МАТЕМАТИЧКИ ВЕСНИК
1 (16), 1964 стр. 113—117.

Dragan S. Dimitrovski
et *Dušan D. Adamović*

SUR QUELQUES FORMULES DU CALCUL DES RÉSIDUS

(Communiqué le 8 novembre 1963)

1. *Soit* $f(z)$ *une fonction analytique univoque possédant dans tout le plan complexe fermé un nombre fini de pôles ou de singularités essentielles qui n'appartiennent pas au segment* $[a, b]$ $(a<b)$.

Alors on a la formule

$$\int_0^b f(x)\,dx=(a-b)\sum \operatorname{Res}\left\{\frac{\ln z}{(1+z)^2}\, f\left(\frac{az+b}{1+z}\right)\right\}, \tag{1}$$

où la somme s'étend à toutes les singularités hors de la demi droite $0\leqslant x<\infty$ *de la détermination de la fonction*

$$F(z)=\frac{\ln z}{(1+z)^2}\, f\left(\frac{az+b}{1+z}\right)$$

laquelle correspond à la coupure $0\leqslant z<\infty$ *et pour laquelle* $\ln z>0$ *si* $z>1$.

En effet, mettant à profit la substitution bilinéaire

$$x=\frac{at+b}{1+t}, \tag{2}$$

on obtient

$$\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)\int_0^{+\infty} f\left(\frac{at+b}{1+t}\right)\frac{dt}{(1+t)^2}. \tag{3}$$

La transformation bilinéaire

$$z\leftarrow\frac{az+b}{1+z}$$

applique le segment $[a, b]$ sur $[0, +\infty)$, transforme la fonction $f(z)$ en fonction $f\left(\frac{az+b}{1+z}\right)$ et chacune des singularités de $f(z)$ en une singularité de même type de la fonction $f\left(\frac{az+b}{1+z}\right)$, les dernières étant toutes hors de la demi-droite $[0, +\infty)$.

C'est pourquoi on peut appliquer au calcul de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} f\left(\frac{at+b}{1+t}\right)\frac{dt}{(1+t)^2}$$

le procédé connu consistant à intégrer la détermination mentionnée de la fonction $F(z)$ le long du contour formé de deux cercles dont les centres sont dans l'origine et de deux segments sur la demi-droite $[0, +\infty]$. En effet, la fonction

$$\frac{1}{(1+z)^2} f\left(\frac{az+b}{1+z}\right)$$

n'a d'autres singularités que celles mentionnées ci-dessus. D'autre part, comme la fonction $f\left(\frac{az+b}{1+z}\right)$ reste finie lorsque $z\to\infty$, de sorte que l'on a

$$\left|f\left(\frac{az+b}{1+z}\right)\right| \leqslant M$$

pour $|z|$ suffisamment grand, nous avons

$$\left|\int_{|z|=R} F(z)\,dz\right| \leqslant \int_0^{2\pi}\left|f\left(\frac{aRe^{i\theta}+b}{Re^{i\theta}+1}\right)\right| \frac{|\ln Re^{i\theta}|\,R}{|1+Re^{i\theta}|^2}\,d\theta \leqslant \frac{2\pi MR(\ln R+2\pi)}{(R-1)^2}\to 0,\ R\to\infty .$$

L'application de ce procédé-là conduit au résultat

$$\int_0^{+\infty} f\left(\frac{at+b}{1+t}\right)\frac{dt}{(1+t)^2} = -\sum \operatorname{Res}\left\{\frac{\ln z}{(1+z)^2} f\left(\frac{az+b}{1+z}\right)\right\}. \tag{4}$$

D'après (3) et (4), on a (1).

L'idée initiale du procédé que nous exposons ici est due à Slaviša Prešić (voir [1]). Notons que le présent arcticle précise et complète les résultats de [2].

2. Dans les livres [3] et [4] on trouve le résultat que voici: Soit $f(z)$ une fonction rationnelle ne possédant pas de pôles sur une ligne régulière C non-fermée qui joint les points finis $z=a$ et $z=b$. On a alors la formule

$$\int_C f(z)\,dz = \sum \operatorname{Res}\left[f(z)\ln\frac{z-b}{z-a}\right] + \operatorname*{Res}_{z=\infty}\left[f(z)\ln\frac{z-b}{z-a}\right], \tag{5}$$

où on a choisi la détermination de $\ln\frac{z-b}{z-a}$ qui correspond à la coupure le long de C et où la sommation s'étend à tous les pôles de la fonction

$$f(z)\ln\frac{z-b}{z-a}.$$

La méthode par laquelle est obtenu ce résultat-là diffère de celle par laquelle nous avons démontré la formule (1).

On peut remarquer, tout d'abord, *que le résultat* (5) *reste valable si l'on remplace la supposition que la fonction* $f(z)$ *est rationnelle et ne possède pas de pôles sur la ligne* C *par la supposition plus générale que* $f(z)$ *est une fonction analytique univoque possédant dans tout le plan complexe un nombre fini de pôles et de singularités essentielles qui n'appartiennent pas à la ligne* C.

En effet, on voit sans difficulté que la démonstration de la formule (5), exposée dans le livre [3], peut être étendue sans changement au cas plus général que nous venons de préciser.

Dans le cas spécial, qui coïncide avec celui qui nous traitons dans 1., on obtient de la formule (5) la formule

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum \mathrm{Res}\left[f(z)\ln\frac{z-b}{z-a}\right] + \mathop{\mathrm{Res}}_{z=\infty}\left[f(z)\ln\frac{z-b}{z-a}\right], \tag{6}$$

valable aussi sous l'hypothèse moins restrictive sur la fonction $f(z)$.

On remarque que notre formule (1) et la formule (6) servent à calculer la même intégrale déterminée. Un des seconds membres de ces deux formules ne peut pas être obtenu, dans le cas général, de l'autre par quelque transformation simple. En effet, comme on peut le montrer par des exemples simples convenables, les résidus pour les singularités correspondantes des fonctions

$$(a-b)\frac{\ln z}{(1-z)^2} f\left(\frac{az+b}{1+z}\right) \quad \text{et} \quad f(z)\ln\frac{z-b}{z-a}$$

ne sont pas égaux. Considérons, par exemple, la fonction $f(z) = \dfrac{1}{(z-2)\,(z-3)}$ qui ne possède pas de singularités sur le segment $[a,\ b]$. La fonction qui correspond à notre procédé:

$$\frac{-\ln z}{(1+2z)\,(2+3z)}$$

a les singularités $z=-\dfrac{1}{2}$ et $z=-\dfrac{2}{3}$, avec les résidus correspondants $\ln 2-\pi i$ et $\ln\dfrac{2}{3}+\pi i$; d'autre part, les singularités de la fonction du procédé de Behnke-Sommer

$$\frac{1}{(z-2)\,(z-3)}\ln\left(1-\frac{1}{z}\right)$$

sont les points $z=2$ et $z=3$ avec les résidus correspondants $\ln 2$ et $\ln\dfrac{2}{3}$.

La confrontation des formules (1) et (6) conduit, cependant, au théorème suivant:

Soit $f(z)$ *une fonction analytique ne possédant pas de singularités sur le segment* $[a,\ b]$ *de l'axe réel* $(a<b)$.

Alors on a l'identité

$$(a-b)\sum \mathrm{Res}\left\{\frac{\ln z}{(1+z)^2} f\left(\frac{az+b}{1+z}\right)\right\} = \sum \mathrm{Res}\left\{f(z)\ln\frac{z-b}{z-a}\right\} + \mathop{\mathrm{Res}}_{z=\infty}\left\{f(z)\ln\frac{z-b}{z-a}\right\}, \tag{7}$$

avec les déterminations des logarithmes précisées ci-dessus et les sommations s'étendant aux singularités hors de la semi-droite $[0,\ +\infty]$ *et du segment* $[a,\ b]$, *respectivement, des fonctions correspondantes.*

Ce théorème peut servir de source d'identités différentes.

3. Pour illustrer l'application des résultats précédents, nous allons citer quelques exemples.

3.1. Considérons la classe suivante d'intégrales définies

$$I=\int_a^b \frac{dx}{Ax^3+Bx^2+Cx+D} \qquad (a<b), \tag{8}$$

où $A \neq 0$ et le dénominateur ne s'annule pas dans $[a, b]$. La substitution (2) conduit à

$$I=(b-a)\int_0^{+\infty} \frac{(1+t)\,dt}{\alpha t^3+\beta t^2+\gamma t+\delta}.$$

avec

$$\alpha=a^3 A+a^2 B+a\,C+D,$$

$$\beta=3a^2 b\,A+(2ab+a^2)B+(2a+b)\,C+3\,D,$$

$$\gamma=3ab^2 A+(b^2+2ab)B+(a+2b)\,C+3\,D,$$

$$\delta=b^3 A+b^2 B+b\,C+D.$$

On obtient une sous-classe des intégrales (6), à savoir celle pour laquelle $\beta=\gamma=0$, dont le calcul au moyen du procédé exposé est très facile.

En procédant de manière analogue on peut obtenir diverses classes d'intégrales de fonctions rationnelles dont le calcul est assez simple.

3.2. L'application de (1) au calcul de $\int_1^2 e^{\frac{1}{x}}\,dx$ fournit la formule

$$\int_1^2 e^{\frac{1}{x}}\,dx=\ln 2+e\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k k}\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,(n-k)}{n!}. \tag{9}$$

En confrontant (9) au résultat qu'on obtiendrait au moyen du développement de la fonction exp $(1/z)$ en série des puissances, on aboutit à l'identité

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k k}\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,(n-k)}{n!}=\frac{1}{e}+\frac{1}{e}\sum_{k+1}^{\infty}\frac{1-\frac{1}{2^k}}{(k+1)!\,k}.$$

On obtient pareillement la représentation suivante de l'intégrale-sinus

$$\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx=S_i(b)-S_i(a)$$

$$=\sin a\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\,(b-a)^{2k}}{(2k)!!}\sum_{n=1}^{2k}\left(\frac{a}{b-a}\right)^{2k-n}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$$+\cos a\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}\,(b-a)^{2k+1}}{(2k+1)!!}\sum_{n=1}^{2k+1}\left(\frac{a}{b-a}\right)^{2k-n+1}\frac{(-1)^{n+1}}{n},$$

qui peut servir en même temps de formule de sommation pour la dernière expression.

3.3. Soit $f(z)=\dfrac{1}{(z-a_1)\,(z-a_2)\,\cdots\,(z-a_n)}$ avec $a_1<a_2<\cdots<a_n<a<b$.

Toutes les singularités de cette fonction sont hors du segment [0,1]. D'après l'une ou l'autre des formules (1) ou (6) et d'après l'égalité (7), on aboutit aux résultats

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a_1)\,(x-a_1)\,\cdots\,(x-a_n)} = (-1)^{n-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln \dfrac{b-a_k}{a-a}}{\prod\limits_{\nu=1,\,\nu\neq k}^{n} (a_\nu - a_k)},$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\prod\limits_{\nu=1,\,\nu\neq k}^{n} (a_\nu - a_k)} = 0.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. S. Mitrinović: *Zbornik matematičkih problema*, tome I, 3me édition, problème 235, p. 474.

[2] D. Dimitrovski: *Sur une méthode d'évaluation des intégrales définies*... (en macédonien, résumé en français), Bull. de la Société des mathématiciens et des physiciens de la République Populaire de Macédonie, tome XIII, Skopje, 1962.

[3] Behnke-Sommer: *Théorie der Analytischen Funktionen*, zweiter Auflage, 1962.

[4] Л. И. Волковыский, Г. Л. Лунц, И. Г. Араманович: *Сборник задач по теорий функций комплексного переменного*, Москва, 1962, problème 906, p. 122.