Драган С. Димитровски

ЗА НЕАНАЛИТИЧКИТЕ ФУНКЦИИ ЧИЕ ШТО ОТСТАПУВАЊЕ ОД АНАЛИТИЧНОСТА Е ОБОПШТЕНА АНАЛИТИЧКА ФУНКЦИЈА

(примено на 8-X-1966 г.)

Во трудовите [1] и [2] се определени класи на неаналитички функции за кои разликата помеѓу отстапувањето од аналитичноста

$$B(W)=\frac{\partial W}{\partial \bar z} \tag{1}$$

и функцијата $W(z)$ е една аналитичка функција, како и оние функции $W(z)$ за кои што количникот меѓу отстапувањето $B(W)$ и самата функција е една аналитичка функција.

Во овој труд ние ќе ги доведеме во врска работите на S. Fempl со обопштените аналитички функции, давајки им на тие резултати нешто поопшт облик.

1. Ќе ја докажеме прво следната теорема:

Нека n — тото отстапување од аналитичноста на некоја комплексна функција $W(z)$ биде една обопштена аналитичка функција $\omega \in \tilde U_0^*(A, O, O, G)$, со аналитички коефициент $A \in U_0^*(G)$. Тогаш комплексната функција $W(z)$ е една обопштена аналитичка функција која припаѓа на класата $\tilde U_0^*(A(z), O, P_{n-1}(z,\bar z), G)$, каде што $P_{n-1}(z,\bar z)$ е ареоларен полином.

Доказ: Од

$$\frac{\partial^n W}{\partial \bar z^n}=\omega(z) \tag{2}$$

следува, со обзир на особините на обратната операција на коњугираното диференцирање [3]:

$$\frac{\partial^{n-1} W}{\partial \bar z^{n-1}}=\hat{\int}\omega\, d\bar z \tag{3}$$

Како ω по услов претставува обопштена аналитичка функција од дадена класа, т. е. решење на диференцијалната равенка

$$\frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}} + A(z)\,\omega = 0, \tag{4}$$

кое, према Thèodorescu, може да се пише во обликот

$$\omega = \Phi(z)\, e^{-\frac{1}{\pi}\iint\limits_G \frac{A(\zeta)}{\zeta - z} d\xi\, d\eta} = \Phi(z)\, e^{T_G A}. \tag{5}$$

Ако $A(z)$ е аналитичка функција, интегралот $T_G A$ може лесно да се пресмета, користејќи ја формулата Помпеју:

$$W(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{W(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{\pi}\iint\limits_G \frac{\partial_{\bar\zeta} W}{\zeta - z}\, d\xi\, d\eta. \tag{6}$$

Бидејќи А(ζ) можеме секогаш да ја земеме како извод по $\bar\zeta$ на некоја функција $W(\zeta)$:

$$\frac{\partial W}{\partial \bar\zeta} = A(\zeta) \tag{6^1}$$

$$W = \hat{\int} A(\zeta)\, d\bar\zeta = A(\zeta)\,\bar\zeta + B(\zeta).$$

Имаме, по формулата Помпеју (6):

$$A(z)\,\bar z + B(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{A(\zeta)\,\bar\zeta + B(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{\pi}\iint\limits_G \frac{A(\zeta)}{\zeta - z}\, d\xi\, d\eta$$

или

$$A(z)\,\bar z + B(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{A(\zeta)\,\bar\zeta\, d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{B(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} + T_G A$$

Интегралот од тип Cauchy

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{A(\zeta)\,\bar\zeta}{\zeta - z}\, d\zeta$$

поради непрекинатоста на функцијата $A(\zeta)\,\bar\zeta$ во $G + \Gamma$ дефинира една аналитичка функција од z, која што исто ќе ја означиме со $B(z)$. Имаме

$$T_G A = A(z)\,\bar z + B(z) \tag{7}$$

па од (5) следува

$$\omega = \Phi(z)\, e^{A(z)\,\bar z + B(z)} = \Phi^*(z)\, e^{A(z)\,\bar z} \tag{8}$$

Формулата Помпеју (6) во општиот случај ако $A(z)$ има во G полови и изолирани есенцијални сингуларитети не важи. Затоа ќе ја ползуваме постапката што ја препорачува И. Н. Векуа [5], р. 43. За дадена аналитичка функција $A(z)$ постои, како што е познато, таква аналитичка функција $\Phi_A(z)$, производот $\Phi_A(z) \cdot A(z)$ да биде непрекинат во $G + \Gamma$. Множејки ја со $\Phi_A(z)$ формулата (6′), добиваме

$$\frac{\partial(\Phi_A(z)\, W)}{\partial \bar{\zeta}} = A(\zeta)\, \Phi_A(\zeta) \tag{9}$$

и према тоа

$$\Phi_A(z) \cdot W = \Phi(z) + T_G(A(z) \cdot \Phi_A(z))$$

или

$$W = \Phi(z) - \frac{1}{\pi \Phi_A(z)} \iint_G \frac{\Phi_A(\zeta)\, A(\zeta)}{\zeta - z}\, d\xi\, d\eta \tag{10}$$

и со замена

$$\omega = \Phi(z)\, e^{-\frac{1}{\pi \Phi_A(z)} \iint_G \frac{\Phi_A(\zeta)\, A(\zeta)}{\zeta - z}\, d\xi\, d\eta} \tag{11}$$

па на горниот двоен интеграл $T_G(\Phi_A \cdot A)$ може да се примени формулата Помпеју. Се добива очевидно исти резултат (8), како и за регуларната функција $A(z)$. (За интегралот $T_G\, W$ и геометриското значење на $\partial_{\bar{z}} W$ види го трудот [6]).

Понатаму од (3)

$$\frac{\partial^{n-1} W}{\partial \bar{z}^{n-1}} = \hat{\int} \omega\, d\bar{z} = \Phi^*(z) \hat{\int} e^{A(z)\bar{z}}\, d\bar{z} + a_1(z) = \Phi_1(z)\, e^{A(z)\bar{z}} + a_1(z),$$

каде

$$\Phi_1(z) = \frac{\Phi^*(z)}{A(z)} = \frac{\Phi(z)\, e^{B(z)}}{A(z)}, \tag{12}$$

понатаму продолжувајќи ја истата постапка

$$\frac{\partial^{n-2} W}{\partial \bar{\zeta}^{n-2}} = \hat{\int} \left[\Phi_1(z)\, e^{A(z)\bar{z}} + a_1(z) \right] d\bar{z} = \Phi_2(z)\, e^{A(z)\bar{z}} + a_1(z)\,\bar{z} + a_2(z);$$

добиваме конечно

$$W(z) = \Phi_n(z)\, e^{A(z)\bar{z}} + P_{n-1}(z, \bar{z}) \tag{13}$$

каде што $P_{n-1}(z, \bar{z})$ е ареоларен полином.

За да покажеме да е општото решење во класата

$$\tilde{U}_0^*(A, O, P_{n-1}; G)$$

ќе побараме коњугиран извод

$$\partial_{\bar{z}} W = \Phi_n(z) A(z) e^{A(z)\bar{z}} + \sum_{\nu=1}^{n-1} \nu a_\nu \bar{z}^{\nu-1}$$

имаме понатака

$$\partial_{\bar{z}} W = A(z)\left[W(z) - \sum_{\nu=1}^{n-1} a_\nu z^\nu\right] + \sum_{\nu=1}^{n-1} \nu a_\nu \bar{z}^{\nu-1}$$

односно

(14) $$\partial_{\bar{z}} W - A(z) W = P_{n-1}(z, \bar{z}),$$

со што теоремата е наполно докажана.

2. Со помошта на теоремата **1.** ќе докажеме сега една поопшта теорема:

Нека првото отстапување од аналитичноста на една комплексна функција $W(z)$ биде една обо штена аналитичка функција ω од класата $\tilde{U}_0^*(A, O, F; G)$, каде коефициентите $A(z)$ и $F(z)$ се обопштени аналитички функции од класата $\tilde{U}_0^*(g(z), O, O, G)$, каде $g(z)$ е аналитичка функција од класата $U_0^*(G)$. Тогаш комплексната функција $W(z)$ е една обопштена аналитичка функција од класата $U(O, O, \psi(z), G)$, каде $\psi(z)$ е комплексна функција дадена со (39).

Доказ. Со обзир на тоа $A(z)$ и $F(z)$ да се обопштени аналитички функции од класата $\ddot{U}_0(g(z), O, O; G)$, каде $g(z)$ е аналитичка функција т. е. со обзир A и F да се решења на равенката

(15) $$\partial_{\bar{z}} W + g(z) W = 0$$

имаме према теоремата 1. (случај $n = 1$)

(16′) $$A(z) = \Phi_1(z) e^{g(z)\bar{z}}$$

(16″) $$F(z) = \Phi_2(z) e^{g(z)\bar{z}}.$$

Да побараме сега општа комплексна функција

(17) $$W = U(x, y) + i V(x, y)$$

за која што важи

(18) $$\partial_{\bar{z}} W = \omega$$

каде е

(19) $$\partial_{\bar{z}} \omega + A\omega = F,$$

Од последната равенка (19), со смената

$$\omega = \frac{V + F}{A} \tag{20}$$

$$\partial_{\bar{z}}\, \omega = \frac{(\partial_{\bar{z}} V + F_{\bar{z}})\, A - A_{\bar{z}}\,(V + F)}{A^2}$$

се добива

$$\partial_{\bar{z}} V - \frac{A_{\bar{z}}}{A} V + A V - \frac{A_{\bar{z}}}{A} F + F_{\bar{z}} = 0.$$

Меѓутоа од (16′) и (16″)

$$F_{\bar{z}} - F \cdot \frac{A_{\bar{z}}}{A} = 0$$

па равенката се сведува на

$$\partial_{\bar{z}} V + \left(A - \frac{A_{\bar{z}}}{A}\right) V = 0 \tag{21}$$

или со обзир на (16′), на равенката

$$\partial_{\bar{z}} V + \left(\Phi_1(z)\, e^{g(z)\,\bar{z}} - g(z)\right) V = 0.$$

Користејќи ја натаму истата формула Théodorescu (5), имаме

$$V = \Phi_3(z)\, e^{-\frac{1}{\pi} \iint\limits_G \frac{\Phi_1(\zeta)\, e^{g(\zeta)\,\bar{\zeta}} - g(\zeta)}{\zeta - z}\, d\xi\, d\eta}. \tag{22}$$

За да го решиме интегралот

$$T_G\left(A - \frac{A_{\bar{z}}}{A}\right) = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_G \frac{\Phi_1(\zeta)\, e^{g(\zeta)\,\bar{\zeta}} - g(\zeta)}{\zeta - z}\, d\xi\, d\eta \tag{23}$$

ќе ја ползуваме одново формулата Помпеју (6). Прво очевидно од

$$\partial_{\bar{z}} G = \Phi_1(z)\, e^{g(z)\,\bar{z}} - g(z) \tag{24}$$

треба да се најде примитивната функција

$$G = \hat{\int} \left[\Phi_1(z)\, e^{g(z)\,\bar{z}} - g(z)\right] d\bar{z} = \frac{\Phi_1(z)}{g(z)}\, e^{g(z)\,\bar{e}} - g(z)\,\bar{z} + g_1(z). \tag{25}$$

Имаме значи

$$-\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{\Phi_1(z)e^{g(z)\bar z}-g(z)}{\zeta-z}\,d\xi\,d\eta=\frac{\Phi_1(z)}{g(z)}e^{g(z)\bar z}-g(z)\bar z+g_1(z)-$$

(26)

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\frac{\Phi_1(\zeta)}{g(\zeta)}e^{g(\zeta)\bar\zeta}-g(\zeta)\bar\zeta+g_1(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$$

Последниот интеграл од тип Cauchy, под претпоставката да е $\Phi_1(\zeta)$ аналитичка функција во G, а $g(\zeta)$ и $1/g(\zeta)$ да се исто така аналитички и без нули во G, дефинира една аналитичка функција. Да ја означиме со G_1. Имаме значи

$$V=\Phi_3(z)e^{\left\{\frac{\Phi_1}{g}e^{g\bar z}-\bar z+G_1(z)\right\}}=\Phi_4(z)e^{\frac{\Phi_1}{g}e^{g\bar z}-g\bar z} \tag{27}$$

Тогаш од (20) следува

$$\omega=\frac{\Phi_4(z)}{A(z)}e^{\frac{\Phi_1}{g}e^{g\bar z}-g\bar z}+\frac{F(z)}{A(z)}$$

а од (18)

$$W=\Phi_5(z)+T_G\,\omega$$

каде што е

$$T_G\,\omega=-\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{\frac{\Phi_4}{A}e^{\frac{\Phi_1}{g}e^{g\bar\zeta}-g\bar\zeta}+\frac{F}{A}}{\zeta-z}\,d\xi\,d\eta=$$

$$=\hat{\int}\left[\frac{\Phi_4}{A}e^{\frac{\Phi_1}{g}e^{g\bar\zeta}-g\bar\zeta}+\frac{F}{A}\right]d\bar z-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\frac{\Phi_4}{A}e^{\frac{\Phi_1}{g}e^{g\bar\zeta}-g\bar\zeta}+\frac{F}{A}}{\zeta-z}\,d\zeta=$$

$$=\frac{\Phi_4}{A}\int e^{\frac{\Phi_1}{g}e^{g\bar z}-g\bar z}\,d\bar z+\frac{F}{A}\bar z+\Phi_6(z),$$

каде што Φ_6 е горниот интеграл од тип Cauchy. Имаме значи

$$W = \Phi_5(z) + \frac{F}{A}\bar{z} + \frac{\Phi_4}{A}\int e^{\frac{\Phi_1}{g}e^{g\bar{z}} - g\bar{z}}\, d\bar{z}. \tag{28}$$

Да се ослободиме сега од претпоставката за непрекинатоста на $\Phi_1(z)$ и $1/g(z)$ во областа G. Да допуштиме сега во изразот (23) функцијата

$$\Phi_1(z)\, e^{g(z)\bar{z}} - g(z)$$

да може да има полови и изолирани есенцијални сингуларитети во конечен број. Тогаш постои таква аналитичка функција $\Phi_G(z)$ произвотот

$$\Phi_G(z)\left(\Phi_1(z)\, e^{g(z)\bar{z}} - g(z)\right)$$

да биде непрекината на $G + \Gamma$. Имаме од (24)

$$\partial_{\bar{z}}(\Phi_G \cdot G) = \Phi_G(z)\left[\Phi_1(z)\, e^{g(z)\bar{z}} - g(z)\right]$$

како и

$$G(z) = \Phi_7(z) - \frac{1}{\pi\,\Phi_G(z)}\iint_G \frac{\Phi_G(\zeta)\left[\Phi_1(\zeta)\, e^{g(\zeta)\bar{\zeta}} - g(\zeta)\right]}{\zeta - z}\, d\xi\, d\eta$$

па на последниот двоен интеграл може да се примени формулата Помпеју (6). Низ постапката определена со (25) и (26) добиваме наполно аналоген резултат како и за случај на регуларните функции. Следува дека формулата (28) важи и во овој поопшт случај.

3. Со помошта на теоремите 1. и 2. можеме сега да ја формулираме следната теорема

Нека n — шшо ошсшайување од аналишичносша на некоја комйлексна функција $W(z)$ биде една обойшшена аналишичка функција ω од класаша (A, O, F, G), каде A и F се аналишички функции. Тогаш комйлекснаша функција $W(z)$ е од облик

$$W = \Phi(z)\, e^{A(z)\bar{z}} + \frac{F}{A}\bar{z}^n + \sum_{\nu=1}^{n-1} a_\nu(z)\,\bar{z}^\nu \tag{29}$$

ш. е. $W(z)$ е обойшшена аналишичка функција од класаша

$$W \in \tilde{U}_0^*(A, O, P_n(z, \bar{z}))$$

каде шшо $P_n\ (z, \bar{z})$ е еден ареоларен йолином.

Наместо доказ, да наведеме да низ постапката содржана во формулите (19), (20), (21), (22) прво може да се определи ω во конечен облик

$$\omega = \Phi(z)\, e^{\Phi(z)\bar{z}} + \frac{F(z)}{A(z)}$$

а потоа постапката која претходи на (13), се добива (29).

4. *Примена.* Се разбира дека низ формулите (13), (28), (29) се решени некои системи парцијални равенки, линеарни и од n-ти ред. За најпрост пример да земеме во (13) $n = 1$. Можеме да формулираме

Систем парцијални равенки

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} - 2\, e^{x} (\varphi(x, y) \cos y + \psi(x, y) \sin y) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2\, e^{x} (\psi(x, y) \cos y - \varphi(x, y) \sin y) = 0$$

има решење

$$U = e^{x} [\varphi(x, y) \cos y + \psi(x, y) \sin y] + B(x, y)$$

$$V = e^{x} [\psi(x, y) \cos y - \varphi(x, y) \sin y] + C(x, y),$$

каде што B и C се реален и имагинарен дел на некоја аналитичка функција, наполно произволна.

Овде можеме да формулираме, аналогно со трудот (3), решења во облик на генерализирани полихармониски функции за некои типови парцијални равенки од n – ти ред.

LITERATURA

[1] S. Fempl — Reguläre Lösungen eines Systems partieller Differentialgleichungen. Publications de l' Institut Mathématique. T. 3 (17). Belgrade.

[2] S. Fempl — O jednoj klasi neanalitičkih funkcija

[3] S. Fempl — Areolarni polinomi kao klasa neanalitičkih funkcija čiji su realni i imaginarni delovi poliharmoniske funkcije. Matematički vesnik. t. 16 (1). 1964. p. 29—38.

[4] N. Théodorescu — La dérivée aréolaire. Annales roumaines de Mathématiques. cah. 3, Bucarest 1936.

[5] И. Н. Векуа — Обобщенные аналитические функции. Москва 1959. п. 41, 43, 159.

[6] А. Билимовић: О неким интегралним теоремама у геометриској теорији неаналитичких функција. Глас САН, CCLXIII, књ. 28 Београд 1966.

Dragan S. Dimitrovski

SUR LES FONCTIONS NON—ANALYTIQUES DONT LA DEFLEXION DE L' ANALYCITÉ EST UNE FONCTION ANALYTIQUE GÉNÉRALISÉE

Au moyen de l'opérateur $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ on sépare les certaines classes des fonctions analytiques généralisées qu'on peut exprimer dans la forme finie ou au moyen des quadratures. Ce sont des classes des fonctions généralisées avec des coèficients analytiques.