + bRe^{\theta i})}}{Re^{\theta i}} \frac{c + dR^4 e^{4\theta i}}{m^4 + n^4 R^4 e^{4\theta i}} Re^{\theta i} i d\theta\right|$$

$$< \frac{|c| + |d| R^4}{n^4 R^4 - m^4} \int_0^{\pi/2} e^{-aR^2 \sin 2\theta - bR \sin\theta} d\theta.$$

Kako je po uslovu zadatka $a > 0$ i $b > 0$, i kako su funkcije $\sin\theta$ i $\cos\theta$ pozitivne za $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, važi:

$$-aR^2 \sin 2\theta - bR \sin\theta = -R \sin\theta\, (2aR \cos\theta + b) < -bR \sin\theta,$$

tako da za integral dobijamo sledeću majorantu:

$$\left|\int_{C_2} F(z)\, dz\right| < \frac{|c| + |d| R^4}{n^4 R^4 - m^4} \int_0^{\pi/2} e^{-bR \sin\theta} d\theta.$$

Kako za funkciju $f(\sin\theta)$ važi relacija

$$\int_0^{\pi} f(\sin\theta)\, d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} f(\sin\theta)\, d\theta,$$

na integral se može primeniti Jordan-ova nejednakost:

$$\int_0^{\pi} e^{-bR\sin\theta}\, d\theta < \frac{1}{bR}(1-e^{-bR}),$$

tako da je

$$\left|\int_{C_2} F(z)\,dz\right| < \frac{|c|+|d|R^4}{n^4R^4-m^4}\,\frac{1}{2bR}(1-e^{-bR})\,\pi \to 0 \qquad (R\to\infty).$$

(U slučaju ako je $b=0$, tada je po uslovu $a>0$, pa se na integral može direktno primeniti *Jordan*-ova nejednakost.)

Da bismo našli vrednost integrala po delu konture C_1, gde se integracija vrši u obratnom smeru, potrebno je da razvijemo funkciju $F(z)$ u *Laurent*-ov red u okolini tačke $z=0$. Pošto je $z=0$ pol prvog reda, to razvoj ima samo jedan član oblika B_0/z, gde je B_0 ostatak funkcije $F(z)$ za tačku $z=0$, koji iznosi:

$$B_0=\lim_{z\to z_0} z\,\frac{e^{i(az^2+bz)}}{z}\,\frac{c+dz^4}{m^4+n^4z^4}=\frac{c}{m^4}.$$

Prema tome, *Laurent*-ov red glasi:

$$F(z)=\frac{c}{m^4}\,\frac{1}{z}+A_0+A_1z+A_2z^2+\cdots.$$

Integracijom reda dobijamo

$$\int_{C_1} F(z)\,dz=\frac{c}{m^4}\int_{\pi/2}^{0}\frac{re^{\theta i}\,id\theta}{re^{\theta i}}+\sum_{k=0}^{\infty}\left\{A_k r^{k+1} i\int_{\pi/2}^{0} e^{i(k+1)\theta}\,d\theta\right\}.$$

Kada $r\to 0$, usled konačnosti integrala $\int_{\pi/2}^{0} e^{i(k+1)\theta}\,d\theta$, integral po konturi C_1 postaje

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_1} F(z)\,dz=\frac{ci}{m^4}\int_{\pi/2}^{0} d\theta=-\frac{c}{m^4}\,\frac{\pi i}{2},$$

pošto čitava suma teži nuli. Prema tome, kada $R\to\infty$ i $r\to 0$, *Cauchy*-eva teorema daje:

$$\lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to 0}}\left\{\int_C F(z)\,dz\right\}=\int_0^{+\infty} F(x)\,dx+\int_{+\infty}^{0} F(iy)\,i\,dy-\frac{c}{m^4}\,\frac{\pi i}{2}=2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_1} F(z),$$

gde ostatak iznosi:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1} F(z) = \lim_{z \to z_1} (z-z_1) \frac{e^{i(az^2+bz)}}{z} \frac{c+dz^4}{m^4+n^4 z^4}$$

$$= -\frac{cn^4-dm^4}{4\, m^4 n^4} e^{-\frac{m}{n}\left(a\frac{m}{n}+\frac{b}{\sqrt{2}}\right)} \left[\cos\frac{bm}{n\sqrt{2}} + i \sin\frac{bm}{n\sqrt{2}}\right].$$

Razdvajanjem realnih i imaginarnih delova u poslednjoj relaciji dobijamo sledeće realne integrale:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax^2+bx) - e^{-bx}\cos(ax^2)}{x} \frac{c+dx^4}{m^4+n^4x^4}\, dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \frac{cn^4-dm^4}{m^4 n^4} e^{-\frac{m}{n}\left(a\frac{m}{n}+\frac{b}{\sqrt{2}}\right)} \sin\frac{bm}{n\sqrt{2}};$$

kao i

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax^2+bx) + e^{-bx}\sin(ax^2)}{x} \frac{c+dx^4}{m^4+n^4x^4}\, dx$$

$$= \frac{\pi c}{2m^4} - \frac{\pi}{2} \frac{cn^4-dm^4}{m^4 n^4} e^{-\frac{m}{n}\left(a\frac{m}{n}+\frac{b}{\sqrt{2}}\right)} \cos\frac{bm}{n\sqrt{2}}.$$

Interesantno bi bilo proučiti kakve sve realne integrale sadrži ovaj rezultat. Navešćemo jedan redosled kojim se iscrpljuju sve mogućnosti ovog zadatka, kao i neke specijalne slučajeve, delimično poznate:

1° $c=0$;

2° $d=0$;

3° $d=-1$, $c=m^4$, $n=1$. Dobićemo sledeće vrednosti

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax^2+bx) - e^{-bx}\cos(ax^2)}{x} \frac{m^4-x^4}{m^4+x^4}\, dx = \pi e^{-m\left(am+\frac{b}{\sqrt{2}}\right)} \sin\frac{bm}{\sqrt{2}},$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax^2+bx) + e^{-bx}\sin(ax^2)}{x} \frac{m^4-x^4}{m^4+x^4}\, dx = \frac{\pi}{2} - \pi e^{-m\left(am+\frac{b}{\sqrt{2}}\right)} \cos\frac{bm}{\sqrt{2}}$$

4° $c=d, \quad m=n;$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax^2+bx)-e^{-bx}\cos(ax^2)}{x}\,dx=0,$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax^2+bx)+e^{-bx}\sin(ax^2)}{x}\,dx=\frac{\pi}{2},$$

5° $a=0;$

6° $b=0;$

$$2\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax^2}{x}\,\frac{c+dx^4}{m^4+n^4x^4}\,dx=\frac{\pi c}{2m^4}-\frac{\pi}{2}\,\frac{cn^4-dm^4}{m^4n^4}\,e^{-a\frac{m^2}{n^2}}.$$

Iz ovog rezultata, smenom $x^2=t$, za specijalne vrednosti konstanti $c=l^2$, $d=-1$, $m^4=l^2$, $n=1$, može se dobiti kao specijalan slučaj rezultat zadatka br. 250, str. 81, koji je naveden u knjizi: D. S. Mitrinović, *Zbornik* III, 1960.

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2-l^2}{t^2+l^2}\,\frac{\sin at}{t}\,dt=\pi\left(e^{-al}-\frac{1}{2}\right) \qquad (a>0,\ l>0).$$

7° $c=0, \ a=0;$

8° $c=0, \ b=0;$

9° $d=0, \ a=0;$

10° $d=0, \ b=0;$

11° $c=d, \ m=n, \ a=0.$ Dobijamo klasične rezultate:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos bx-e^{-bx}}{x}\,dx=0 \qquad (b>0);$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin bx}{x}\,dx=\frac{\pi}{2} \qquad (b>0).$$

12° $c=d,\ m=n,\ b=0;$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax^2}{x}\, dx = \frac{\pi}{4} \qquad (a>0),$$

što je takođe poznat rezultat.

13° $c=0,\ a=0,\ m=n;$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{1+x^4}\left(e^{-bx}-\cos bx\right) dx = \frac{\pi}{2}\, e^{-\frac{b}{\sqrt{2}}} \sin \frac{b}{\sqrt{2}} \qquad (b>0);$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{1+x^4} \sin bx\, dx = \frac{\pi}{2}\, e^{-\frac{b}{\sqrt{2}}} \cos \frac{b}{\sqrt{2}} \qquad (b>0).$$

14° $c=0,\ b=0,\ m=n;$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{1+x^4} \sin (ax^2)\, dx = \frac{\pi}{4}\, e^{-a} \qquad (a>0).$$

15° $d=0,\ a=0,\ m=n;$

16° $d=0,\ b=0,\ m=n;$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax^2}{x}\, \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-a}\right) \qquad (a>0).$$

Smenom $x^2=t$ možemo ovaj rezultat svesti na poznat.

II. Integracijom kompleksne funkcije

$$F(z) = \frac{1}{1+z^{4n}}\, \frac{e^{iaz}}{z} \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ ;\ a>0)$$

po konturi sa slike 1 mogu se dobiti sledeći realni integrali;

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x\left(1+x^{4n}\right)}\, dx = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n} \sum_{\nu=1}^{2n-1} e^{-a \sin \frac{\nu\pi}{4n}} \cos\left(a \cos \frac{\nu\pi}{4n}\right);$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - e^{-ax}}{x(1+x^{4n})}\, dx = \frac{\pi}{2n} \sum_{\nu=1}^{2n-1} e^{-a \sin \frac{\nu\pi}{4n}} \sin\left(a \cos \frac{\nu\pi}{4n}\right).$$

Specijalni slučajevi: ako je $n=1$, dobija se

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x(1+x^4)}\, dx = \frac{\pi}{2}\left\{1 - e^{-\frac{a}{\sqrt{2}}} \cos \frac{a}{\sqrt{2}}\right\},$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - e^{-ax}}{x(1+x^4)}\, dx = \frac{\pi}{2} e^{-\frac{a}{\sqrt{2}}} \sin \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

III. Integracijom funkcije

$$F(z) = \frac{1}{1+z^{4n}} \frac{e^{iaz^2}}{z} \qquad (a>0;\ n=1, 2, 3, \ldots)$$

po konturi C sa slike 1 može se dobiti sledeći određeni integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax^2)}{x(1+x^{4n})}\, dx = \frac{\pi}{4}\left\{1 - \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{2n-1} e^{-a \sin \frac{\nu\pi}{2n}} \cos\left(a \cos \frac{\nu\pi}{2n}\right)\right\},$$

kao i identitet

$$\sum_{\nu=1}^{2n-1} e^{-a \sin \frac{\nu\pi}{2n}} \sin\left(a \cos \frac{\nu\pi}{2n}\right) = 0.$$

Bilo bi interesantno dokazati gornji identitet i na neki drugi način.

IV. Po konturi sa slike 1 mogu se integrirati i sledeće funkcije

$$\frac{1-z}{1+z} \frac{e^{iz}}{z}; \quad \frac{1}{z} \exp\left(i \frac{az^2+bz}{z+d}\right) \quad (a>0;\ b \geqslant 0;\ d \geqslant 0);$$

$$\frac{e^{iaz}}{(d^4+z^4)^2} \quad (a>0); \qquad \frac{e^{iaz}}{z(d^4+z^4)} \quad (a>0);$$

$$\frac{e^{-az}}{d^4+z^4} \quad (a>0); \qquad \frac{1}{z(d^4+z^4)} \exp(iae^{ibz}) \quad (a>0,\ b>0),$$

pri čemu se dobijaju razni interesantni određeni integrali.

V. Integracijom funkcije

$$F(z)=\frac{\exp(iae^{ibz})}{z^2+d^2} \qquad (a>0,\ b>0,\ d>0)$$

po polukrugu $z=Re^{\theta i}$, $0<\theta<\pi$, $R>d$, dobijaju se realni integrali:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-a\sin bx}\cos(a\cos bx)}{x^2+d^2}\,dx=\frac{\pi}{d}\cos ae^{-bd};$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-a\sin bx}\sin(a\cos bx)}{x^2+d^2}\,dx=\frac{\pi}{d}\sin ae^{-bd}.$$

VI. Integracijom funkcije

$$F(z)=\frac{1}{z}\exp\{ia(z+e^{ibz})\} \qquad (a>0,\ b>0)$$

po konturi sa slike 1 dobijamo integrale

$$\int_{0}^{+\infty}\{e^{-a\sin bx}\cos a(x+\cos bx)-e^{-ax}\cos(ae^{-bx})\}\frac{dx}{x}=-\frac{\pi}{2}\sin a;$$

$$\int_{0}^{+\infty}\{e^{-a\sin bx}\sin a(x+\cos bx)-e^{-ax}\sin(ae^{-bx})\}\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{2}\cos a.$$

Na sličan način kao u prethodnim slučajevima, može se iskoristiti integracija funkcije

$$F(z)=\frac{1}{z}\,\frac{c+dz^4}{m^4+n^4z^4}\exp\{i(az^2+bz+\alpha e^{ibz})\}$$

po istoj konturi, radi dobijanja vrednosti raznih određenih integrala. Pritom treba odrediti kakvim se uslovima pokoravaju parametri a, b, c, d, m, n, α i β.

VII. Integracijom funkcije

$$F(z)=\frac{e^{iz}-1-iz+z^2/_2}{z^3(z^4+d^4)}$$

po istoj konturi dobijamo realne integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x + e^{-x} + x - 2}{x^3 (d^4 + x^4)} dx = \frac{\pi}{2d^6} \left\{ 1 - \frac{d}{\sqrt{2}} - e^{-\frac{d}{\sqrt{2}}} \cos \frac{d}{\sqrt{2}} \right\};$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x - x}{x^3 (d^4 + x^4)} dx = \frac{\pi}{2d^6} \left\{ \frac{d}{\sqrt{2}} - \frac{d^2}{2} - e^{-\frac{d}{\sqrt{2}}} \sin \frac{d}{\sqrt{2}} \right\}.$$

VIII. Integracijom jedne iste funkcije po raznim konturama možemo dobiti razne realne integrale. Tako, na primer, funkcija

$$F(z) = \frac{e^{iz} - 1}{z^2},$$

integrirana po polukrugu: $z = Re^{\theta i}$, $0 < \theta < \pi$, daje poznat rezultat

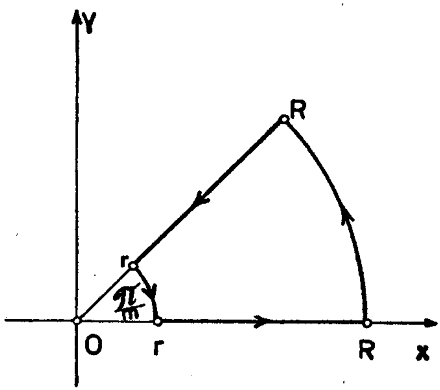
$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 dt = \frac{\pi}{2},$$

dok integrirana po konturi C sa slike 1 daje:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x + e^{-x} - 1}{x^2} dx = 0.$$

Integracijom pak po konturi na slici 2, gde je $m = 4$, dobijamo rezultat

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-x} (\cos x + \sin x)}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$



Sl. 2

IX. Integracijom funkcije

$$F(z) = e^{iz^m} \qquad (m > 1)$$

po konturi na slici 2 dolazimo do relacije

$$\int_0^{+\infty} \cos x^m \, dx = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2m} \int_0^{+\infty} \sin x^m \, dx,$$

dok integracijom funkcije

$$F(z) = \frac{e^{iz^m} - 1}{z^n} \qquad (m \geqslant n > 1)$$

po istoj konturi dobijamo

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\sin x^m)^2}{x^n} \, dx = \frac{\operatorname{ctg} \dfrac{\pi}{2m} (2m + n - 1)}{\sqrt[m]{2^{m-n+1}}} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x^m}{x^n} \, dx.$$

Bilo bi interesantno proučiti kakvi se određeni integrali dobijaju integracijom funkcije

$$F(z) = \frac{e^{iz^m} - 1}{z^m (1 + z^{2m})}$$

po konturi sa slike 2.