Dans cet article nous avons le but de donner une interprétation de la théorie élémentaire des équations différentielles au moyen du calcul des résidus.

Pour chaque quadrature on construit une fonction analytique dont la somme des résidus remplace la primitive. C'est l'idée essentielle de l'article.

Sans avoir des ambitions de découvrir de choses nouvelles, nous voulons montrer qu'un tel abord à la théorie des équations différentielles est possible.

Les auteurs

TABLE DES MATIERES

LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES AU MOYEN DES RESIDUS

1°. Introduction .

La dernière phase dans la résolution d'une équation différentielle , au sens classique , c'est sa réduction aux quadratures , avec l'application de l'intégrale indéfinie, ou au cas des conditions initiales, avec l'application de l'intégrale définie . La théorie devellopee des équations différentielles a dans son but élémentaire cette réduction à la séparation des variables et aux quadratures .

De l'autre part , une des applications le plus importante du Calcul des résidus est le calcul des intégrales définies .On a aujourd'hui des méthodes permettant de calculer au moyen des résidus non seulement des intégrales impropres, mais aussi des intégrales propres , en les transformant aux intégrales impropres .

Partant , la solution élémentaire des équations différentielles peut avoir beaucoup du commun , dans le principe , avec le Calcul des résidus , car tous les deux se rapportent aux intégrales définies .

Cépendant, sauf quelques méthodes dans la théorie des équations aux coèficients constants, donnés presque complètement par Cauchy [1] , on n'a fait nuls essais d'appliquer le Calcul des résidus dans la théorie des équations différentielles réelles .

Cette idée nous parait intéressante.

Elle nous donnera au moins une nouvelle forme du traitement des équations différentielles .

2°. Les quadratures .

D'abord , on peut citer quelques essais sur le calcul des quadratures simples au moyen des résidus (Boas [2], Behnke - Sommer [3] , Dimitrovski -Adamović [4]).Cettes formules peuvent présenter une base dans l' application des résidus dans la Théorie des Equations Différentielles .

Nous partons de notre résultat élémentaire :

<u>Théorème .</u> Soit f(z) une fonction analytique uniforme possed dant dans tout le plan complèxe fermé un nombre fini des pôles ou des singularités essentielles isolées qui n' appartiennent pas au segment [a , b] ,(a < b) .

Alors on a la formule relative à l' intégrale définie

$$(1) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = (a-b)\sum_{C\setminus \text{axe réel pos.}} \mathrm{Res}\left\{\frac{\ln z}{(1+z)^2}\, f\!\left(\frac{az+b}{1+z}\right)\right\}$$

où la somme s' étend à toutes les singularités hors de la demi-droite $0 \leq x < \infty$ de la détermination de la fonction

$$(2) \qquad F(z) = \frac{\ln z}{(1+z)^2}\, f\!\left(\frac{az+b}{1+z}\right)$$

laquelle correspond à la coupure $0 \leq z < \infty$ et pour laquelle $\ln z > 0$, si $z > 1$.

<u>Démonstration .</u> En effet , mettant à profit la substitutionn bilinéaire

$$(3) \qquad x = \frac{at+b}{1+t}$$

on obtient

$$(4) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\int_0^{+\infty} f\!\left(\frac{at+b}{1+t}\right)\frac{dt}{(1+t)^2} .$$

Passons maintenant au domaine complexe. La transformation bilinéaire

$$z \longrightarrow \frac{az+b}{1+z}$$

applique le segment [a,b] de l' axe des réels sur la demi- axe $[0, +\infty)$; transforme la fonction f(z) en fonction nouvelle $f\!\left(\frac{az+b}{1+z}\right)$

et chacune des singularités de f(z) en une singularité de même type de la fonction $f\left(\frac{az+b}{1+z}\right)$, les dernières étant toutes hors de la demi -droite $[0,+\infty)$.

C'est pourquoi on peut appliquer au calcul de l'in - tégrale

$$\int_0^{+\infty} f\left(\frac{at+b}{1+t}\right)\frac{dt}{(1+t)^2}$$

le procédé bien connu consistant à intégration de la détermination mentionnée de la fonction F(z) le long du contour formé de deux cercles dont les centres sont dans l'origine et de deux segments sur la demi - droite $[0,+\infty)$.

En effet , la fonction

$$\frac{1}{(1+z)^2} f\left(\frac{az+b}{1+z}\right)$$

n'a d'autres singularités que celles mentionnées ci - dessus . D'autre part, comme la fonction $f\left(\frac{az+b}{1+z}\right)$ reste finie lorsque $z \to \infty$, de sorte que l'on a

$$\left| f\left(\frac{az+b}{1+z}\right)\right| < M$$

pour $|z|$ suffisament grand , nous avons

$$\left| \int_{|z|=R} F(z)dz \right| \leq \int_0^{2\pi} \left| f\left(\frac{aRe^{i\theta}+b}{Re^{i\theta}+1}\right)\right| \frac{|\ln Re^{i\theta}|}{|1+Re^{i\theta}|^2} R\,d\theta$$

$$\leq \frac{2\pi M R(\ln R+2\pi)}{(R-1)^2} \to 0 \ , R\to\infty$$

L'application de ce procédé -la conduit au resultat

$$(5) \quad \int_0^{+\infty} f\left(\frac{at+b}{1+t}\right)\frac{dt}{(1+t)^2} = -\sum \mathrm{Res}\left\{\frac{\ln z}{(1+z)^2} f\left(\frac{az+b}{1+z}\right)\right\}$$

D'après (5) et (4) , on a (1) , ce qui demonter le théorème .

Si la limite supérieure b est variable ,on a , en posant a = x_0 et b = x :

$$(6) \quad \int_{x_0}^{x} f(x)dx = (x_0-x)\sum_{C \setminus \text{axe pos.}} \mathrm{Res}\left\{f\left(\frac{x_0 z+x}{1+z}\right)\frac{\ln z}{(1+z)^2}\right\} .$$

Nous obtenons une formule de quadratures au moyen des résidus , formule assez large ,qui est valable dans le cas ou f(x) est une fonction **réelle telle** que f(z) soit analytique; la sommation des résidus s'étendant sur tout le plan des com - plexes fini, éxeption faite de l'axe des réels positifs , où on a fait une coupure .

3°. L'équation différentielle $y' = f(x)$.

Qu'il nous soit donnée l'équation simple

(7) $$y' = f(x)$$

dont la solution est , au moyen d'une primitive

$$y(x) = \int f(x)\,dx + C$$

ou dans la forme d'une intégrale définie

(8) $$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$$

où $C = y(x_0) = y_0$, une constante d'intégration arbitraire . En emplоyant la quadrature (6) , on a

(9) $$y(x) = y_0 + (x_0 - x)\sum_{C\setminus \text{axe pos.}} \operatorname{Res} \frac{\ln z}{(1+z)^2} f\left(\frac{x_0 z + x}{1+z}\right)$$

Cela veut dire que la solution de l'équation (7) est donnée au moyen d'une somme finie des résidus (9) d'une fonction analy - tique,formée avec f(x) donnée . La dernière somme (9) des ré- sidus étant calculée , elle ne depend que de x_0 et x .L'expres- sion (9) dépendente d'une constante arbitraire y_0 , satisfie (7), et nous présente donc la solution générale de l'équation (7) .

4°. Nous proposons un changement de l'algorithme .

Nous pouvons donc écrire l'équivalence suivante :

(10) $$\begin{gathered} y' = f(x) \\ \Updownarrow \\ y(x) = y_0 + \sum \operatorname{Res} \varphi(z) \end{gathered}$$

avec

$$\varphi(z) = \varphi(z, x_0, x) = (x_0 - x) \frac{\ln z}{(1+z)^2} f\left(\frac{x_0 z + x}{1+z}\right) .$$

Ce présente en réalité un changement de l'algorithme .Nous remplaçons l'algorithme classique

$$y' = f(x) \longrightarrow \frac{dy}{dx} = f(x) \longrightarrow dy = f(x)\,dx \longrightarrow$$

$$\longrightarrow y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$$

par un algorithme qu'on peut aussi employer :

$$f(x) \longrightarrow f(z) \text{ analytique} \longrightarrow (x_0 - x) \frac{\ln z}{(1+z)^2} f\left(\frac{x_0 z + x}{1+z}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow y = y_0 + (x_0 - x) \sum \operatorname{Res} \frac{\ln z}{(1+z)^2} f\left(\frac{x_0 z + x}{1+z}\right)$$

qui ne suppose pas explicitement la connaissance d'une primitive, et qui éxige seulement l'emploi du calcul des résidus, fondé sur les séries de Laurent .

Il s'agit évidement d'un procédé équivalent à une primitive, car on connait que si la fonction f(z) est analytique, elle possède une déruvation analytique .Aussi l'intégrale d'une fonction analytique défini de nouveau une fonction analytique , ainsi que la primitive éxiste toujours. La formule (1o) nous présente donc une forme de primitive, sous la forme des résidus, car le résidu même est une primitive :

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C} f(z)\,dz$$

Voilà quelques exemples illustrant cette idée :

5°. Quelques exemples .

1.° L'équation $y' = c = \text{const.}$

est interprétée au moyen de (6)

$$y(x) = C + (x_0 - x) \sum \operatorname{Res}\, c \frac{\ln z}{(1+z)^2}$$

Le point z= -1 étant le pôle du second degré , on a

$$\operatorname*{Res}_{z=-1} \frac{\ln z}{(1+z)^2} = \lim_{z\to -1} \frac{d}{dz} \ln z = \lim_{z\to -1} \frac{1}{z} = -1 ,$$

ainsi que l' on a sa solution générale

$$y(x) = c\ (x - x_0 + 1)$$

2. Pour résoudre de cette façon l' équation

$$y' = x$$

il faut former

$$y(x) = y(x_0) + (x_0 - x) \sum \operatorname{Res} \frac{\ln z}{(1+z)^2} \cdot \frac{x_0 z + x}{1+z}$$

Comme on calcule facilement

$$\operatorname*{Res}_{z=-1} \varphi(z, x_0, x) = \frac{1}{2!} \lim_{z\to -1} \frac{d^2}{dz^2} \ln z \cdot (x_0 z + x) = -\frac{x+x_0}{2}$$

on a la solution

$$y(x) = y(x_0) + \frac{1}{2}(x^2 - x_0^2)$$

qui pour $x=x_0$ reprend la valeur $y(x_0) = y_0$.

3. Pour resoudre l' équation différentielle

$$y' = \frac{1}{x}$$

on ne doit pas connaitre la primitive de $1/x$, c'est à dire le théorème sur la dérivation du logarithme . La construction (6) nous donne :

$$y(x) = y(x_0) + (x_0 - x) \sum \operatorname{Res} \frac{\ln z}{(1+z)^2} \frac{1+z}{x_0 z + x}$$

La fonction analytique possèdant deux poles $z_1 = -1$ et $z_2 = -\frac{x}{x_0}$, on a

$$\operatorname*{Res}_{z=-1} \varphi = \lim_{z\to -1} \frac{\ln z}{x_0 z + x} = \frac{\pi i}{x - x_0}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_2} \varphi = \lim_{z\to -x/x_0} \frac{\ln z}{1+z} = \frac{\ln \pi i + \ln x/x_0}{x_0 - x}$$

ainsi que l' on a la solution

$$y(x) = y(x_0) + \ln x - \ln x_0$$

4. Etudions l' équation différentielle

$$y' = R(x)$$

R étant une fonction rationelle : $R = \frac{P(x)}{Q(x)}$, P,Q les polynômes :

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$Q_m(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$$

La formule (6) nous donne

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} R(x)\,dx = y_0 + (x_0 - x) \sum \operatorname{Res} \frac{\ln z}{(1+z)^2} \frac{P\left(\frac{x_0 z + x}{1+z}\right)}{Q\left(\frac{x_0 z + x}{1+z}\right)}$$

ainsi que la fonction φ dont on calcule des résidus est comme il suit :

$$\varphi(z) = (1+z)^{m-n-2} \cdot \ln z \cdot \frac{a_n (x_0 z + x)^n + a_{n-1}(x_0 z + x)^{n-1}(1+z) + \dots + a_0 (1+z)^n}{b_m (x_0 z + x)^m + b_{m-1}(x_0 z + x)^{m-1}(1+z) + \dots + b_0 (1+z)^m}$$

$$= \ln z \cdot (1+z)^{m-n-2} \cdot \frac{A_n z^n + A_{n-1} z^{n-1} + \dots + A_1 z + A_0}{B_m z^m + B_{m-1} z^{m-1} + \dots + B_1 z + B_0}$$

où les coèficients A_k , B_k dépendent en un moyen connu de a_k, b_k, x_0, x . Il peut arriver que le polynôme transformé $\sum_0^m B_k z^k$ est plus simple à l'égard des résidus , ainsi que le calcul des résidus ne présente aucune difficulté . Nous avons présenté dans l'article [5] un tel abord à cette question .

Par exemple , l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0} = \frac{1}{P_3(x)}$$

au cas de la solution au moyen d'une primitive , suppose la résolution algebrique de l'équation du III - ième degré, sans laquelle elle n'est pas possible .Cette primitive est

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0} .$$

Présentons la solution au moyen des résidus

$$y = y_0 + (x_0 - x) \sum_{C \setminus \text{axe po.}} \operatorname{Res} \varphi(z, x_0, x)$$

où

$$\varphi(z) = \frac{(1+z)\ln z}{A_3 z^3 + A_2 z^2 + A_1 z + A_0}$$

avec

$$A_3 = a_3 x_0^3 + a_2 x_0^2 + a_1 x_0 + a_0 = P_3(x_0)$$
$$A_2 = x(3x_0^2 a_3 + 2x_0 a_2 + a_1) + (a_2 x_0^2 + 2a_1 x_0 + 3a_0)$$
$$A_1 = x^2(3a_3 x_0 + a_2) + x(2x_0 a_2 + 2a_1) + (a_1 x_0 + 3a_0)$$
$$A_0 = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = P_3(x)$$

Il peut arriver quelquefois (voir [5]et [6]) que A_i soient tels que l'équation transformée est plus simple que $P_3(x) = 0$. En tout cas, il faut savoir les racines soit de $P_3(x) = 0$, soit de $P_3^*(x) = 0$. Si $x = \alpha$ est une racine de $P_3(x) = 0$, c'est à dire si $P_3(\alpha) = 0$, alors on a $P_3\left(\frac{x_0 z + x}{1+z}\right) = 0$, avec $\frac{x_0 z + x}{1+z} = \alpha$, d'où il vient que $z = \frac{x-\alpha}{\alpha - x_0}$ présente une racine de $P_3^*(z) = 0$. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ les racines (réelles ou complexes) de $P_3(x) = 0$, telles que l'intégrale a un sens .On sait que la transformation bilinéaire $W = \frac{x_0 z + x}{1+z}$ transforme l'intervale $[x_0, x]$ de z-plan en demi -axe réelle positive $[0,+\infty)$ de W-plan. Les points réels hors de $[x_0, x]$ se transforment dans demi-axe négative de W-plan. Quelle que soit la position

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < x_0 < x \quad \text{ou} \quad x_0 < x < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$$

les points $z_1 = \frac{x-\alpha_1}{\alpha_1 - x_0}$, $z_2 = \frac{x-\alpha_2}{\alpha_2 - x_0}$, $z_3 = \frac{x-\alpha_3}{\alpha_3 - x_0}$ sont toujours négatives . Si les deux parmi α_i sont complexes, les z_i correspondants sont aussi complexes . A partir de

$$\varphi(z, x_0, x) = \frac{(1+z)\ln z}{A_3\left(z - \frac{x-\alpha_1}{\alpha_1 - x_0}\right)\left(z - \frac{x-\alpha_2}{\alpha_2 - x_0}\right)\left(z - \frac{x-\alpha_3}{\alpha_3 - x_0}\right)}$$

on obtient une répresentation de la solution de l'équation donnée au moyen des résidus

$$y(x) = y_0 + (x_0 - x)\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j,k}}^{3} \frac{\left(1 + \frac{x-\alpha_i}{\alpha_i - x_0}\right)\ln \frac{x-\alpha_i}{\alpha_i - x_0}}{\left(\frac{x-\alpha_i}{\alpha_i - x_0} - \frac{x-\alpha_k}{\alpha_k - x_0}\right)\left(\frac{x-\alpha_i}{\alpha_i - x_0} - \frac{x-\alpha_j}{\alpha_j - x_0}\right)}$$

où il faut traiter d' une manière correspondante le logarithme complexe .

5. On peut prendre cette construction avec assez du scepticisme, à cause de complications du calcul qui sont inhabituelles au cas des primitives .Mais on peut présenter aussi quelques avantages. On sait bien qu il y a des intégrales qu'on peut calculer au moyen des résidus, et qui n'ont pas une primitive dans la forme fermée.Prenons , par exemple, les équations différentielles :

$$\frac{dy}{dt}=\int_0^{2\pi} e^{t\cos\varphi}\cdot\sin(t\sin\varphi-\varphi)\,d\varphi \ , \ \frac{dx}{dt}=\int_0^{2\pi} e^{t\cos\varphi}\cdot\cos(t\sin\varphi-\varphi)\,dt \ ,$$

qui contiennent deux quadratures , par rapport à φ et à t . Ne réussissant pas à calculer la primitive au deuxième membre dans la forme fermée par rapport à t , nous aditionnons les deux équations $\frac{d}{dt}(x+iy)=\int_0^{2\pi} e^{t\cos\varphi}\cdot e^{i(t\sin\varphi-\varphi)}\,d\varphi=\int_0^{2\pi} e^{t(\cos\varphi+i\sin\varphi)-i\varphi}\,d\varphi$

En posant $\cos\varphi+i\sin\varphi=e^{i\varphi}=z,\ e^{-i\varphi}=1/z\ ,\ e^{i\varphi}i\,d\varphi=dz$

on a une intégrale curviligne

$$\frac{d}{dt}(x+iy)=\oint_{|z|=1} e^{tz}\frac{dz}{iz^2}$$

Bien qu' on ne connaisse pas la primitive de e^{tz}/z^2 sous la forme fermée, l'intégrale précédente est calculable au moyen des rési - dus $\oint_{|z|=1}\frac{e^{tz}}{iz^2}dz=2\pi\cdot\operatorname{Res}_{z=0}\frac{e^{tz}}{z^2}=2\pi t$

ainsi que les solutions des équations sont comme il suit

$$y=\pi t^2+C_1\ ,\quad x=C_2$$

6°. Tableau des intégrales élémentaires .

Pour faire cette méthode le plus possible indépendente des primitives (car pourquoi la introduire,si nous avons une calculation directe au moyen des primitives) , il faut donner un appareil semblable au tableau des intégrales élémentaires , qui est fondé tout entier sur les séries de Laurent et sur les résidus .

$$\int 0\cdot dx=C \qquad \sum\operatorname{Res}\frac{\ln z}{(1+z)^2}\cdot 0=0$$

$$\int dx=x+C \qquad \sum\operatorname{Res}\frac{\ln z}{(1+z)^2}\cdot C=-C$$

$$\int x\,dx=\frac{x^2}{2}+C \qquad \sum\operatorname{Res}\frac{\ln z}{(1+z)^2}\frac{x_0z+x}{1+z}=-\frac{1}{2}(x_0+x)$$

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C \qquad \sum \operatorname{Res} \frac{\ln z}{(1+z)^2}\left(\frac{x_0 z + x}{1+z}\right)^2 = -\frac{1}{3}\left(x^2 + x_0 x + x_0^2\right)$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad \sum \operatorname{Res} \frac{\ln z}{(1+z)^2}\left(\frac{x_0 z + x}{1+z}\right)^n =$$

$$= -\frac{1}{n}\left[(x-x_0)^n + x_0(x-x_0)^{n-1} + \cdots\cdots + x_0^n\right]$$

$$\int e^x dx = e^x + C \qquad \sum \operatorname{Res} \frac{\ln z}{(1+z)^2} e^{\frac{x_0 z + x}{1+z}} =$$

$$= -e^{x_0}\left[1 + \frac{x-x_0}{2!} + \frac{(x-x_0)^2}{3!} + \cdots\cdots\right]$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C \qquad \sum \operatorname{Res} \frac{\ln z}{(1+z)^2} \cdot \frac{1+z}{x_0 z + x} = \frac{\ln x - \ln x_0}{x_0 - x}$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C \qquad \sum \operatorname{Res} \frac{\ln z}{(1+z)^2} \cos\left(\frac{x_0 z + x}{1+z}\right) =$$

$$= \cos x_0\left[-1 + \frac{(x-x_0)^2}{3!} - \frac{(x-x_0)^4}{5!} + \cdots\right]$$

$$+ \sin x_0\left[\frac{x-x_0}{2!} - \frac{(x-x_0)^3}{4!} + \cdots\right]$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C \qquad \sum \operatorname{Res} \frac{\ln z}{(1+z)^2} \cdot \sin\left(\frac{x_0 z + x}{1+z}\right)$$

$$= -\sin x_0\left[1 - \frac{(x-x_0)^2}{3!} + \frac{(x-x_0)^4}{5!} - \cdots\right]$$

$$- \cos x_0\left[\frac{(x-x_0)}{2!} - \frac{(x-x_0)^3}{4!} + \cdots\right]$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C \qquad \sum \operatorname{Res} \frac{\ln z}{(x_0 z + x)^2 + (1+z)^2} =$$

$$= \frac{1}{2i(x-x_0)} \ln \frac{(x_0 x + 1) - i(x - x_0)}{(x_0 x + 1) + i(x - x_0)}$$

7°. Quelques questions de l'algèbre des résidus .

On a bésoin d'un appareil qui facilitera les opérations avec les résidus , qui remplacent ici des primitives. L'élection des règles est plus que pauvre . On sait de la théorie élémentaire que

$$\operatorname*{Res}_{z=\alpha}\left(f_1(z)+f_2(z)\right)=\operatorname*{Res}_{z=\alpha}f_1(z)+\operatorname*{Res}_{z=\alpha}f_2(z)$$

et

$$\operatorname*{Res}_{z=\alpha}\left(c f(z)\right)=c\cdot\operatorname*{Res}_{z=\alpha}f(z)$$

On a surtout bésoin de quelques formules plus proches relatives au résidu du produit . Les théorèmes suivantes sont évidentes :

Théorème. Si le point $z=\alpha$ présente une singularité commune de $f_1(z)$ et $f_2(z)$, et si on a les deux develloppements de Laurent

$$f_1(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_k}{(z-\alpha)^k}+\sum_{k=0}^{\infty}A_k\cdot(z-\alpha)^k$$

$$f_2(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B'_k}{(z-\alpha)^k}+\sum_{k=0}^{\infty}A'_k\cdot(z-\alpha)^k$$

le résidu du produit est comme il suit

$$(11)\quad \operatorname{Res}\left(f_1(z)\cdot f_2(z)\right)=A_0\cdot\operatorname*{Res}_{z=\alpha}f_2(z)+A'_0\cdot\operatorname*{Res}_{z=\alpha}f_1(z)+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_kB'_{k+1}+A'_kB_{k+1}\right)$$

Théorème. Si le point $z=\alpha$ présente une singularité isolée d'une seule fonction $f_2(z)$ de deux fonctions données , alors on a

$$(12)\quad \operatorname*{Res}_{z=\alpha}\left(f_1(z)\cdot f_2(z)\right)=A_0\cdot\operatorname*{Res}_{z=\alpha}f_2(z)+\sum_{k=1}^{+\infty}A_k\cdot B'_{k+1}\ .$$

Chez nous on peut prendre $f_1(z)=\frac{\ln z}{(1+z)^2}$, ainsi que la série pour $f_1(z)$ est fixe , si $z=\alpha$ ($\neq -1$) présente une singularité de $f_2(z)$. $z=\alpha$ étant un point simple de $f_1(z)$, on a

$$\ln z=\ln\alpha+\frac{1}{\alpha}(z-\alpha)-\frac{1}{2\alpha^2}(z-\alpha)^2+\frac{1}{3\alpha^3}(z-\alpha)^3-\frac{1}{4\alpha^4}(z-\alpha)^4\ldots$$

$$(13)\quad \frac{1}{(1+z)^2}=\frac{1}{(1+\alpha)^2}-\frac{2}{(1+\alpha)^3}(z-\alpha)+\frac{3}{(1+\alpha)^4}(z-\alpha)^2-\ \ldots\ldots ,$$

la première série convergeante dans $|z-\alpha|<1$, et la seconde dans $|z-\alpha|<|1+\alpha|$. On a le produit des séries :

$$(14)\quad \frac{\ln z}{(1+z)^2}=\frac{\ln\alpha}{(1+\alpha)^2}+(z-\alpha)\left[\frac{1}{\alpha(1+\alpha)^2}-\frac{2\ln\alpha}{(1+\alpha)^3}\right]+$$

$$+ (z-\alpha)^2\left[\frac{3\ln\alpha}{(1+\alpha)^4} - \frac{1}{2\alpha^2(1+\alpha)^2} - \frac{2}{\alpha(1+\alpha)^3}\right] + \cdots\cdots$$

Ainsi qu'on a

$$(15)\quad \operatorname*{Res}_{z=\alpha} \frac{\ln z}{(1+z)^2}\cdot f_2(z) = \frac{\ln\alpha}{(1+\alpha)^2}\cdot \operatorname*{Res}_{z=\alpha} f_2(z) + A_1\cdot B_2' + A_2\cdot B_3' + \cdots$$

les A_i étant connus

$$A_0 = \frac{\ln\alpha}{(1+\alpha)^2}$$

$$(16)\quad A_1 = \frac{1}{\alpha(1+\alpha)^2} - \frac{2\ln\alpha}{(1+\alpha)^3}$$

$$A_2 = \frac{3\ln\alpha}{(1+\alpha)^4} - \frac{1}{2\alpha^2(1+\alpha)^2} - \frac{2}{\alpha(1+\alpha)^3}$$

- - - - - - - - - - - - - - - - .

et les B_k étant donnés du devellopement de $f_2(z)$.

Mais une vue sur les résultats et les procédés de l'intégration nous dit que dans le cas si $f(x)$ est entière de x , telle est aussi $f\left(\frac{x_0 z + x}{1+z}\right)$, ainsi que $(1+z)$ se trouve dans le nominateur nécessairement, ce qui veut dire que $z = -1$ présente une singularité de $f_1(z) = \frac{\ln z}{(1+z)^2}$ et de $f_2(z) = f\left(\frac{x_0 z + x}{1+z}\right)$.

Ça veut dire que le plus souvent on a le premier cas du premier théorème , avec f_1 connue .C'est pourquoi d'un intérêt immédiat est le devellopement de $\frac{\ln z}{(1+z)^2}$ autour de $z=-1$. On a directement:

$$(17)\quad \frac{\ln z}{(1+z)^2} = \frac{\pi i}{(1+z)^2} - \frac{1}{1+z} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}(z+1) - \frac{1}{4}(z+1)^2 - \cdots$$

d'où on a

$$\operatorname*{Res}_{z=-1} \frac{\ln z}{(1+z)^2} = -1$$

8°. Que nous donne cette methode ?

De l'exposé précédent il est évident que le résultat de l'intégration au moyen des résidus est une fonction de x_0, x , qui est donnée dans la forme d'une série . Comme nous avons dans la théorie élémentaire une methode devellopée de l'intégration au moyen des séries , ce que nous proposons est un algorithme équivalent .Une question alors se pose immédia - tement : quand le résultat est exact , ou quand est-il dans la forme fermée .Une analyse simple fait la réponse .

La série de $\frac{\ln z}{(1+z)^2}$ étant connue , tout dépend de la forme de $f\left(\frac{x_0 z+x}{1+z}\right)$.

1°. Si $z=\alpha\,(\neq -1)$ est une singularité de l'ordre fini de $f\left(\frac{x_0 z+x}{1+z}\right)$, le résultat (6) de l'intégration est dans la forme fermée .

2°. Si $z=\alpha\,(\neq -1)$ est une singularité essentielle ou point critique de $f\left(\frac{x_0 z+x}{1+z}\right)$, l'intégration (6) donne une série .

3°. Si $f\left(\frac{x_0 z+x}{1+z}\right)$ est entière par rapport à $(1+z)$:

$$f = A_0 + A_1(1+z) + A_2(1+z)^2 + \cdots\cdots$$

alors on a

$$\operatorname*{Res}_{z=-1} \frac{\ln z}{(1+z)^2} f\left(\frac{x_0 z+x}{1+z}\right) = -A_0 + \pi i A_1 ,$$

et le résultat de l'intégration (6) est dans la forme fermée .

4°. Si $z=-1$ est un pôle du I -er ordre de $f\left(\frac{x_0 z+x}{1+z}\right)$:

$$f = \frac{B_1}{1+z} + A_0 + A_1(1+z) + A_2(1+z)^2 + \cdots$$

alors on a

$$\operatorname*{Res}_{z=-1} \frac{\ln z}{(1+z)^2} f\left(\frac{x_0 z+x}{1+z}\right) = A_1 \pi i - A_0 - \frac{1}{2}B_1 ,$$

et l'intégration (6) est fermée .

5°. Si $z=-1$ est un pôle de k - ième ordre de $f\left(\frac{x_0 z+x}{1+z}\right)$:

$$f = \frac{B_k}{(1+z)^k} + \frac{B_{k-1}}{(1+z)^{k-1}} + \cdots + \frac{B_1}{1+z} + A_0 + A_1(1+z) + \cdots$$

on a $\operatorname*{Res}_{z=-1} \frac{\ln z}{(1+z)^2} f\left(\frac{x_0 z+x}{1+z}\right) = \pi i A_1 - A_0 - \frac{B_1}{2} - \frac{B_2}{3} - \frac{B_3}{4} - \cdots - \frac{B_k}{k+1}$

de nouveau une forme fermée .

6°. Si $z=-1$ est un point critique ou singularité essentielle isolée de $f\left(\frac{x_0 z+x}{1+z}\right)$, le résultat de (6) est nécessairement une série .

7°. A la fin , si dans 2° ou 6° les séries sont sommables dans la forme finie, on peut avoir un tel résultat sa ns l'égard à la singularité .

Nous avons ainsi épuisé tous les cas .

9°. La séparation des variables .

Si l'équation différentielle du premier orddre $y' = f(x,y)$ est de la forme

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)} \tag{18}$$

on a la séparation des variables

$$g(y)\,dy = f(x)\,dx$$

ce qui nous amène aux quadratures

$$\int_{y_0}^{y} g(y)\,dy = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + C$$

et d'après (6) on a le théorème :

L'équation différentielle (18) a une solution implicite déterminée d'une somme des résidus :

$$(y_0-y)\sum \operatorname{Res}\varphi(y,z) = (x_0-x)\sum \operatorname{Res}\psi(x,z) + C \tag{19}$$

avec

$$\varphi(y,z) = \frac{\ln z}{(1+z)^2}\, g\left(\frac{y_0 z + y}{1+z}\right), \text{ et}$$

$$\psi(x,z) = \frac{\ln z}{(1+z)^2}\, f\left(\frac{x_0 z + x}{1+z}\right).$$

10°. L'équation homogène ou réduisible à homogène .

Les équations différentielles

$$y' = f(y/x) \quad \text{et} \quad y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$$

se réduisant à la séparation des variables par un traitement $y/x = u$ = nouvelle fonction . On a

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{f(u)-u}, \quad x = C e^{\int \frac{du}{f(u)-u}}$$

et on a dans la forme des résidus :

$$x = x_0 + \exp\left\{(u_0-u)\sum \operatorname{Res}\left[f\left(\frac{u_0 z+u}{1+z}\right) - \frac{u_0 z + u}{1+z}\right]^{-1}\right\}. \tag{20}$$

11°. Equation linéaire du premier ordre .

La solution de l' équation linéaire du pre - mier ordre (21) $y' + f(x)y + g(x) = 0$
est consttituée par les deux quadratures

$$y = e^{-\int f(x)dx}\left[C - \int e^{\int f(x)dx} g(x)\,dx\right].$$

La première entre eux

$$y'/y + f(x) = \frac{z'}{z}, \quad y = z \cdot \exp\left(-\int f(x)dx\right)$$

est exprimable au moyen des résidus

$$e^{-\int f(x)dx} = \exp(x - x_0)\sum \operatorname{Res} \varphi_1(x_0, x, z) = y_1(x),$$

avec

$$(22) \quad \varphi_1(x_0, x, z) = \frac{\ln z}{(1+z)^2} f\left(\frac{x_0 z + x}{1+z}\right),$$

et la seconde

$$z(x) = C - \int g(x) \cdot \exp\left(\int f(x)dx\right)dx$$

aussi

$$z(x) = C - (x_0 - x)\sum \operatorname{Res} \varphi_2(x_0, x, z),$$

avec

$$(23) \quad \varphi_2 = \frac{\ln z}{(1+z)^2} \cdot g\left(\frac{x_0 z + x}{1+z}\right) \cdot y_1\left(\frac{x_0 z + x}{1+z}\right).$$

On a le théorème suivant :

Théorème . L'équation différentielle linéaire du I - er ordre (21) a la solution exprimable au moyen des résidus :

$$(24) \quad y = \exp\left\{(x - x_0)\sum \operatorname{Res} \varphi_1(z)\right\} \cdot \left[y_0 + (x - x_0)\sum \operatorname{Res} \varphi_2(z)\right]$$

les φ_1 et φ_2 étant données par (22) et (23) , φ_2 dépen - dant de φ_1 .

Exemple . Pour résoudre l' équation $y' = \frac{1}{x} y - x$,
il faut former , en posant f(x) = - 1/x , g(x) = x

$$\varphi_1(z, x, x_0) = -\frac{\ln z}{(1+z)(x_0 z + x)}.$$

$$\sum \operatorname{Res} \varphi_1(z) = R_1 + R_2 = \lim_{z\to -1} \frac{-\ln z}{x_0 z + x} + \lim_{z\to -\frac{x}{x_0}} \frac{-\ln z}{1+z} = \frac{\ln x - \ln x_0}{x - x_0}$$

et la première quadrature nous donne :

$$y_1(x) = \exp\left\{(x-x_0)\sum \operatorname{Res} \varphi_1(z)\right\} = \frac{x}{x_0} .$$

On forme ensuite

$$g(x) \cdot \exp(x_0 - x)\sum \operatorname{Res} \varphi_1(z) = x\frac{x_0}{x} = x_0 ,$$

et la seconde quadratute se réduit aux résidus :

$$y(x_0) + (x-x_0)\sum \operatorname{Res} \varphi_2(z) = y_0 + x_0(x-x_0) \cdot \lim_{z\to -1} \frac{d}{dz}(\ln z) = y_0 - x_0(x-x_0).$$

On a la solution $\quad y = y_0 \cdot \frac{x}{x_0} - x(x-x_0),$

que l'on vérifie facilement .

12°. L'équation différentielle de Bernoulli .

$$\frac{dy}{dx} + f(x)y + g(x)y^n = 0 . \tag{25}$$

Cette équation réduisible à la précédente linéaire a aussi deux quadratures : $\quad \frac{y'}{y} + f(x) + g(x)y^{n-1} = 0$

dont la première

$$\frac{y'}{y} + f(x) = \frac{z'}{z} \; , \; y = z \cdot e^{-\int f(x)dx}$$

est identique avec (22) . La seconde

$$\frac{dz}{z^n} = -g(x) \cdot e^{(1-n)\int f(x)dx} \cdot dx$$

est exprimable par les résidus

$$\frac{z^{1-n}}{1-n} = z_0 - (x_0 - x)\sum \operatorname{Res} \varphi_3 ,$$

avec

$$\varphi_3 = g\left(\frac{x_0 z + x}{1+z}\right) \cdot \left[y_1\left(\frac{x_0 z + x}{1+z}\right)\right]^{n-1} . \tag{26}$$

La solution générale est donc :

$$y(x) = \left[\exp(x-x_0)\sum \operatorname{Res} \varphi_1(z)\right] \cdot \left[(1-n)\left(z_0 + (x-x_0)\sum \operatorname{Res} \varphi_3\right)\right]^{\frac{1}{1-n}} . \tag{27}$$

13°. L'équation différentielle de Riccati.

On connait bien que l'équation différentielle de Riccati (28) $\frac{dy}{dx} + f(x)y^2 + g(x)y + h(x) = 0$ est résoluble aux quadratures si l'on connait une intégrale particulière y_1. Au moyen d'un changement de la fonction

$$y = y_1 + \frac{1}{W},$$

W étant une nouvelle fonction, on obtient une équation linéaire : $\frac{dW}{dx} - \left[2y_1 f(x) + g(x)\right]W - f(x) = 0$

exprimable par les résidus :

$$(29) \qquad W_1 = \exp(x_0 - x) \sum \operatorname{Res} \varphi_1(z),$$

avec
$$\varphi_1(z) = \frac{\ln z}{(1+z)^2}\left[2y_1(t)f(t) + g(t)\right] \Big/ t = \frac{x_0 z + x}{1+z}$$

$$(30) \qquad W_2 = C + (x_0 - x)\sum \operatorname{Res} \varphi_2(z), \qquad \text{avec}$$

$$\varphi_2(z) = \frac{\ln z}{(1+z)^2}\left[f(t)\left(\exp(x_0 - x)\sum \operatorname{Res} \frac{\ln z}{(1+z)^2}\cdot\left(2y_1(t)\, f(t) + g(t)\right)\right)\right]$$
$$t = \frac{x_0 z + x}{1+z}$$

La solution générale est donc

$$(31) \qquad y(x) = y_1 + \left\{\exp(x_0 - x)\sum \operatorname{Res} \varphi_1(z)\left[W_0 + (x_0 - x)\sum \operatorname{Res} \varphi_2(z)\right]\right\}^{-1}$$

De même façon, la connaissance de deux intégrales particulières implique une seule somme des résidus :

$$(32) \qquad \frac{y - y_1}{y - y_2} = C \exp(x_0 - x)\sum \operatorname{Res} \varphi(z),$$

$$\varphi(z) = \frac{\ln z}{(1+z)^2}\left[f(t)\left(y_2(t) - y_1(t)\right)\right] \Big/ t = \frac{x_0 z + x}{1+z}.$$

14°. Une expression pour l'intégrale particulière analytique de l'équation du I-er ordre

Qu'il nous soit donnée l'équation différentielle linéaire du premier ordre

(33) $$y' + f(x)y + g(x) = 0$$

Nous chercherons les intégrales particulières y(x) telles que y(z) soit analytique dans la région décrite C .

Théorème . y(x) est une intégrale analytique de l'équation différentielle linéaire (33) , si l'intégrale curviligne est égale à zéro :

(34) $$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{y(z)\left[1+f(x)(z-x)\right]+g(x)(z-x)}{(z-x)^2}dz = 0$$

Démonst. tion . Soit x un point intérieur dans un contour fermé C . Si y(z) est analytique sur C et dans C , on a , d'après le théorème de Cauchy :

(35) $$y(x) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{y(z)}{z-x}dz \ .$$

La fonction analytique possèdant de même une dérivation analytique on a , suivant la formule intégrale de Cauchy

$$y' = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{y(z)}{(z-x)^2}dz$$

Un remplacement dans l'équation nous donne

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{y(z)}{(z-x)^2}dz + f(x)\cdot\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{y(z)}{z-x}dz + g(x)\cdot\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{dz}{z-x} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{y(z)\left[1+(z-x)f(x)\right]+g(x)(z-x)}{(z-x)^2}dz = 0$$

Prenons inversement , y(z) étant analytique et l'égalité (   ) valable .La fonction sous le signe de l'intégrale est analytique, avec un parametre réel x . Les points x étant intérieurs dans C, ils sont les pôles du second degré . L'intégrale est calculable au moyen du théorème de Cauchy sur les résidus :

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{y(z)\left[1+(z-x)f(x)\right]+g(x)(z-x)}{(z-x)^2}\,dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\cdot 2\pi i \sum_C \operatorname{Res} \frac{y(z)\left[1+(z-x)f(x)\right]+g(x)(z-x)}{(z-x)^2} =$$

$$= \frac{1}{1!}\lim_{z\to x}\frac{d}{dz}(z-x)^2\,\frac{y(z)\left[1+(z-x)f(x)\right]+g(x)(z-x)}{(z-x)^2} =$$

$$= \lim_{z\to x}\left[y'(z)\left(1+(z-x)f(x)\right)+y(z)f(x)+g(x)\right] =$$

$$= y'(x) + f(x)y(x) + g(x) = 0 .$$

Ce qui veut dire que la condition (34) est nécessaire et suffisante pour l'équation (33) . Le théorème est démontré .

Nous avons donc une condition dans la forme complexe pour qu'une fonction y(x) soit la solution analytique de l'équation différentielle (33) .

15°. Équation le différentiel total .

Si dans l'équation

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0 \tag{36}$$

il vaut

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

ou s'il éxiste un facteur intégrant $\lambda(x,y)$ tel que l'équation $\lambda P\,dx + \lambda Q\,dy = 0$ possède la même propriété, la quadrature est possible. On connait que la solution est comme il suit

$$u(x,y) = \text{const} = C \quad , \quad \text{avec}$$

$$U(x,y) = \int P(x,y)\,dx + \int\left[Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)\,dx\right]dy = C .$$

On peut traduir cela à la langue des résidus sans aucune difficulté . On a

$$U(x,y) = \sum \operatorname{Res} \varphi_1(z) + \sum \operatorname{Res} \varphi_2(z) = C . \tag{37}$$

avec

$$\varphi_1(z) = \frac{\ln z}{(1+z)^2} P(t,y) \quad , \qquad t = \frac{x_0 z + x}{1+z}$$

et

$$\varphi_2(z) = \frac{\ln z}{(1+z)^2}\left[Q(x,t) - \frac{\partial}{\partial y}\varphi_1(z)\right] , \quad -\text{"}-$$

16°. Les approximations successives .

La formule de Picard des appoximations successives

$$(38) \qquad y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})dx$$

est traduisible aux résidus par l'introduction des fonctions en une voie simultaine :

$$y_0(x) = y_0$$

$$y_1(x) = y_0 + \sum \operatorname{Res}\varphi_1(z) ; \quad \varphi_1(z) = (x_0 - x)\frac{\ln z}{(1+z)^2} f\left(\frac{x_0 z + x}{1+z}, y_0\right)$$

$$y_2(x) = y_0 + \sum \operatorname{Res}\varphi_2(z) ;$$

$$(39) \qquad \varphi_2(z) = (x_0 - x)\frac{\ln z}{(1+z)^2} f\left(t, y_1(x)\right), \; t = \frac{x_0 z + x}{1+z} \; \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$y_n(x) = y_0 + \sum \operatorname{Res}\varphi_n(z) ,$$

$$\varphi_n(z) = (x_0 - x)\frac{\ln z}{(1+z)^2} f\left(t, y_{n-1}(x)\right), \; t = \frac{x_0 z + x}{1+z}$$

C'est une représentation formelle , sans prétensions d'être pratiquée .

17°. L'équation linéaire du second ordre .

Si l'on veut obtenir la solution de l'équation

$$(40) \qquad y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

par les quadratures , la condition nécessaire est , comme on le sait , de savoir une intégrale particulière y_1 .Le changement de la fonction $y = y_1 . W$ amène aux quadratures par un amoindrissement de l'ordre .

On a de cette façon , comme on le sait

$$y = y_1 \int \frac{C_2}{y_1^2} e^{-\int a(x)dx} dx + C_1 y_1$$

ce qui est facilement traduisible à la langue des résidus .On a

$$(41) \quad y = C_1 y_1 + y_1 \sum_i \mathrm{Res}\, \varphi_2(z)$$

$$\varphi_2(z) = (x_0 - x) \frac{\ln z}{(1+z)^2} \frac{C_1}{y_1^2(t)} \cdot \exp\left[-(x_0-x)\sum \mathrm{Res}\, \varphi_1(z)\right]$$

$$\varphi_1(z) = \frac{\ln z}{(1+z)^2} \cdot a(t), \qquad t = \frac{x_0 z + x}{1+z}$$

Les sommes des résidus de φ_1 et φ_2 remplacent ici les quadratures.

On peut démontrer que l' équation ( ) est aussi représentable au moyen d' une intégrale curviligne , c'est à dire l' équivalence suivante est valable :

$$y'' + a(x) y' + b(x) y = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{y(z)\left[2! + a(x)(z-x) + b(x)(z-x)^2\right]}{(z-x)^3} dz = 0$$

La démonstration se fait en une voie analogue à celle de 14°.

18°. L' équation $y^{(n)} = f(x)$. Les quadratures simultaines . La formule de Cauchy .

Qu' il nous soit donnée l' équation du second ordre

$$(42) \quad y'' = f(x)$$

qui contient les deux quadratures

$$(y')' = f(x) \quad , \quad y = \int \left(\int f(x) dx \right) dx .$$

On a

$$y' = (x_0 - x) \sum \mathrm{Res}\, \varphi_1(z) + y'(x_0) =$$

$$(43) \quad = (x_0 - x) \sum \mathrm{Res} \frac{\ln z}{(1+z)^2} f\left(\frac{x_0 z + x}{1+z}\right) + y'(x_0) .$$

Le second pas nous donne :

$$(44)\quad y(x)=y_0+(x_0-x)\sum \mathrm{Res}\,\varphi_2(z)\,,$$

avec

$$\varphi_2(z)=\frac{\ln z}{(1+z)^2}\left[y_0'+(x_0-x)\sum \mathrm{Res}\,\varphi_1(z)\right]$$

Les deux quadratures sont donc remplacéees par les résidus .

On peut formuler sans difficultés le théorème plus général :

Théorème. L'équation différentielle

$$(45)\qquad y^{(n)}=f(x)$$

permet un amoindrissement de l'ordre au moyen des résidus , et elle a son k-ième intégrale sous la forme

$$(46)\quad y^{(n-k)}=y^{(n-k)}(x_0)+(x_0-x)\sum \mathrm{Res}\,\varphi_{n-k}(z,x_0,x)$$

où les fonctions φ_i sont données récursivement

$$\varphi_{n-1}=\frac{\ln z}{(1+z)^2}f\left(\frac{x_0 z+x}{1+z}\right)$$

$$\varphi_{n-k}=\frac{\ln z}{(1+z)^2}\left[y_0^{(n-k)}+(x_0-x)\sum \mathrm{Res}\,\varphi_{n-k+1}(z,x_0,x)\right],\quad k=1,2,3,\dots,n.$$

Dans le cas n=k on a la solution génerale :

$$\varphi_0(x)=\frac{\ln z}{(1+z)^2}\left[y_0+(x_0-x)\sum \mathrm{Res}\,\varphi_1(z)\right],$$

possédant n constantes arbitraires:

$$y_0^{(n-1)},\ \dots\ ,y_0'',\ y_0',\ y_0\ .$$

Cette solution est obtenue récursivement suivant le procédé indiqué .

Rien ne nous empêche de continuer cette analogie plus loin : la formule de Cauchy

$$\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\dots\int_{x_0}^{x}f(x)\,dx^n=\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}f(t)\,dt=$$

est aussi représentable par la somme des résidus :

$$(47)\quad =-\frac{(x-x_0)^n}{(n-1)!}\sum \mathrm{Res}\,\frac{\ln z}{(1+z)^{n+1}}\cdot z^{n-1}\cdot f\left(\frac{x_0 z+x}{1+z}\right).$$

19°. L'équation linéaire du n -ième ordre .

Tout d'abord on peut donner une interprétation de l'équation différentielle linéaire du n- ième ordre

$$(48) \quad L(y) = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_n(x)y = 0$$

au moyen de l'intégrale curviligne, c'est à dire au moyen d'une équation intégrale singulière . Suivant les procédés dans 14° et 17° on a le théorème suivant :

Théorème . L'équation differentielle

$$L(y) = 0$$

est équivalente avec sa forme intégrale

$$(49) \quad \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{y(z)\left[n! + (n-1)!\,a_1(x)(z-x) + \dots + a_n(x)(z-x)^n\right]}{(z-x)^{n+1}}\,dz = 0$$

à l'égard des solutions analytiques $y(x)$.

La démonstration se fait en une voie analogue à celle du premier et du second ordre données dans 14° et 17°. A partir de solutions analytiques de $L(y) = 0$, au moyen de la formule de Cauchy (35) , de la représentation intégrale d'une fonction analytique et de ses derivées , on a tout de suite (49). Inversement , soit (49) empli et $y(z)$ étant analytique dans C et sur C , un calcul des résidus sur la fonction sousintégrale de (49) nous donne tout de suite (48) . L'écriture de tout cela est une question technique .La forme (49) pour l'équation linéaire (48) peut donner quelques avantages , car la fonction inconnue $y(z)$ est donnée separée de ses dérivés et ses coefficients, qui entrent seulement dans le noeud singulier de l'équation. La solution générale de $L(y) = 0$

$$(50) \quad y = \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot y_i(x)$$

C_i étant des constantes arbitraires, les $\{y_i(x)\}$, $i=1,2,3,..n$ étant un système fondamental de (48) , est donc représentable sous la forme de l'intégrale complexe :

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \left(\sum_{i=1}^{n} C_i y_i(z)\right)\frac{\left[n!+(n-1)!a_1(x)(z-x)+\cdots+a_n(x)(z-x)^n\right]}{(z-x)^{n+1}}dz=0$$

Dans ce sens , l' équation L(y) = 0 reprend sa forme cannonique (c' est à dire une forme sans le membre avec (n-1)- ième dérivation) , si l' on introduit une nouvelle fonction inconnue W(x) au moyen de la substitution y(x) = V.W(x) , la fonction V étant donnée par

$$(51)\quad V(x)=\exp\left[-\frac{1}{n}(x_0-x)\sum_1 \operatorname{Res}\frac{\ln z}{(1+z)^2}a_1\left(\frac{x_0 z+x}{1+z}\right)\right].$$

De même façon , la déterminante de Wronsky de l' équation L(y) =0 a une simple représentation au moyen des résidus

$$(52)\quad W(x)=W(y_1,y_2,\cdots,y_n)=W_0\cdot\exp\left[(x-x_0)\sum \operatorname{Res}\frac{\ln z}{(1+z)^2}a_1\left(\frac{x_0 z+x}{1+z}\right)\right]$$

que présente une variante de la formule classique de Liouville .

Plusieurs théorèmes classiques des équations linéaires peuvent être présentés sous la forme complexe . Par exemple

Théorème . Si l' on connait une intégrale particulière de l' équation linéaire L(y) = 0, on peut amoindrir le rang de l' équation L(y)=0, avec la substitution $y = y_1.W$, W étant une nouvelle fonction, et l' équation obtenue du (n-1)-ordre est de nouveau linéaire .

Démonstration . La supposition nous donne

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{y_1(z)W(z)\left[n!+(n-1)!a_1(x)(z-x)+\cdots\cdots+a_n(x)(z-x)^n\right]}{(z-x)^{n+1}}dz=0.$$

Si y(z) est une solution analytique, telle est W(z) aussi, c' est à dire

$$W(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(z-x)^k}{k!}W^{(k)}_{(x)}$$

En substituant dans la formule précédente , on a

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{y_1(z)\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(z-x)^k}{k!}W^{(k)}_{(x)}\right)\left[n!+(n-1)!a_1(x)(z-x)+\cdots+a_n(z-x)^n\right]}{(z-x)^{n+1}}dz=0$$

En multipliant avec la série entière de W(z) et en réglant par rapport à W(x) , on a

$$W_{(x)}\cdot\frac{1}{2\pi i}\oint_C y_1(z)\frac{\left[n!+(n-1)!a_1(x)(z-x)+\dots+a_n(x)(z-x)^n\right]}{(z-x)^{n+1}}dz$$

$$+\frac{W'_{(x)}}{1!}\cdot\frac{1}{2\pi i}\oint_C y_1(z)\left[\frac{n!}{(z-x)^n}+\frac{(n-1)!a_1(x)}{(z-x)^{n-1}}+\dots+\frac{a_n(x)}{1}\right]dz$$

$$+\frac{W''_{(x)}}{2!}\cdot\frac{1}{2\pi i}\oint_C y_1(z)\left[\frac{n!}{(z-x)^{n-1}}+\frac{(n-1)!a_1(x)}{(z-x)^{n-2}}+\dots+a_n(x)(z-x)\right]dz$$

$$+\dots\dots\dots+$$

$$+\frac{W^{(n)}_{(x)}}{n!}\cdot\frac{1}{2\pi i}\oint_C y_1(z)\left[\frac{n!}{z-x}+(n-1)!a_1(x)+(n-2)!a_2(x)(z-x)+\dots\right]dz$$

$$+\frac{W^{(n+1)}_{(x)}}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{2\pi i}\oint_C y_1(z)\left[n!+(n-1)!a_1(x)(z-x)+\dots\right]dz+$$

$$+\dots\dots\dots$$

La première intégrale est égale à zéro , car c'est l'équation $L(Y_1(z)) = 0$. Les intégrales près de $W', W'', \dots, W^{(n)}$ sont $\neq 0$ car on n'a pas la structure de L(y) . Ceux-ci deffinissent quelques fonctions régulières de x qu on marquera par $b_1(x), b_2(x), \dots b_n(x)$. L'avant - dernière intégrale a évidement la valeur

$$\frac{W^{(n)}_{(x)}}{n!}\cdot\frac{1}{2\pi i}\cdot 2\pi i\cdot n!\cdot y_1(x)$$

et les autres intégrales , toutes jusqu'à l'infini , sont égales à zéro, étant les intégrales des fonctions analytiques dans l'intérieur d'un contour fermé . Il s'ensuit :

$$W'_{(x)}b_1(x)+W''_{(x)}b_2(x)+\dots+W^{(n)}_{(x)}y_1(x)=0$$

ou , après que l'on pose : $W' = V_{(x)}$

$$(S)\quad y_1(x)\cdot V^{(n-1)}_{(x)}+\dots\dots+V'_{(x)}b_2(x)+V_{(x)}b_1(x)=0$$

On obtient l'équation $L(V) = 0$ du $(n-1)$ - ième ordre , avec quoi le théorème est démontré .

<u>2o°. Exemple : Mèthode de Lagrange de la variation des constantes pour l'équation de second ordre .</u>

L'équation différentielle linéaire non - homogène du second ordre

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x) \tag{54}$$

a une représentation au moyen d'une intégrale curviligne complexe

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{y(z)\left[2! + a(x)(z-x) + b(x)(z-x)^2\right] - f(x)(z-x)^2}{(z-x)^3}\,dz = 0 .$$

Si $y_1(x)$, $y_2(x)$ sont les intégrales linéairement indépendentes de l'équation homogène correspondante , on a la solution générale de l'équation homogène $y = C_1y_1 + C_2y_2$

C_1, C_2 étant les constantes d'intégration arbitraires . Si l'on pose la question suivante : existent -il les deux fonctions $C_1(x)$ et $C_2(x)$ telles que l'expression

$$y = C_1(x).y_1(x) + C_2(x)y_2(x) \tag{55}$$

soit la solution générale de (54) , on a

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\left[C_1(z)y_1(z) + C_2(z)y_2(z)\right]P_2(z)}{(z-x)^3}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)dz}{z-x}$$

où on a posé $P_2(z) = 2! + a(x).(z-x) + b(x).(z-x)^2$.

A cause de cette représentation , qui est possible seulement si $C_1(z)$ et $C_2(z)$ sont analytiques dans la même region, c'est à dire

$$C_1(z) = C_1(x) + \frac{C_1'(x)}{1!}(z-x) + \frac{C_1''(x)}{2!}(z-x)^2 + \dots .$$

$$C_2(z) = C_2(x) + \frac{C_2'(x)}{1!}(z-x) + \frac{C_2''(x)}{2!}(z-x)^2 + \dots .$$

on obtient , après avoir remplacé

$$C_1(x)\oint_C \frac{y_1(z)P_2(z)}{(z-x)^3}\,dz + \oint_C \frac{\left[C_1'\cdot y_1(z)(z-x) + C_1''y_1(z)(z-x)^2 + \dots\right]}{(z-x)^3} +$$

$$+C_2(x)\oint_C \frac{y_2(z)P_2(z)}{(z-x)^3}dz + \oint \frac{[C_2'y_2(z)(z-x)+C_2''y_2(z)(z-x)^2+\dots+]P_2(z)}{(z-x)^3}dz$$

$$= \oint_C \frac{f(z)dz}{z-x}$$

Les deux premières intégrales sont égales à zéro , car $y_1(z)$, $y_2(z)$ sont les solutions de l' équation homogène $L(z) = 0$.

Les $y_1(z)$, $y_2(z)$ étant aussi analytiques , on a

$$y_1(z) = y_1(x) + \frac{y_1'(x)}{1!}(z-x) + \frac{y_1''(x)}{2!}(z-x)^2 + \dots$$

$$y_2(z) = y_2(x) + \frac{y_2'(x)}{1!}(z-x) + \frac{y_2''(x)}{2!}(z-x)^2 + \dots$$

Les remplacant dans l' équation , on obtient

$$\oint_C \frac{C_1'(x)y_1(x)(z-x)+C_1'(x)y_1'(x)(z-x)^2+C_1'(x)y_1''(z-x)^3+\dots}{(z-x)^3}P_2(z)dz +$$

$$+\oint_C \frac{C_2'(x)y_2(x)(z-x)+C_2'(x)y_2'(x)(z-x)^2+C_2'(x)y_2''(z-x)^3+\dots}{(z-x)^3}P_2(z)dz =$$

$$= \oint_C \frac{f(z)dz}{z-x} .$$

Les intégrales dans les sommes ci-dessus ayant les membres $(z-x)^k$, pour $k \geqq 3$ étant toutes égales à zéro, on a l'unique condition

$$(56) \quad \oint_C \frac{(C_1'y_1+C_2'y_2)(z-x)+(C_1'y_1'+C_2'y_2')}{(z-x)^3}P_2(z) = \oint_C \frac{f(z)dz}{z-x}$$

Car on a deux fonctions arbitraires C_1 , C_2 , et une seule restriction précédente (56) , on peut prendre que

$$C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0$$

Alors il nous reste

$$C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x) .$$

On obtient ainsi pour les quadratures $C_1(x)$, $C_2(x)$, un système algèbrique dépendant de

$$(57)\quad \text{det syst.} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = W(y_1,y_2) = W_0 \cdot \exp (x-x_0) \sum \operatorname{Res} \frac{\ln z}{(1+z)^2} a\left(\frac{x_0 z+x}{1+z}\right)$$

On a

$$C_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}}{W(y_1,y_2)} = \frac{-y_2 f(x)}{W(y_1,y_2)} , \quad C_2' = \frac{y_1 f(x)}{W(y_1,y_2)} ,$$

ainsi que l'on a au moyen des résidus :

$$C_1(x) = (x_0-x) \sum \operatorname{Res} \frac{\ln z}{(1+z)^2} \cdot \frac{-y_2(t) f(t)}{W(y_1(t), y_2(t))} , \quad t = \frac{x_0 z + x}{1+z}$$

$$(58)$$

$$C_2(x) = (x_0-x) \sum \operatorname{Res} \frac{\ln z}{(1+z)^2} \frac{y_1(t) f(t)}{W(y_1(t), y_2(t))} , \quad -"- ,$$

et la solution générale de l'équation

$$(54)\qquad y'' + a(x) y' + b(x) y = f(x)$$

est comme il suit

$$(59)\quad y(x) = y_1 \left(A + \sum \operatorname{Res} \varphi_1(z)\right) + y_2 \left(B + \sum \operatorname{Res} \varphi_2(z)\right) .$$

LITTERATURE

[1] A. Cauchy - Oeuvres completes .

[2] R.P. Boas Jr , Lowell Schoenfeld - Indefinite integration by residues , SIAM Review, Vol. 8 ,No 2 , 1966

[3] Behnke - Sommer - Theorie der Analytischen Functionen , Zweiter auflage , Berlin 1962

[4] D.Dimitrovski ,D.Adamović - Sur quelques formules du calcul des residus , Mat. Vesnik , 1(16), sv. 2 , Belgrade ,1964

[5] D. Dimitrovski - Sur une methode du calcul des integrales definies des fonctions rationnelles au moyen des sommes des residus, Bulletin de la Soc. math., phys. SRM , T.XIII, 1962, pp. 21-31

[6] D.S.Mitrinović - Calculus of residues , Tut.texts 4, Nordhoff LTD , Groningen 1966