Математички Билтен
13 (XXXIX)
1989 (35-43)
Скопје, Југославија

ОПШТ ПРОБЛЕМ НА ВАРИЈАЦИЈА НА КОНСТАНТИТЕ ЗА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА РАВЕНКА ОД II РЕД

Драган С. Димитровски, Стана Д. Цвејиќ

Познатиот Лагранжов метод на варијација на константите во теоријата на диференцијалните равенки важи само за линеарните равенки, каде што нехомогени линеарни равенки се решаваат со помош на хомогените, со варијација на константите во нивното општо решение. Покажано е ([1], [2], [3], [4], [5]) дека ова може да се генерализира во повеќе насоки.

Во овој труд ние ќе го генерализираме овој метод практично врз секоја нормална диференцијална равенка од II ред, и преку теоријата на непрекинатите групи трансформации ќе дадеме потребни и доволни услови за квадратурната решливост на оваа постапка.

Поставување на општиот проблем на варијација на константите за нормална диференцијална равенка од II ред.

Нека е дадена општа нормална диференцијална равенка од II ред

$$y'' = f(x,y,y') \tag{1}$$

и нека на некој начин е познато нејзиното општо решение

$$y = \phi(x,C_1,C_2) \tag{2}$$

каде што C_1 и C_2 се произволни интеграциони константи, така што за секое C_1,C_2 важи

$$\phi''_{xx}(x,C_1,C_2) \equiv f(x,\phi(x,C_1,C_2),\phi'_x(x,C_1,C_2)). \tag{3}$$

Дали со варијација на константите

$$C_1 = C_1(x), \quad C_2 = C_2(x) \tag{4}$$

(така што дефиниционото подрачје на функциите $C_1(x)$, $C_2(x)$ да биде истата онаа област D_x, којашто е дефинициона област на решението (2) на равенката (1); и областа на промената на функциите (4) да биде идентична со областа на промената на слободните интеграциони константи, т.е. $-\infty < C_1(x),\ C_2(x) < +\infty$, или да биде дел од реалната оска) имено со

$$y = \phi(x, C_1(x), C_2(x)) \tag{5}$$

може да се реши и поопштата равенка

$$y'' = f(x, y, y') + F(x, y, y'). \tag{6}$$

За функциите f, F ќе претпоставиме дека имаат основни квалитети на некој од доволните услови за егзистенција и единственост на решението на Кошиевата задача, имено нека

$$f, F \in (C, \mathrm{Lip})(D_{xyy'}). \tag{7}$$

Тогаш равенките (1) и (6) имаат единствено и непрекинато диференцијабилно решение под некои дадени почетни услови.

Од (5) да побараме изводи од I и II ред

$$y'_x = \phi'_x(x, C_1, C_2) + \phi'_{C_1}\frac{dC_1}{dx} + \phi'_{C_2}\frac{dC_2}{dx} \tag{8}$$

и

$$y''_{xx} = \phi''_{xx}(x, C_1, C_2) + \phi''_{xC_1}\frac{dC_1}{dx} + \phi''_{xC_2}\frac{dC_2}{dx} + \phi'_{C_1}\frac{d^2C_1}{dx^2} + \phi'_{C_2}\frac{d^2C_2}{dx^2} +$$
$$+ \phi''_{C_1^2}\left(\frac{dC_1}{dx}\right)^2 + 2\phi''_{C_1C_2}\left(\frac{dC_1}{dx}\right)\left(\frac{dC_2}{dx}\right) + \phi''_{C_2^2}\left(\frac{dC_2}{dx}\right)^2 \tag{9}$$

Ако (5), (8) и (9) ги замениме во (6), ќе имаме

$$\begin{aligned}
&\phi''_{xx}(x, C_1, C_2) + \phi''_{xC_1}\frac{dC_1}{dx} + \phi''_{xC_2}\frac{dC_2}{dx} + \phi'_{C_1}\frac{d^2C_1}{dx^2} + \phi'_{C_2}\frac{d^2C^2}{dx^2} + \\
&+ \phi''_{C_1^2}\left(\frac{dC_1}{dx}\right)^2 + 2\phi''_{C_1C_2}\left(\frac{dC_1}{dx}\right)\left(\frac{dC_2}{dx}\right) + \phi''_{C_2^2}\left(\frac{dC_2}{dx}\right)^2 = \\
&= f\left(x; \phi(x, C_1, C_2); \phi'_x(x, C_1, C_2) + \phi'_{C_1}\frac{dC_1}{dx} + \phi'_{C_2}\frac{dC_2}{dx}\right) + \\
&+ F\left(x; \phi(x, C_1, C_2); \phi'_x(x, C_1, C_2) + \phi'_{C_1}\frac{dC_1}{dx} + \phi'_{C_2}\frac{dC_2}{dx}\right).
\end{aligned} \tag{10}$$

Како (10) содржи две произволни функции C_1 и C_2, а има само една равенка за нивно определување, тоа една од големините C_i можеме да ја избираме произволно. Гледаме дека релацијата (3) ќе може да се примени во (10) само ако важи

$$\phi'_{C_1}\frac{dC_1}{dx} + \phi'_{C_2}\frac{dC_2}{dx} = 0, \tag{11}$$

т.е. еден Лагранжов услов. Нека ова биде првиот услов за определување на константите. Со него изводите (8) и (9) многу се упростуваат:

$$y'_x = \phi'_x(x,C_1,C_2) \tag{8'}$$

$$y''_{xx} = \phi''_{xx} + \phi''_{xC_1}\frac{dC_1}{dx} + \phi''_{xC_2}\frac{dC_2}{dx} \tag{9'}$$

така што (10) има многу поедноставен изглед

$$\begin{aligned}\phi''_{xx} + \phi''_{xC_1}\frac{dC_1}{dx} + \phi''_{xC_2}\frac{dC_2}{dx} &= f(x;\phi(x,C_1,C_2),\phi'_x(x,C_1,C_2)) + \\ &+ F(x;\phi(x,C_1,C_2),\phi'_x(x,C_1,C_2))\end{aligned} \tag{10'}$$

и по уважувањето на (3) добиваме:

Теорема I. Доволен услов проблемот на варијација на константите во општа нормална диференцијална равенка од II ред, определен со равенките (1)-(5), да може да се формулира експлицитно, е варијацијата да биде Лагранжова, т.е. за (4) да важи системот

$$\begin{aligned}&\phi'_{C_1}\frac{dC_1}{dx} + \phi'_{C_2}\frac{dC_2}{dx} = 0\\ &\phi''_{xC_1}\frac{dC_1}{dx} + \phi''_{xC_2}\frac{dC_2}{dx} = F(x;\phi(x,C_1,C_2),\phi'_x(x,C_1,C_2)).\end{aligned} \tag{12}$$

Системот (12) е нелинеарен по C_1,C_2, а е линеарен по изводите, и лесно може да се напише во нормален облик. Така добиваме еден, во општ случај, нелинеарен нормален систем

$$\begin{aligned}\frac{dC_1}{dx} &= \Phi_1(x,C_1,C_2)\\ \frac{dC_2}{dx} &= \Phi_2(x,C_1,C_2)\end{aligned} \tag{13}$$

којшто ќе го наречеме резолвентен систем за проблемот на варијација на константите во равенката од II ред. Традиционалната Лагранжова варијација за нехомогени линеарни равенки е очигледно овде содржана како специјален случај. Секоја нормална равенка од II ред $y''=G(x,y,y')$ може да биде третирана во оваа смисла, оти можеме да ставиме $G=f+F$, под претпоставка $y''=f(x,y,y')$ да е квадратурно решлива.

Ако првата равенка (13) ја решиме по C_2, имаме

$$C_2 = \alpha(x,C_1,\frac{dC_1}{dx})$$

и диференцираме

$$\frac{dC_2}{dx} = \alpha'_x + \alpha'_{C_1}\frac{dC_1}{dx} + \alpha'_{C'_1}\frac{d^2C_1}{dx^2}$$

па потоа замениме во втората равенка, имаме

$$\alpha'_x + \alpha'_{C_1}\frac{dC_1}{dx} + \alpha'_{C'_1}\frac{d^2C_1}{dx^2} = \Phi_1(x,C_1,\alpha(x,C_1,\frac{dC_1}{dx})).$$

Оттука добиваме експлицитно решение по најголемиот извод

$$\frac{d^2C_1}{dx^2} = \frac{\Phi_1}{\alpha'_{C'_1}} - \frac{\alpha'_{C_1}}{\alpha'_{C'_1}}\frac{dC_1}{dx} - \frac{\alpha'_x}{\alpha'_{C'_1}} = \psi(x,C_1,\frac{dC_1}{dx})$$

или

$$\frac{d^2C_1}{dx^2} = \psi(x,C_1,\frac{dC_1}{dx}). \tag{14}$$

Бидејќи е сеедно која константа сме ја одбрале, имаме

$$C'' = \psi(x,C,C') \tag{15}$$

или, со „спуштени" индекси, како што е вообичаено во теоријата на групите трансформации,

$$C_2 = \psi(x,C,C_1) \tag{15}$$

каде што уште ќе ставиме $p=C_1=dC/dx$. Оттука следува:

<u>Теорема II</u>. Потребен и доволен услов проблемот на варијација на константите за диференцијална равенка од II ред да има квадратурно решение, т.е. равенката (5) да се реши со решението

(2) на равенката (1), е да важи (12) или, што е исто, квадратурно да се реши системот (13), или соодветната равенка од II ред (14).

Конструкција на проширената група C_2 Ли-еви трансформации.

За равенките од тип (15), кои кратко ќе ги означуваме со E(1,1,2,1), ќе формираме оператор

$$U \equiv \xi(x,C)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,C)\frac{\partial}{\partial C} \tag{16}$$

со коефициенти ξ,η кои формираат една Ли-ева група непрекинати трансформации на точки M од xOC рамнината:

$$M(x,C) \xrightarrow{G_1} M_1(x_1,C_1)$$

каде што

$$x_1 = \xi(x,C), \qquad C_1 = \eta(x,C)$$

и која група $G_1(\xi,\eta)$ е асоцирана на проблемот на варијација на константите (1)-(5). Ќе формираме таканаречено второ продолжение на операторот U:

$$\underset{2}{U} \equiv \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial x} + \eta_1\frac{\partial}{\partial C_1} + \eta_2\frac{\partial}{\partial C_2} \tag{17}$$

каде што $\xi(x,C)$, $\eta(x,C)$ формираат група G_1 која треба да се определи, а η_1 и η_2 зависат од ξ,η на следниов начин:

$$\eta_1 = \eta_x + C_1(\eta_C-\xi_x) - C_1^2\xi_C \tag{18}$$

$$\begin{aligned}\eta_2 = \eta_{xx} &+ C_1(2\eta_{xC}-\xi_{xx}) + C_1^2(\eta_{CC}-2\xi_{xC}) - C_1^3\xi_{CC} + \\ &+ C_2(\eta_C-2\xi_x-3C_1\xi_C)\end{aligned} \tag{19}$$

(види Ajns [6], p.104 и Овсянников [5], p.111) каде што $C_1=C'=p$, $C_2=C''=dp/dx$. Условот на инваријантноста на групата $G_1(\xi,\eta)$ асоцирана на равенката (15) гласи

$$\underset{2}{U}\psi = 0$$

од каде што следува равенката

$$\eta_{xx} + p(2\eta_{xC}-\xi_{xx}) + p^2(\eta_{CC}-2\xi_{xC}) - p^3\xi_{CC} + (\eta_C-2\xi_x-3p\xi_C)\psi = \\ = \xi\partial_x\psi + \eta\partial_C\psi + [\eta_x + p(\eta_C-\xi_x) - p^2\xi_C]\partial_p\psi \tag{20}$$

притоа $\xi(x,C)$ и $\eta(x,C)$ се елементи на групата G_1 (16), а $\xi_x,\xi_C,\eta_x,\eta_C,\xi_{xx},\xi_{xC},\xi_{CC},\eta_{xx},\eta_{xC},\eta_{CC}$ се нивните изводи: $C_1=C'=p$ е извод кој се зема за параметар, а $C_2=\psi(x,C,C_1)=\psi(x,C,p)$. Условот (20) во однос на ψ е линеарна парцијална равенка од I ред. На неа ѝ кореспондира системот обични диференцијални равенки

$$\frac{dx}{\xi(x,C)} = \frac{dC}{\eta(x,C)} = \frac{dp}{\eta_x+p(\eta_C-\xi_x)-p^2\xi_C} = \\ = \frac{d\psi}{\eta_{xx}+p(2\eta_{xC}-\xi_{xx})+p^2(\eta_{CC}-2\xi_{xC})-p^3\xi_{CC}+(\eta_C-2\xi_x-3p\xi_C)\psi} \tag{21}$$

Следува:

Теорема III. За проблемот (1)-(5) на варијација на константите за диференцијалната равенка од II ред да има квадратурно решение, потребно и доволно е да важи условот (20), или што е исто, системот равенки (21) да има барем еден прв интеграл во затворена форма.

Во условот (20) функцијата $C_2=\psi(x,C,p)$, $p=C_1=dC/dx$ е определена со постапката (11)-(15), па (20) е парцијална линеарна равенка од II ред по функциите $\psi(x,C)$ и $\eta(x,C)$, p-параметар. Една од нив може да се избира произволно, со цел (20) да се реши што полесно по втората. Еквивалентниот систем (21), ако е ψ земена за позната: $\psi=\psi(x,C,p)$, претставува систем од 3 диференцијални равенки со 3 непознати функции ξ,η и p, кој ако се реши, ја дава групата $G_1(\xi(x,C,p); \eta(x,C,p))$ во вид на проширување.

Можен е и обратен третман. Ако во (20) се дадени ξ и η, тогаш (20) е равенка за определување на сите ψ, т.е. сите резолвентни равенки (15) кои решаваат некој определен проблем на варијација на константите за равенка од II ред.

Ќе наведеме сега еден пример кој го илустрира овој метод:

Равенката

$$yy'' - y'^2 = 0 \tag{22}$$

е лесно елементарно решлива со разделување на променливите, низ општото решение

$$y = C_2 e^{C_1 x}. \tag{23}$$

Дали со варијација на константите, низ новата функција

$$y = C_2(x) e^{xC_1(x)} \tag{24}$$

може да се реши и некоја од равенките од класата

$$yy'' - y'^2 = F(x,y,y')? \tag{25}$$

Системот равенки што ги определува овие константи, гласи

$$C_2' + xC_2C_1' = 0$$

$$C_2C_2' = -xF(x,y,y')/(e^{xC_1})^2$$

и некогаш тој може да има квадратурно решение:

а) Равенката

$$yy'' - y'^2 = \phi(x)y^2$$

каде што $\phi(x)$ е произволна интеграбилна функција може да се реши со варијација на C_1, C_2 во решението (23) на равенката (22). Општото решение гласи:

$$y = \lambda_2 e^{-\int x\phi(x)dx + x\int\phi(x)dx + \lambda_1 x}$$

λ_1, λ_2 - интеграциони произволни константи.

б) Равенката

$$yy'' - y'^2 = -\frac{y^2}{x}\left[a(x)ye^{-\frac{xy'}{y}} + b(x)\right]$$

каде што $a(x)$, $b(x)$ се произволни интеграбилни функции, има општо решение во вид (24), каде што

$$C_1(x) = -\int \frac{1}{x}\left[\frac{a(x)e^{\int b(x)dx}}{\lambda_1 - \int e^{\int b(x)dx} a(x)bx} + b(x)\right]dx + \lambda_2,$$

$$C_2(x) = \frac{e^{\int b(x)dx}}{\lambda_1 - \int e^{\int b(x)dx} a(x)dx},$$

λ_1, λ_2 - интеграциони константи.

в) Равенката

$$yy'' - y'^2 = A(x)y^2(1+y^2e^{-2xy'/y})$$

каде што $A(x)$ е произволна интеграбилна функција, има општо решение од вид (24); притоа:

$$C_1(x) = \lambda_2 - \int \frac{A(x)dx}{1-\lambda_1 e^{-2\int xA(x)dx}},$$

$$C_2(x) = \sqrt{\lambda_1}\, \frac{e^{-\int xA(x)dx}}{\sqrt{1-\lambda_1 e^{-2\int xA(x)dx}}},$$

λ_1, λ_2 - интеграциони произволни константи.

г) Равенката

$$yy'' - y'^2 = A(x)y^2\left(\frac{1}{y}e^{xy'/y} + ye^{-xy'/y}\right)$$

има општо решение (24), каде што

$$C_1(x) = \int \frac{2A(x)}{x\cdot \sin 2(\lambda_1 - \int xA(x)dx)} + \lambda_2,$$

$$C_2(x) = tg(\lambda_1 - \int xA(x)dx).$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

[1] Д.Димитровски, Б.Илиевски: За можностите на обопштување на методата на Лагранж на варијација на константите; Математички Билтен; Сојуз на Друштвата на математичарите на СРМ; кн. I (27); стр. 37-49; Скопје, 1978

[2] Д.Димитровски, Е.Атанасова: Нелагранжова варијација на константите во линеарната диференцијална равенка од II ред; Математички Билтен на СРМ; книга 5-6 (XXXI-XXXII); стр. 5-15; Скопје, 1981-82

[3] D.S.Mitrinović, J.D.Kečkić: Complements au traite de Kamke: XIV, Application of the variation of parameters method to nonlinear second order differential equations. Univ. Belgrade Publ. Electrotech. Fac., 544, Ser. Mat.-Fiz., N^{o} 544-576 (1976), 3-7

[4] В.А.Дородњицин, Г.Г.Еленин: Симетрия в уравнениях математической физики, Знание, Москва, 1984

[5] Л.В.Овсянников: Групповий анализ дифференциальных уравнений, Москва 1978, изд. Наука

[6] L.I.Ince: Ordinary differential equations, Pergamon Press, N.Y., 1956

LE PROBLEME GÉNÉRAL DE LA VARIATION DES CONSTANTES DANS L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE NORMALE DU SECOND ORDRE

Dragan Dimitrovski, Stana Cveić

R É S U M É

Le methode de Lagrange traditionel de la variation des constantes étant valable seulement pour les équations linéaires; nous démontrons ici que la meme idée peut etre employée aussi sur les équations arbitraires (1) du second ordre. Les conditions nécessaires et suffisantes pour avoir la solution par quadratures sont données avec la construction d'un groupe de Lie (17), avec (18) et (19), ou (20), (21). Une large application est possible. Quelques éxemples suivent les démonstrations des théoremes, se rapportant a la solution par C_1, C_2 du systeme (12).