SUR QUELQUES FORMULES RELATIVES À DES INTÉGRALES IMPROPRES

Dragan S. Dimitrovski

I. Une généralisation des intégrales de Froullani

La question sur les conditions nécessaires et suffisantes pour la convergeance des intégrales de Froullani

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx, \quad a>o, \quad b>o \tag{1}$$

est résolue complètement dans les travaux de Iyengar [1], Agnew [2] et Ostroski [3]. Karamata et Aljančić [4] ont donné un rapport entre l' intégrale de Froulani (1) et la classe des fonctions à comportement régulier au voisinage de l' infini.

Dans cette note nous allons donner une propriété des intégrales plus générales, c'-est-à-dire des intégrales de la forme

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-g(bx)}{x}\,dx, \quad a>o, \quad b>o. \tag{2}$$

Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions continues dans l' intervale $[0, +\infty)$ qui ont les limites finies et déterminées $f(+\infty)$ et $g(+\infty)$. Pour la valeur principale de l' intégrale suivante on a alors

$$v.\ p. \int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-g(bx)}{x}\,dx = \tag{3}$$

$$= \Big[f(o)-g(+\infty)\Big]\ ln\ \frac{b}{a} + v.\ p. \int_0^{+\infty} \frac{f(x)-g(x)}{x}\,dx$$

dans le cas où la valeur principale du second membre existe.

S' il existe l' intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(x)-g(x)}{x}\,dx,$$

alors il en est de même de l' intégrale (2) et ces deux intégrales sont liées par l' égalité (3) sans symboles v. p.

Le théorème classique de Froullani s'ensuit de ce théorème pour $f=g$. Si $g \equiv f\left(\frac{b}{x}\right)$, nous pouvons formuler un théorème d'une nature pareille:

Soit $f(x)$ une fonction à des propriétés ci-déssus indiquées. Alors pour la valeur principale au sens de Cauchy de l' intégrale suivante on a:

$$V.\,p. \int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f\left(\frac{b}{x}\right)}{x}\,dx = [f(o)-f(+\infty)]\; ln\,\frac{b}{a}. \tag{4}$$

(Ici le symbole $V.\,p.$ signifie la valeur principale au sens de Cauchy, tandis que le symbole $v.\,p.$ signifie la valeur principale plus générale, comme d'habitude).

La démonstration de ces faits s'obtient par modifications appropriées des procédés classiques (que l' on peut trouver, par exemple dans [5]), à partir de la définition de la valeur principale de l' intégrale définie, avec l' application du théorème généralisé de la valeur moyenne.

La formule (3) a un sens pratique si l' intégrale du second membre est plus facile à calculer. Par exemple:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-\cos bx \cdot e^{-bx}}{x}\,dx = (1-0)\,ln\,\frac{b}{a} + \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x}\,e^{-x}\,dx =$$

$$= ln\,\frac{b}{a} + ln\,\sqrt{2}.$$

II. Sur une famille des intégrales définies

Il s'agit des intégrales définies de la forme

$$I = \int_0^{+\infty} R_1(x)\,\frac{\sin \alpha x}{x}\,dx \quad et \quad J = \int_0^{+\infty} R_2(x)\cos \alpha x\,dx \tag{5}$$

où $R_1(x)$ et $R_2(x)$ sont des fonctions rationnelles paires, sans pôles réels, dont le degré du dénominateur est plus grand ou égal au degré du nominateur dans le cas de R_1, ou plus grand dans le cas de R_2; qu' on calcule d' habitude par l'application du calcul des résidus et du lemme de Jordan, et dont la valeur est, comme on le sait:

$$I = \frac{\pi}{2} R_1(o) + \pi \sum_{Jm\{z\} > o} Res \left\{ R_1(z) \frac{e^{i\alpha z}}{z} \right\},$$

(6)

$$J = \pi i \sum_{Jm\{z\} > o} Res \left\{ R_2(z\ e^{i\alpha z} \right\}$$

Nous allons montrer dans cette note que les intégrales (5) peuvent être calculées par une autre méthode — au moyen d'une équation différentielle correspondente:

On a la formule suivante:

(7) $$I = \int_0^{+\infty} R(x) \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \frac{a_0 \pi}{2 b_0} + \sum_{\nu=0}^{m} \frac{a_{2\nu}}{\cos \nu\pi} \sum_{i=1}^{2n} A_i r_i^{\nu}\ e^{r_i \alpha}$$

où

(8) 1° $$R(x) = \frac{a_{2m} x^{2m} + a_{2m-2} x^{2m-2} + \dots + a_4 x^4 + a_2 x^2 + a_0}{b_{2n} x^{2n} + b_{2n-2} x^{2n-2} + \dots + b_4 x^4 + b_2 x^2 + b_0},$$

$n \geq m$; le dénominateur n'ayant pas des zéros réels;

2° les r_i sont les racines de l' équation caractéristique d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants

(9) $$(-1)^n b_{2n} \frac{d^{2n} I}{d\alpha^{2n}} + (-1)^{n-1} b_{2n-2} \frac{d^{2n-2} I}{d\alpha^{2n-2}} + \dots + b_4 \frac{d^4 I}{d\alpha^4}$$

$$- b_2 \frac{d^2 I}{d\alpha^2} + b_0 I = \frac{\pi}{2}$$

sous la condition que les r_i soient tous réels et distincts entre eux;

3° les A_i sont les solutions du système suivant des équations algebriques linéaires

$$A_1 + A_2 + A_3 + \quad \cdots\cdots \quad + A2_n = -\frac{\pi}{2b_2}$$

$$A_1 r_1 + A_2 r_2 + \quad \cdots\cdots \quad + A2_n r_{2n} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{P_{2n}(x)}$$

$$A_1 r_1^2 + A_2 r_2^2 + \quad \cdots\cdots \quad + A2_n r_{2n}^2 = 0$$

$$\text{(10)} \qquad A_1 r_1^3 + A_2 r_2^3 + \quad \cdots\cdots \quad + A2_n r_{2n}^3 = -\int_0^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{P_{2n}(x)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_1 r_1^{2n-2} + A_2 r_2^{2n-2} \quad \cdots\cdots \quad + A2_n r_{2n}^{2n-2} = 0$$

$$A_1 r_1^{2n-1} + A_2 r_2^{2n-1} + \quad \cdots \quad + A2_n r_{2n}^{2n-1} = \sin(2n-1)\frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} \frac{x^{2n-2}\,dx}{P_{2n}(x)}$$

où $P_{2n}(x)$ désigne le dénominateur de $R(x)$ qui n'a pas des zéros réels.

Ici les A_l ne dépendent que de b_{2l} et des intégrales définies des fonctions rationnelles de la forme

$$\text{(11)} \qquad \int_0^{+\infty} \frac{x^{2k-2}}{P2_n(x)}\,dx, \quad 1 \leq k \leq n$$

qu'on peut calculer par des méthodes habituelles.

Une conséquence immédiate du théorème précedent serait le résultat que voici

On a la formule suivante

$$\text{(12)} \qquad \int_0^{+\infty} R_2(x) \cos \alpha x\,dx = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{a_{2\nu}}{\cos \nu\pi} \sum_{i=1}^{2n} A_l r_l^{\nu} \alpha e^{r_j \alpha}$$

avec: 1°

$$R_2(x) = \frac{Q_{2m}(x)}{P_{2n}(x)}$$

2° A_l, r_l doivent être déterminés de même façon que dans le théorème précédent, avec les mêmes suppositions sur la nature des racines de l' équation (9).

La démonstration des derniers théorèmes s'obtient à partir de l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{P_{2n}(x)} \frac{\sin \alpha x}{x} dx \tag{13}$$

en appliquant simultainement les théorèmes de différentiation sous le signe d'intégrale et la convergeance uniforme par rapport à α.

Si l'équation caractéristique de (9) donne les racines r_i complèxes ou multiples, on peut former les formules analogues a (7) et (12), suivant le même procédé de démonstration, les intégrales I et J reprendront la forme

$$I = \sum_{k=1}^{s} \sum_{i=1}^{k} A_{i,k} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} \frac{dx}{\left(x + a_k^2\right)^{k-i+1}};$$

$$J = \sum_{k=1}^{s} \sum_{i=1}^{k} A_{i,k} \int_0^{+\infty} \cos \alpha x \frac{dx}{\left(x^2 + a_k^2\right)^{k-i+1}},$$

les $A_{i,k}$ representent les constantes de décomposition de $R(x)$ en fractions:

$$R_1(x) = \sum_{k=1}^{s} \sum_{i=1}^{k} \frac{A_{i,k}}{\left(x^2 + a_k^2\right)^{k-i+1}}.$$

(cette forme simple suit à cause que $R_1(x)$ est paire), ainsi que l' on peut employer sur (14) le procédé exposé. L'équation différentielle (9) aura dans ce cas une forme particulière.

Nous avons montré qu'au moins dans le cas des intégrales (3) le calcul des résidues (4) peut être remplacé par un procédé équivalent, exposé plus haut.

EXEMPLES: Soit

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x(1+x^2)^2} dx.$$

L'équation différentielle correspondente est

$$\frac{d^4 I}{d\alpha^4} - 2 \frac{d^2 I}{d\alpha^2} + I = \frac{\pi}{2},$$

l'équation caractéristique est

$$r^4 - 2r^2 + 1 = 0,$$

dont les racines sont

$$r_1 = 1, \; r_2 = 1, \; r_3 = -1, \; r_4 = -1.$$

Le résultat est de la forme

$$I(\alpha)=\frac{\pi}{2}+A_1 e^{\alpha}+A_2\alpha e^{\alpha}+A_3 e^{-\alpha}+A_4\alpha e^{-\alpha}.$$

Le système algébrique pour déterminer les A_i est:

$$I(o)=A_1+A_3=-\frac{\pi}{2}$$

$$I'(o)=A_1+A_2-A_3+A_4=\int_o^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^2}=\frac{\pi}{4}$$

$$I''(o)=A_1+2A_2+A_3-2A_4=0$$

$$I'''(o)=A_1+3A_2-A_3+3A_4=-\int_o^{+\infty}\frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^2}=-\frac{\pi}{4}$$

On obtient

$$A_1=A_2=0,\quad A_3=-\frac{\pi}{2},\quad A_4=-\frac{\pi}{4};$$

et

$$I(\alpha)=\frac{\pi}{2}\left[1-e^{-\alpha}-\frac{\alpha}{2}e^{-\alpha}\right].$$

ce qui d'ailleurs peut être facilement revu au moyen du calcul des résidus. On peut en déduire quelques intégrales non compris dans notre résultat ci—déssus. Étant que l'on a

$$I'(\alpha)=\int_o^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{(1+x^2)^2}\,dx=\frac{\pi}{4}(1+\alpha)e^{-\alpha},$$

$$I''(\alpha)=\int_o^{+\infty}\frac{x\sin\alpha x}{(1+x^2)^2}\,dx=\frac{\pi}{4}\alpha e^{-\alpha},$$

$$I'''(\alpha)=\int_o^{+\infty}\frac{x^2\cos\alpha x}{(1+x^2)^2}\,dx=\frac{\pi}{4}(1-\alpha)e^{-\alpha},$$

$$I^{IV}(\alpha)=\int_o^{+\infty}\frac{x^3\sin\alpha x}{(1+x^2)^2}\,dx=\frac{\pi}{4}(2-\alpha)e^{-\alpha};\ \alpha>0$$

on a, par exemple

$$\int_0^{+\infty} \frac{Ax^4+Bx^2+C}{(x^2+1)^2}\,\frac{\sin\alpha x}{x}\,dx = \frac{\pi}{4}\Big[A(2-\alpha)e^{-\alpha}+B\alpha e^{-\alpha}+C(2-2e^{-\alpha}-\alpha e^{-\alpha})\Big],$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{Dx^2+E}{(x^2+1)^2}\cos\alpha x\,dx = \frac{\pi}{4}e^{-\alpha}\Big[D(1-\alpha)+E(1+\alpha)\Big].$$

Remarque. L'idée initiale pour ce procédé est due à Gaston Julia [6], qui a traité quelques cas particuliers.

III. Sur une hypothèse de E. H. Copson

Dans son cours [7] E. H. Copson a formulé une hypothèse qui n'est pas démontrée jusqu' à présent:

„*Chaque intégrale définie qui peut être calculée exactement au moyen du calcul des résidus, peut être déterminée exactement par une autre mèthode*".

Cette hypothèse nous parait probable en vertu du fait que les fonctions analytiques $f(z)$, pour $z=x$ réel, présentent un sous ensemble très spécial des fonctions R—intégrables (continues) d'une variable réelle. La difficulté élémentaire dans l' abord à cette question consiste dans les diverses methodologies de calcul des intégrales définies.

Dans la note précédente nous avons remplacé le calcul des résidus par une autre méthode pour une classe très particulière des intégrales.

Remarquons qu'on connait dans la litterature beaucoup des méthodes paralelles pour calculer les certaines intégrales définies, mais elles sont tous liées à des classes particulières.

Pour illustrer son assertion que la classe des intégrales calculables au moyen du calcul des résidus est plus étroite que la classe générale des integrales définies, dans le même lieu dans son livre E. H. Copson en titre de l' intégrale qu'on ne peut pas calculer au moyen des résidus signale l'intégrale de Euler — Poisson

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\,, \tag{15}$$

E. H. Copson a formulé cette assertion car il n'a pas réussi à construire une telle fonction analytique $F(z)$ qui sur l' axe des réels serait e^{-x^2}, qui aurait des singularités à la distance finie et qui aurait la propriete $zF(z)\to o$ $z\to\infty$, ainsi qu'il n' ait pas pu employer les contoures et les méthodes habituelles du calcul des résidus.

L' intégrale (15) est calculable au moyen des résidus, en une voie d'un peu indirecte. Partons de l' intégrale

$$I(n) = \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n}$$

qu'on intègre facilement au moyen des résidus si l'on intègre la fonction:

$$f(z) = \frac{1}{\left(1 + \frac{z^2}{n}\right)^n}, \qquad n \text{ — entier}$$

au long du contour $|z| = R$, $0 \leq arg\ z \leq \pi$. On a (voir [5], p. 708)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n} = 2\pi i \sum \mathrm{Res} \frac{1}{\left(i + \frac{z}{\sqrt{n}}\right)^n \left(-i + \frac{z}{\sqrt{n}}\right)^n} =$$

$$= \frac{2\pi i}{(n-1)!} \lim_{z \to i\sqrt{n}} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \frac{1}{\left(\frac{z}{\sqrt{n}} + i\right)^n} = \pi \sqrt{n} \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}.$$

Nous avons obtenu

$$I(n) = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \sqrt{n} \frac{\pi}{2}.$$

Suivant la définition on a

$$e^{-x^2} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n};$$

Suivant le théoreme de Leibnitz:

$$\lim \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n} = \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n} =$$

(16)

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{n \to \infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \sqrt{n} \frac{\pi}{2}.$$

Si l' on applique ici la formule de Wallis, on obtient tout de suite

$$\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Remarquons qu'on peut démontrer la formule de Wallis au moyen des résidus, en devellopant sin z au produit infini [8]. Ainsi on peut calculer l' intégrale d' Euler—Poisson (15) au moyen du calcul des résidus avec l' application de la limite (16).

IV. Sur la valeur principale au sens de Cauchy des intégrales définies entre les limitres finies des fonctions rationnelles aux pôles simples

Soit R (x) une fonction rationelle de la variable rèelle x qui a un nombre fini des pôles du premier degrè. La définition de la valeur principale de l' intègrale dèfinie est comme suit:

$$(17)\qquad \text{v. p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx = \lim_{\substack{N\to+\infty\\ \varepsilon_j\to 0}}\left\{\int\limits_{-N}^{X_1-\varepsilon_1} R(x)\,dx + \int\limits_{X_m+\varepsilon_m}^{+N} R(x)\,dx + \sum_{k=1}^{m}\int\limits_{X_k+\varepsilon_k}^{X_{k+1}-\varepsilon_k} R(x)\,dx\right\}$$

supposant l' existence de cette limite-là [9]. La valeur principale au sens de Cauchy est définie comme un cas particulier, où les ε_j sont egaux entre eux, et pour N on a $N\cdot\varepsilon = 1$. La théorie élémentaire des fonctions analytiques donne une formule d'évaluation immédiate de cette valeur des intégrales impropres. Ces intégrales sont impropres dans deux sens: comme des intégrales des fonctions discontinues et illimitées, et comme les intégrales dans un intervalle infini.

Cette formule est donnée par

$$(18)\qquad v.\ p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx = 2\pi i\left\{\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=a_k} R(z) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\operatorname*{Res}_{z=x_k} R(z)\right\}.$$

Si nous nous restreignons au seul cas de la valeur principale de l' intégrale d'une fonction illimitée qui a des pôles du premier degré dans un segment fini, c'est-à-dire aux intégrales:

$$(19)\qquad v.\ p.\int\limits_{a}^{b} R(x)\,dx,$$

nous pouvons citer d'abord une formule pour ce cas, à savoir

$$(20)\qquad v.\ p.\int\limits_{a}^{b} R(x)\,dx = \sum_{k=1}^{m}\left(A_k\cdot ln\,\frac{x_{k+1}-x_k}{x_k-x_{k-1}}\right) + F(b)-F(a);\quad x_0=a,\ x_{m+1}=b$$

où x_k présentent les points singuliers de $R(x)$ sur axe des réels, a_k les points singuliers de $R(x)$ sur le demi-plane supérieur, $F(x)$ la fonction primitive pour cette partie de $R(x)$ qui est régulière sur $[a, b]$, et A_k les constantes du devellopement de $R(x)$ en fractions rationnelles, les constantes appartenant aux pôles simples.

Nous allons donner une formule équivalente à (20) pour les intégrales (19), et analogue à (18), c'est-à-dire une formule qui emploi les methodes de la théorie des fonctions analytiqués. La démonstration de ce théorème est faite de même façon que dans l' article [10]. La construction de la formule est fondée sur les propositions suivantes:

Lemme 1.: Chaque intervalle $[a', b'] \subset [a, b]$ *qui contient un seul pôle simple du dénominaieur de* $R(x)$ *par la transformation*

$$x = \frac{a(b-a)t^2+b}{1+(b-a)t^2} \tag{21}$$

passe en deux sousintervalles symétriques qui contiennent chacun par un unique pôle simple de $R[x(t)]$. *Les racines réels du dénominateur de* $R(x)$ *en dehors de* $[a,b]$ *se transforment en racines imaginaires; les racines compléxes du dènominateur de* $R(x)$ *se transforment aussi en racines complexes du dénominateur de* $R[x(t)]$.

Lemme 2: Soit $R(x)$ *une fonction rationnelle qui dans* $[a, b]$ *n'a que des pôles simples. On a alors*

$$v.\,p.\int_a^b R(x)\,dx = v.\,p.\left\{2(a-b)^2\int_0^{+\infty}\frac{t\,dt}{[1+(b-a)t^2]^2}\,R\left[\frac{a(b-a)t^2+b}{1+(b-a)t^2}\right]\right\}. \tag{22}$$

Lemme 3: Quelle que soit la fonction rationnelle $R(x)$, *finie dans les points* $x=a$ *et* $x=b$, *la fonction analytique*

$$f(z) = \frac{z\ln z}{[1+(b-a)z^2]^2}\,R\left[\frac{a(b-a)z^2+b}{1+(b-a)z^2}\right] \tag{23}$$

juit de la propriété

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi} f(Re^{i\theta})\cdot Re^{i\theta}\,i\,d\theta = 0. \tag{24}$$

Ces lemmes, dont la démonstration ne présente aucune difficulté, permettent d'émoncer le théorème suivant:

Soit $R(x)$ *une fonction rationnelle qui n'a que des pôles simples dans* $[a, b]$. *Alors on a*

$$(25)\qquad v.\ p. \int_a^b R(x)\,dx = -4(b-a)^2 \left\{ \sum_{z=z_k} \operatorname{Res} f(z) + \frac{1}{2} \sum_{z=x_k} \operatorname{Res} f(z) \right\}$$

où l' addition se rapporte aux résidus des pôles z_k situés dans le demi-plan supérieur et aux résidus des pôles simples x_k qui sont situés sur l' axe des réels, les pôles appartenant à une fonction formée au moyen de $R(x)$ et de (21) dont la forme est donnée par (23).

Un cas particulier important: Soit $R(x)$ une fonction régulière dans $[a, b]$. Alors $f(z)$ n'a pas de pôles réels, et il s'agit d'une intégrale régulière. On a

$$\frac{1}{2} \sum_{z=x_k} \operatorname{Res} f(z) = 0$$

de manière que l' on a la formule pour les intégrales définies:

$$(26)\qquad \int_a^b R(x)\,dx = -4(a-b)^2 \sum_{J_m\{z\}>0} \operatorname{Res} \left\{ \frac{z \ln z}{[1+(b-a)z^2]^2} R\left[\frac{a(b-a)z^2+b}{1+(b-a)z^2}\right] \right\}$$

déjà démontrée dans [10].

On peut étendre ce raisonnement sans difficultés au cas d'une fonction analytique uniforme $f(z)$ (au lieu d'une fonction rationnelle $R(z)$), ayant aussi un nombre fini des pôles simples dans $[a \cdot b]$; par exemple, comme on l'a fait dans l' article [11]. Nous pouvons formuler le théorème suivant:

Soit $f(x)$ une fonction réelle, n'ayant que sur (a, b) des pôles du premier degré, telle que $f(z)$ soit analytique, uniforme, n'ayant dans tout le plan complèxe qu'un nombre fini des pôles et des singularités essentielles isolées. Alors on a:

$$v.\ p. \int_a^b f(x)\,dx =$$

(27)

$$= (a-b) \left\{ \sum_{z=z_k} \operatorname{Res} \left\{ \frac{\ln z}{(z+1)^2} f\left(\frac{az+b}{1+z}\right) \right\} + \sum_{z=x_k} \operatorname{Res} \left\{ \frac{\ln z}{(z+1)^2} f\left(\frac{az+b}{1+z}\right) \right\} \right\}$$

où l' addition se rapporte aux résidus des singularités z_k dans tout le plan complèxe dans la première somme. et aux residus des poles x_k du premier degré sur le demi-axe positive $x > 0$.

La démonstration est la même comme dans le cas du théorème précédente, ayant pris en considération les généralités indiquées dans l' article [11].

V. L' intégrale impropre des fonctions rationnelles comme somme des résidus dans le cercle — unité

Il est possible, pour certaines classes des intégrales réelles impropres, de construire une formule qui réduit leur calcul à la somme simple des résidus dans le cercle-unité, c' est-à-dire qui les transforme en intégrales complèxes. On peut ainsi éviter dans quelques cas l' emploi de la limite $|z| \to \infty$.

Soit $f(x)$ une fonction rationnelle et continue sur l' axe réel, telle que l' intégrale impropre

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \tag{28}$$

existe. Le point $z=\infty$ soit un point simple pour la fonction $f(z)$. Alors pour l' intégrale (28) on a la formule

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 4\pi i \sum_{|w|=1} \operatorname{Res} \left\{ f\left(\frac{iw+1}{w+i}\right) \Big| (w+i)^2 \right\}. \tag{29}$$

Dans la démonstration de cette formule on emploi des propriétés de la transformation bilinéaire. La démonstration est la même comme dans les articles [10] et [11].

Exemple:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 4\pi i \sum_{|w|=1} \operatorname{Res} \left\{ \frac{1}{4iw} \right\} = \pi \operatorname{Res}_{|w|=1} \frac{1}{w} = \pi.$$

Il est aussi facile de demontrer le théorème inverse:

Soit $f(z)$ une fonction rationnelle, régulère sur le cercle $|z|=1$, ayant dans l' interieur $|z|<1$ de celui-là un nombre des pôles. Alors pour l' intégrale sur le cercle-unité on a:

$$\int_{|z|=1} f(z)\,dz = 2i \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{x+i}{x-i}\right) \frac{dx}{(x-i)^2}, \tag{30}$$

où l' intégration du second membre est effectuée sur l' axe des réels.

La démonstration est tout-à-fait analogue à celle du théorème directe (29). Les formules précédentes fournissent l' identité suivante:

$$\sum_{|z|=1} \operatorname{Res} f(z) = 2i \sum_{J_m\{z\}>0} \operatorname{Res} \left\{ f\left(\frac{z+i}{z-i}\right) \Big| (z-i)^2 \right\}.$$

Exemple:

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 2i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-i}{x+i} \frac{dx}{(x-i)^2} = 2i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2i \cdot arc\, tgx \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 2\pi i$$

VI. Remarque sur le lemme de Jordan

Dans l' article [12] on a demontıé que si $P_n(z)$ est un polynome à coefficients positifs et si la fonction analytique $f(z)$ juit de la propriété: $f(z) = O(z^{n-2})$, $z \to \infty$, dans tout l' angle $o \leq \arg z \leq \frac{\pi}{n}$, on a la propriété (32), où C designe l' arc: $o \leq \arg z \leq \frac{\pi}{n}$, $|z| = R$. Ce ıésultat généıalise le lemme de Jordan bien connu.

Nous allons complèter ce résultat par le théorème suivant:

Soit $f(z)$ une fonction analytique dans la région:

(31) $$o \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2n}, \quad |z| = R$$

exception faite d'un nombre fini de points singuliers isolés, avec la propriété

$$f(z) = O(z^{n-2}), \quad z \to \infty$$

dans cette région (n entier positif). Alors on a

(32) $$\int_C f(z)\, e^{iP_n(z)}\, dz \to 0, \quad z \to \infty$$

où C est la région (31), et où $P_n(z)$ désigne un polynome aux coefficients réels avec le coefficient positif appartenant au membre du plus grand degré.

Ce théorème généralise les suppositions sur $P_n(z)$, mais il diminue la region d' intégration.

La démonstration du théorème s' efectue de même façon que dans l' article [12], avec plus de précision dans l' emploi de l' inégalité da Jordan.

C'est par l' emploi du dernier théorème que l' on peut étendre la classe des intégrales définies calculables par le calcul des résidus.

VII. L' intégration indéfinie au moyen des résidus

On a demontré qu'il est incorrect à dire que les seuls intégrales définies, qu'on peut calculer au moyen des résidus, sont les certaines classes des intégrales très particulières, entre les limites bien spéciales. E. H. Neville [13] a demontré que les intégrales des fonctions rationnelles entre les limites arbitraires peuvent être calculées au moyen du calcul des résidus. Nous l' avons fait le même dans [10], en démontraint une formule équivalente (26). Spécialement pour les intégrales trigonometriques R. P. Boas [14] propose la construction suivante

$$(33)\qquad \int_0^\pi R(\sin\theta,\cos\theta)\,d\theta = Re\left\{2\pi\sum \operatorname{Res}\left[z^{-1}f(z)\left(1-(i\pi)^{-1}\log\frac{i(1-z)}{1+z}\right)\right]\right\},$$

qu'il a généralisée pour les limites arbitraires. Dans le livre [15] aussi pour les fonctions rationnelles on trouve la formule:

$$(34)\qquad \int_a^b R(x)\,dx = \sum \operatorname{Res}\left[R(z)\,ln\,\frac{z-b}{z-a}\right] + \operatorname*{Res}_{z=\infty}\left[R(z)\,ln\,\frac{z-b}{z-a}\right]$$

qui est évidement valable au cas plus general [11].

Le but de cette note est de remarquer qu' il n' est pas nécessaire de restreindre le type de la fonction sous le signe de l' intégrale ni les limites d' intégration, pour pouvoir appliquer le calcul des résidus. Nous avons démontré dans [11] une formule valable pour les classes des intégrales bien générales:

$$(35)\qquad \int_0^x f(x)\,dx = -x\sum \operatorname{Res}\left\{\frac{ln\,z}{(1+z)^2}\,f\left(\frac{x}{1+z}\right)\right\}$$

c'-est-à dire pour ces fonctions analytiques $f(z)$ qui gardent leur uniformité si l' on applique une transformation bilinéaire. *A partir de tous ces résultats il devient claire que, grâce aux transformations conformes diverses, pour un intégrand donné $f(x)$, on peut construire une fonction analytique $F(z)$, dont la somme des résidus dans un domaine détérminé serait égale à l' intégrale définie de $f(x)$ entre les limites indiquées.* Ici se trouve l' idée générale pour calculer les intégralles indéfinies au moyen des résidus. Il faut tout d' abord que $f(x)$ soit telle que $f(z)$ soit analytique. Si l'on transforme l' intervale $[a, b]$ au moyen d' une transformation analytique $z = G(W)$ en un contour fermé du W—plane, à la longueur duquel $f(G)$ est analytique et régulière et dans l' intérieur duquel $f(G)$ est uniforme et elle a des points singuliers isolés, on peut employer le théorème de Cauchy sur les résidus. Comme l' on le voit, il s' agit d' un changement de la variable spécifique dans les intégrales complèxes. D' ailleurs, de cette manière sont construites les formules (29) et (30) dans le texte, aussi que (35). Car l' évaluation des résidus dans le cas général s' effectue au moyen du develloppement dans la série de Laurent, les intégrales indéfinies qu' on obtient par ce procédé sont d' habitude dans la forme d' une série potentielle convergeante.

Par exemple, si on applique le procédé (35) sur l' intégrale indéfinie d' Euler-Poisson (15), ayant pris en consideration que l' on a

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{(1+z)^2}}}{(1+z)^2}=\frac{1}{(1+z)^2}-\frac{x^2}{(1+z)^4\,1!}+\frac{x^4}{(1+z)^6\,2!}-\frac{x^6}{(1+z)^8\,3!}+\cdots$$

et que le devellopement d' une branche de ln z autour de $z=-1$ est

$$\ln z=\pi i-\frac{z+1}{1}-\frac{(z+1)^2}{2}-\frac{(z+1)^3}{3}-\cdots\cdots,$$

alors le résidus pour la seule singularité $z=-1$ dans le contour est

$$\operatorname*{Res}_{z=-1} F(z)=-1+\frac{x^2}{3\cdot 1!}-\frac{x^4}{5\cdot 2!}+\frac{x^6}{7\cdot 3!}-\frac{x^8}{9\cdot 4!}+\cdots\cdot$$

on obtient d' après (35)

$$\int_0^x e^{-x^2}\,dx=x-\frac{x^3}{1\,!\,3}+\frac{x^5}{2\,!\,5}-\frac{x^7}{3\,!\,7}+\cdots\cdot$$

Il est évident que les constructions semblables à (33), (34) et (35) sont possibles dans un sens arbitraire.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Iyengar, K.S.K. — On Froullani Integrals. J. Indian Math. Soc., (2), 4 (1940).

[2] Agnew, R.P. — Mean values and Froullani integrals. Proc. Amer. Math. Soc., 2 (1951), 237-241.

[3] Ostrovski, A.M. — On some generalization of the Cauchy-Froullani Integral. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. XXXV (1949), 612-616.

[4] С. Аљанчић и Ј. Карамата—Правилно промењљиве функције и Frullani-ев интеграл. Зборник радова САН, L, Математички институт, књ. 5, 1956, 239-248.

[5] Г. М. Фихтенгольц—Курс дифференцального и интегрального исчисления, том II, 1959, p. 625-626.

[6] Julia Gaston — Exercises d' Analyse, tome III, Paris 1947, p. 133-137.

[7] E. H. Copson — The theory of functions of a complex variable, London 1948.

[8] Ernst Lindelöf — Calcul des résidus. Paris, 1905.

[9] D. S. Mitrinović — Zbornik matematičkih problema,III. „O glavnoj vrednosti nesvojstvenog integrala".

[10] Д. Димитровски — За една метода на пресметување на определени интеграли од рационални функции. Билтен на ДМФ на НРМ, Скопје, 1962, том XII, p. 21-31.

[11] D. Dimitrovski et D. Adamović — Sur quelques formules du calcul des résidus, Matematički vesnik, XVI, Belgrade, 1965.

[12] D. Dimitrovski — Une généralisation du lemme de Jordan. Bull. soc. math. et phys. de R. P. Macedoine, t. XII, Skopje 1961, p. 33—43.

[13] E. H. Neville — Indefinite integration by means of residues. Math. Student, 13 (1945), 16-24.

[14] R. P. Boas — Indefinite integration by residues, The Amer. Mathematical Monthly, 71 (1964), 3, 298-300.

[15] Behnke — Sommer — Theorie der Analytische Functionen, zweiter Auflage, 1962.

Драган С. Димитровски

ЗА НЕКОИ ФОРМУЛИ ШТО СЕ ОДНЕСУВААТ ДО НЕСВОЈСТВЕНИ ИНТЕГРАЛИ

Резиме

Авторот дава формули, во текстот под број (3), (4), (7), (12), (20), (25), (27), (29), (30), (32), (35), што се однесуваат до пресметувањето одделни партикуларни класи несвојствени интеграли. Поради краткоста доказите се изоставени, но секаде е нагласена идејата на доказот. Формулите се пропратени со исцрпни коментари и се илустрирани со примери.