Démonstration. Soit k un entier donné ($\geqslant 0$ ou bien <0) et soit $f_1(x)=x$, $f_2(x)=2x+2k+1$, $P(x)=f_1(x)\ f_2(x)$. On a $P(1)=2k+3$ et $P(-1)=-(2k-1)$. donc $(P(1), P(-1))=1$. D'après l'hypothèse H de A. Schinzel**) il existe une infinité des nombres naturels x tels que les nombres $q=f_1(x)$ et $p=f_2(x)$ sont premiers, et on a $2k+1=f_2(x)-2f_1(x)=p-2q$. Le théorème 2 est ainsi démontré. On a, par exemple,

$$1=5-2.2=7-2.3=11-2.5=47-2.23=59-2.29=83-2.41=107-2.53,$$
$$-1=3-2.2=5-2.3=13-2.7=37-2.19=61-2.31=73-2.37=\dots$$

МАТЕМАТИЧКИ ВЕСНИК
2 (17), 1965, стр. 148—151,

SUR LA TRANSFORMATION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE RICCATI EN ELLE MÊME

Dragan S. Dimitrovski

(Communiqué le 26 février 1965)

La transformation de l'équation différentielle de Riccati

$$y'=fy^2+gy+h \tag{1}$$

en elle même par une transformation bilinéaire de la fonction

$$y=\frac{Pz+Q}{Rz+S}, \tag{2}$$

z une nouvelle fonction de x,
avec

$$R\neq 0,\quad SP-RQ\neq 0 \tag{3}$$

avait été étudiée dans les articles [1] et [2].

Le résultat élémentaire du travail [2] est la constatation que l'équation (1) se transforme en elle même si la condition suivante est remplie:

$$2Q(P'R-R'P)-(P-S)(P'S-S'P+Q'R-QR')-2R(Q'S-QS')=0 \tag{4}$$

Nous allons montrer que l'équation (1) se transforme en elle même par la transformation (2) sous les conditions moins restreintes que (4). Vraiment, si l'on effectue, auprès de (2) une transformation du variable indépendent

$$x=\varphi(t) \tag{5}$$

on obtient, après les calculs nécessaires, un système algébrique par rapport à f, g, h:

$$\begin{aligned} &f(\dot\varphi P^2-(SP-RQ))+g\dot\varphi PR+h\dot\varphi R^2=\dot PR-\dot RP\\ &f\cdot 2PQ\dot\varphi+g[\dot\varphi(PS+RQ)-(SP-RQ)]+h\cdot 2\dot\varphi RS=\dot QR-Q\dot R+\dot PS-P\dot S\\ &f\dot\varphi Q^2+g\dot\varphi QS+h(\dot\varphi S^2-(SP-RQ))=\dot QS-\dot SQ. \end{aligned} \tag{6}$$

**) Voir mon livre cité, p. 128.

Le déterminant du système (6) étant:

$$\Delta = (SP - RQ)^3 (\dot{\varphi} - 1) \left[\dot{\varphi}^2 + \dot{\varphi} + -1 \frac{P^2 + S^2 + SP + RQ}{SP - RQ} \dot{\varphi} \right], \tag{7}$$

on peut conclure que le cas étudié dans [2] n'est qu'un cas singulier du système (6), qui suit si $\dot{\varphi} = 1$, c'est-à-dire si $x = t$.

Si, au lieu de (4), nous supposons seulement qu'il soit rempli (3) avec

$$\dot{\varphi} \neq \{P^2 + S^2 + 2\,RQ \pm \sqrt{(P+S)^2[(P-S)^2 + 4\,RQ]}\}/2\,(SP - RQ) \tag{8}$$

alors les fonctions f, g, h sont uniformément déterminées du système (6).

Les transformations (2) et (5) étant données, avec (3) et (8), on peut presque toujours élire une équation (1) transformable en elle-même; l'inverse n'ayant pas lieu.

Si nous continuons la même idée, c'est-à-dire si nous proposons une transformations birationnelle, plus générale que (2):

$$y = \frac{Az^2 + Bz + C}{Dz^2 + Ez + F} \tag{9}$$

où z présente une nouvelle fonction de x, et A, B, C, D, E, F les fonctions arbitraires de x qui satisfont la condition

$$(AE - BD)\, D \neq 0 \tag{10}$$

on obtient, si l'on remplace (9) dans (1), une équation transformée

$$z' = \frac{P}{L} z^2 + \frac{QL - PM}{L^2} z + \frac{L(RL - PN) - M(QL - PM)}{L^3} + \frac{\alpha z + \beta}{Lz^2 + Mz + N} \tag{11}$$

où les fonctions P, Q, R, S, T, L, M, N, α, β, dépendent de

$$A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F,\ f,\ g,\ h. \tag{12}$$

pour que (11) soit une équation Riccati, il faut qu' il soit rempli

$$\alpha(x) = 0, \quad \beta(x) = 0 \tag{13}$$

ce qui donne deux relations entre les six fonctions (12). Ces relations, avec la comparaison faite (11) et (1) nous donnent, après les calculs de simplification nécessaires, le système suivant des équations différentielles

$$\begin{gathered}
(A^2 - AE + BD) f + ADg + D^2 h = A'D - AD' \\
(2\,AB - 2\,AF + 2\,CD) f + 2\,BDg + 2DEh = A'E - AE' + B'D - BD' \\
(2\,AC + B^2 - BF + CE) f + (3\,CD + BE - AF) g + (E^2 + \\
+ 2\,DF - AE + BD) h = A'F - AF' + C'D - CD' + B'E - BE' \\
2\,BCf + 2\,CEg + 2\,(EF + CD - AF)\, h = B'F - BF' + C'E - CE' \\
C^2 f + CFg + (F^2 - BF + CE)\, h = C'F - CF'.
\end{gathered} \tag{14}$$

On peut démonter qu'il n'est pas possible de résoudre ce système dans le cas général. Mais déjà dans quelques cas particuliers on aura une généralisation des résultats (2). Soit, par exemple, posé dans (9):

$$B=F=0,\ D=1,\ E=-2A$$

on obtiendra de (14) le résultat que voici:

L'équation différentielle de Riccati

(15) $$y'=-\frac{E}{C}hy^2+\left(-\frac{h}{E}+\frac{C'E-CE'}{2CE}\right)y+h$$

où

$$C(x)=\frac{E^2}{2}+\lambda E^3 exp\left(6\int\frac{h}{E}\,dx\right)$$

(E, h les fonctions arbitraires, λ constante) se transforme en elle-même par un changement de fonction

(16) $$y=\frac{-\frac{1}{2}Ez^2+C}{z^2+Ez}.$$

Soient respectivement

(17) $$R(x,\ y,\ c)=0 \quad \text{et} \quad R(x,\ z,\ \psi(c))=0$$

les solutions générales de l'équation (1) et de l'équation transformée. Il peut arriver que dans quelque cas, pour un $c=c_0$, on ait

(18) $$C_0=\psi(C_0)$$

alors les solutions (17) définissent deux intégrales particulières complétement identiques de deux équations (1) et (11). En posant dans (9)

(19) $$y=z$$

on peut obtenir éventuellement une ou plusieurs solutions particulières de l'équation (1). Dans le cas (15) la transformation (16) définit une équation cubique

$$y^3+\frac{3}{2}Ey^2-C=0$$

dont les trois solutions sont les intégrales particulières de (15). En accord avec la théorie générale, on peut trouver la solution générale de l'équation (15) sans quadratures:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}:\frac{y-y_2}{y_2-y_3}=\text{const.}$$

Pareillement, pour $F=0$, $E=1$, $D=1$ on peut formuler un résultat de même nature.

Les derniers résultats montrent que l'équation de Riccati permet d'autres transformations en elle-même, outre (2).

RÉFÉRENCES

[1] D. S Mitrinović, *Sur une classe d'équations de Riccati invariantes relativement à un changement de fonction*. Annuaire de Faculté de Philosophie de l'Université de Skopje, (Section des sciences naturelles), *t.* 2 (1949), p. 161—186.

[2] I. Šapkarev, *Sur des équations différentielles transformables en elles mêmes par un changement de fonction*. Vesnik Društva matematičara i fizičara SR Srbije, t XV, 1953, p. 21—27.