Математички Билтен
11-12 (XXXVII-XXXVIII)
1987-1988 (13-22)
Скопје, Југославија

ЗА ФИЗИЧКАТА СМИСЛА И ТЕХНИЧКОТО ЗНАЧЕЊЕ НА АРЕОЛАРНИТЕ ЛАПЛАСОВИ ТРАНСФОРМАЦИИ

Драган Димитровски, Милоје Рајовиќ

Вовед. Во трудовите [1], [2] ја третиравме ареоларната Лапласова равенка

$$(a_0(z)\bar{z}+b_0(z))\frac{\partial^2 W}{\partial\bar{z}^2} + (a_1(z)\bar{z}+b_1(z))\frac{\partial W}{\partial\bar{z}} + (a_2(z)\bar{z}+b_2(z))W = 0$$

каде што $a_i(z)$, $b_i(z)$, $i=0,1,2$ се аналитични функции од комплексната променлива $z=x+iy$, а $\bar{z}=x-iy$ конјугирано комплексна променлива, и покажавме дека таа има решение во вид на линискиот интеграл

$$W = \int_{\Gamma(\zeta)} e^{\bar{z}\zeta}(\zeta-\zeta_1)^A(\zeta-\zeta_2)^B d\zeta$$

каде што контурата $\Gamma(\zeta)$, ζ_1, ζ_2, $A(z)$ и $B(z)$ зависат на определен начин од $a_i(z)$, $b_i(z)$.

Ова не наведе на идеја да определиме ареоларна Лапласова трансформација, и тоа во повеќе чекори:

-оригиналот да е реална функција од реална променлива

$$L(F(t)) = \int_0^{+\infty} e^{-\bar{z}t}F(t)dt = f(\bar{z})$$

-оригиналот да е комплексна аналитична функција

$$L(F(z)) = \int_{\Gamma(\zeta)} e^{\bar{z}\zeta}F(\zeta)d\zeta$$

-оригиналот да е функција од две комплексни променливи

$$L(F(\zeta,z)) = \int_{\Gamma(\zeta)} e^{\bar{z}\zeta}F(\zeta,z)d\zeta = \Phi(z,\bar{z}).$$

Притоа очекуваме како аналогии, така и разлики кои би значеле обопштување.

Дефиниција. Нека t е позитивна реална променлива, z комплексен број: $z=x+iy$, со $Re(z)=x > 0$; а $F(t)$ нека е зададена реална функција од реална променлива t, така што следниот подолу даден интеграл постои. Под Лапласова трансформација на функцијата $F(t)$ ја подразбираме комплексната функција $f(z)$ којашто се добива со решавањето на интегралот

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-zt}F(t)dt = f(z) \tag{1}$$

Основна особина на оваа Лапласова трансформација $f(z)$ е таа да е функција по z, аналитична во десната полурамнина $Re(z) = x > 0$.

Аналогно, под ареоларна Лапласова трансформација ќе ја подразбираме функцијата $f(\overline{z})$ дефинирана со определениот интеграл

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-\overline{z}t}F(t)dt = f(\overline{z}), \tag{2}$$

очекувајќи слични својства за $f(\overline{z})$. Се поставува прашање за оправдување од воведувањето на овој поим, низ следните основни проблеми:

-физичкото значење и смисла на ареоларната Лапласова трансформација,

-егзистенција на трансформацијата,

-оперативни својства,

-примена и пракса.

На сето ова не може да се одговори веднаш. Да го сториме тоа постепено.

Физичка смисла на ареоларната Лапласова трансформација.

Кога се воведува некој нов поим, обично несвесно се настојува тој поим да се спореди со некој очевиден, прегледен поим. Ќе покажеме низ просто расудување дека таквата можност и тука постои.

Да тргнеме од реалната анализа, од сосема добро познатото разложување на функцијата $F(x)$, определена во конечниот интервал $-\pi \le x \le +\pi$, во Фурие-ов ред,којшто, како што е општо прифатено во физиката, го даваме во комплексен облик

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{inx} \tag{3.1}$$

Коефициентите на овој ред се викаат <u>коефициенти на Фурие</u>, и тие се задаваат, како што е познато, со формулата

$$c_n = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) e^{-inx} dx \tag{3.2}$$

Ако функцијата $F(x)$ задоволува некои многу општи услови, на пример ако таа се состои од конечен број непрекинати и монотони делови, тогаш редот (3.1) конвергира, и поради тоа и навистина ја претставува функцијата $F(x)$. (Во точките на прекин, каде што левата и десната гранична вредност на $F(x)$ не се совпаѓаат, редот на Фурие дава средна вредност на тие гранични вредности, значи

$$\frac{1}{2}(F(x_o-0) + F(x_o+0)).$$

Формулата (3.1) можеме прегледно да ја толкуваме како <u>разложување на функцијата $F(x)$ на збир од хармониски осцилации со целобројни агловни фреквенции $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$</u> .

Коефициентите c_n определуваат <u>амплитуда и фаза на одделните осцилации</u>. Според формулата (3.2) коефициентите c_n во општ случај се комплексни броеви

$$c_n = \rho_n e^{-in\phi_n}, \quad (\rho_n \geq 0)$$

Тогаш n-тиот член во редот (3.1) гласи

$$\rho_n . e^{in(x-\phi_n)}$$

и на него реално му одговара осцилацијата со амплитуда ρ_n и фазно поместување ϕ_n.

Севкупноста на сите коефициенти c_n се вика <u>спектар на функцијата</u> $F(x)$, т.е. множеството c_n покажува какви сѐ хармониски осцилации влегуваат во составот на функцијата $F(x)$, и кои се амплитудите и фазните поместувања на овие осцилации. Така го имаме и заклучокот:

Спектралната низа на функцијата $F(x)$ е определена со интегралот (3.2). Познавањето на коефициентите c_n наполно го заменува познавањето на функцијата $F(x)$, бидејќи таа може да биде конструирана кога се познати c_n со помош на формулата (3.1).

Во физиката и примените, основна променлива е времето t. Поради својата суштинска природа, тоа се менува не на конечен интервал, туку на бесконечен. Како што е познато, во тој случај редот на Фурие треба да се замени со интегралот на Фурие:

$$F(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{iyt}dy \qquad (4.1)$$

(кадешто, наместо променливата x сме ставиле време t). Функцијата f(y), којашто се наоѓа под знак на интегралот, се определува со F(t) од формулата:

$$f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t)e^{-iyt}dt \qquad (4.2)$$

Формулите (4.1) и (4.2) по својата структура се слични со (3.1) и (3.2) само, наместо целобројниот индекс n, кој минува само низ целите вредности, во (4.1-2) фигурира непрекината променлива y, која непрекинато минува некој бесконечен пат. Поради тоа и збирот (3.1) се заменува со интеграл; - дискретните операции се заменуваат со непрекинати. Ова значи дека функцијата F(t) повеќе не е можно да се конструира само со помош на целобројните аглови фреквенции; сега за нејзината конструкција требаат хармониски осцилации на сите можни фреквенции.

Спектарот на функцијата F(t), т.е. севкупноста на амплитудите и фазните поместувања на секоја осцилација, се определува со формулата (4.2), и затоа функцијата f(y) се вика спектрална функција за функцијата F(t). Исто како пред малку, како што спектралниот низ c_n наполно ја определува функцијата F(x), така и сега спектралната функција f(y) наполно ја определува функцијата F(t), бидејќи последнава може да се конструира со формулата (4.1).

Меѓутоа, во оваа тукушто поставена аналогија од формална природа меѓу посматрањето на функцијата во конечен и во бесконечен интервал, се кријат многу тешкотии и опасности. Имено, интегралот (3.2) којшто ја определува спектралната низа секогаш постои (под услов функцијата F(x) да е интеграбилна на $[-\pi,\pi]$), а интегралот (4.2), којшто ја определува спектралната функција, има смисла само во случај, кога функцијата F(t) има такво поведение во бесконечноста, што интегралот да конвергира.

Познато е дека таква конвергенција престанува при многу, и притоа најпрости и најчесто сретнувани елементарни функции, како на пример при $F(t)=\mathrm{const}$, $F(t)=\exp(i\omega t)$.

Но оваа тешкотија може да се отстрани. Пред малку ние молчешкум препоставивме дека времето t се менува во интервалот $(-\infty,+\infty)$. Меѓутоа, во практични услови и околности, одвај понекогаш може да се има работа со $t < 0$, а уште помалку кога времето t се менува од $-\infty$ до $+\infty$. Обично некој процес почнува во определениот временски момент, на пример за $t=0$, и потоа продолжува некое подолго време, теоретски до $t=+\infty$. Според тоа, во практичните задачи имаме работа со временскиот интервал $0 \le t < +\infty$, значи само со <u>еднострани временски интервали</u>. Но овој случај може да биде вклучен во случајот на двостраниот бесконечен интервал $(-\infty,+\infty)$, ако земеме функцијата F(t) да е рамна на нула за сите $t < 0$. Тогаш за долната граница на интегралот (4.2) треба да се земе нула, и добиваме

$$f(y) = \int_0^{+\infty} e^{-iyt}F(t)dt \tag{5.1}$$

при што интегралот на Фурие сега ќе биде

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iyt}f(y)dy = \begin{cases} F(y), & t > 0 \\ 0, & t \leqslant 0 \end{cases} \tag{5.2}$$

Ако вака го разделиме двостраниот интервал на два еднострани, но со определен знак, ние сега можеме да ги елиминираме погоре набросните тешкотии околу изборот на F(y), за интегралите да конвергираат. Имено, заедно со функцијата F(t), да ја посматраме уште и функцијата

$$e^{xt}F(t), \text{ за } x < 0$$

кадешто x е некој нов параметар, и да формираме за оваа функција, по познатите закони, спектрална функција која ќе зависи од x. Ако неа поради ова ја означиме со $f_x(y)$, ќе имаме

$$f_x(y) = \int_0^{+\infty} e^{-iyt}\left[e^{xt}F(t)\right]dt \tag{6.1}$$

Очигледно, поради многу брзото опаѓање на функцијата e^{xt}, за $x < 0$ и $t \to +\infty$, интегралот (6.1) конвергира за секоја ограничена функција F(t), дури и за растечка функција кон бескрајноста од ред $e^{\alpha t}$ $(\alpha > 0)$, ако земеме да е $x < -\alpha$. Значи, воведувајќи ја функцијата $e^{xt}\cdot F(t)$, $x < 0$ наместо функцијата $F(t)$, ние ја отклонуваме дивергенцијата на интегралот (4.2), скоро за сите функции што ги сретнуваме во праксата.

Така, наместо формулата (5.2), ја добиваме сега следнава формула

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iyt} f_x(y)\,dy = \begin{cases} e^{xt}F(t), \text{ за } t > 0,\ x < 0 \\ 0, \text{ за } t < 0 \end{cases} \tag{6.2}$$

Да ги препишеме сега формулите (6.1) и (6.2) во малку изменет облик

$$\int_{0}^{+\infty} e^{(x-iy)t} F(t)\,dt = f_x(y).$$

Ако (6.2) ја помножиме со e^{-xt}, ќе добиеме

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(-x+iy)t} f_x(y)\,dy = \begin{cases} F(t), & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

или

$$\int_{0}^{+\infty} e^{(x-iy)t} F(t)\,dt = f_x(y), \quad x < 0 \tag{7.1}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-iy)t} f_x(y)\,dy = \begin{cases} F(t), & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \tag{7.2}$$

Гледаме дека променливите x и y влегуваат во овие формули само во комбинацијата

$$x - i\cdot y$$

Значи, сама по себе и сама од себе, овде се јави самата конјугирано комплексна променлива $\bar{z}$. Ако означиме на вообичаен начин

$$x - i\cdot y = \bar{z}$$

тогаш од (7.1) е очигледно дека $f_x(y)$ зависи само од таа комплексна променлива. Затоа е полезно да се воведе означувањето

$$f_x(y) = f(x-iy) = f(\bar{z})$$

На крајот, променливата $\bar{z}$ треба да се воведе не само во (7.1), туку и во (7.2) во својство на променлива по која се интегрира.

Бидејќи во формулата (7.2) y се менува од $-\infty$ до $+\infty$, следува дека $\bar{z}=x-i\cdot y$ ќе се менува од $x-i\cdot\infty$ до $x+i\cdot\infty$. Бидејќи параметарот x е помал од 0, ние во секој посебен случај x ќе го сметаме за непроменлив, па на покажаната промена на променливата $\bar{z}$ ќе и одговара во комплексната рамнина транслација вдолж вертикалната права со апсциса $x<0$. Поради тоа што при $x=\text{const}$ важи $d\bar{z}=0-idy$, формулите (7.1) и (7.2) можеме да ги препишеме во следнава дефинитивна форма:

$$\int_{0}^{+\infty} e^{\bar{z}t}F(t)\,dt = f(\bar{z}) \tag{8.1}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{x-i\cdot\infty}^{x+i\cdot\infty} e^{-\bar{z}t}f(\bar{z})\,d\bar{z} = \begin{cases} F(t), & t>0,\ x<0 \\ 0, & t<0 \end{cases} \tag{8.2}$$

Интегралот во формулата (8.1) претставува <u>интеграл на Лаплас по конјугиран параметар</u> (т.е. по $\bar{z}$). Изводот по овој параметар $\bar{z}$ се вика <u>ареоларен извод</u>. Разликата во знакот меѓу (2) и (8.1) е поради различниот знак $\mathrm{Re}(\bar{z})=x$. Во (2) важи $x>0$, а во (8.1) важи $x<0$. Ние интегралот (8.1) скратено ќе го наречеме <u>ареоларен интеграл на Лаплас</u>, и со него ќе се занимаваме во извесен број трудови.

Од сето погоре речено следува <u>физичката смисла</u> на ареолатниот (т.е. конјугираниот) интеграл на Лаплас:

<u>Ако во функцијата $f(\bar{z})$, определена со интегралот на Лаплас (8.1), $\bar{z}$ ја третираме како конјугирано комплексна променлива: $\bar{z}=x-i\cdot y$, тогаш $f(\bar{z})=f(x-iy)$ ќе биде спектралната функција во однос на амортизационата функција на времето $e^{xt}\cdot F(t)$, $(x<0)$, за којашто како фреквенција се јавува променливата y</u>.

Функцијата од времето $F(t)$ можеме да ја конструираме со помош на спектралната функција $f(\bar{z})$ по формулите (8.2). Меѓутоа, ако се има предвид разложувањето на функцијата $F(t)$ на осцилации, тогаш треба да се користи формулата (7.2). Точно во присутноста на амортизациониот множител e^{xt}, $x<0$, и во слободата на изборот на параметарот x, се состои <u>предноста на интегралот на Лаплас во однос на интегралот на Фурие</u>, при кој се посматра <u>само една</u> функција $F(t)$ заедно со својата спектрална функција.

Така, до ареоларната Лапласова трансформација (во едно-димензионалниот случај до конјугирано-комплексната Лапласова трансформација) доаѓаме на потполно природен начин, проучувајќи некое множество осцилации кои определуваат некој сложен хармониски процес.

<u>Врска со обичната Лапласова трансформација, исто така еднодимензионална</u>

Важно е да се напомене дека и обичната Лапласова трансформација (1) се раѓа на потполно ист начин како и ареоларната, со исти коментар.

Нека сите формули (3.1), (3.2), (4.1), (4.2), (5.1) и (5.2) важат. Натаму, при делбата на двостраниот интервал $(-\infty,+\infty)$ на два еднострани, ако земеме независен параметар $x>0$, конвергенцијата на интегралот ќе ја обезбедиме со избор на функцијата

$$e^{-xt}\cdot F(t) \text{ за } x>0$$

Така, следните аналогни формули (да ги означиме со (*)) гласат:

$$f_x(y) = \int_0^{+\infty} e^{-iyt}\left[e^{-xt}F(t)\right]dt \tag{6.1*}$$

и

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iyt}f_x(y)\,dy = \begin{cases} e^{-xt}F(x), & t>0 \\ 0, & t<0 \end{cases} \tag{6.2*}$$

или

$$f_x(y) = \int_0^{+\infty} e^{-(x+iy)t}F(t)\,dt \tag{7.1*}$$

и ако (6.2*) ја помножиме со е

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(x+iy)t}f_x(y)\,dy = \begin{cases} F(t), & t>0 \\ 0, & t<0 \end{cases} \tag{7.2*}$$

И сега, со изборот на параметарот $x>0$, се јавува <u>сама по себе, обичната комплексна променлива</u>

$$z = x + iy \text{ за } x>0$$

и функцијата од неа

$$f_x(y) = f(x+iy) = f(z)$$

на што одговара слика на појавата <u>десно</u> од y-оската (за $x>0$).

Така го имаме дефинитивниот облик на традиционалната Лапласова трансформација.

$$\int_0^{+\infty} e^{-zt}F(t)dt = f(z) \tag{8.1*}$$

$$\int_{x-i\cdot\infty}^{x+i\cdot\infty} e^{zt}f(z)dz = \begin{cases} F(t), & t>0 \\ 0, & t<0. \end{cases} \tag{8.2*}$$

Заклучок. Гледаме дека трансформациите

$$\int_0^{+\infty} e^{\bar{z}t}F(t)dt$$

и

$$\int_0^{+\infty} e^{-zt}F(t)dt$$

се едно исто, и дека само ги одделува предзнакот на реалниот дел x. Тој нив и ги разликува. Кај првата е $x<0$, и процесот е во левата полурамнина, а кај другата е $x>0$, и процесот е во десната полурамнина. Ако тие процеси се посматраат одделно, и ако уште ги воведеме трансформациите

$$\int_0^{+\infty} e^{-\bar{z}t}F(t)dt = f(-\bar{z}),\ x>0$$

и

$$\int_0^{+\infty} e^{zt}F(t)dt = f(-z),\ x<0,$$

тогаш е сеедно кои соодветни трансформации ќе ги користиме во посебни практични случаи од физиката и техниката.

Меѓутоа, ако некои сложени процеси се одвиваат и за $x>0$ и за некое друго $x<0$, тогаш трансформациите:

Лапласовата:

$$\int_0^{+\infty} e^{-zt}F(t)dt = f(z)$$

и ареоларната:

$$\int_0^{+\infty} e^{\bar{z}t}F(t)dt = f_1(\bar{z})$$

се различни и секоја има свое значење.

Значи, ареоларната Лапласова трансформација, барем во еднодимензионалниот случај, доаѓа до израз најмногу при напоредни проблеми.

Побитни разлики можат да се очекуваат при дводимензионалните ареоларни Лапласови трансформации

$$\int_{\Gamma(\zeta)} e^{\overline{z}\zeta} F(\zeta, z)\, d\zeta = \Phi_1(\overline{z}, z)$$

во споредба со обичната дводимензионална трансформација на Лаплас:

$$\int_{\Gamma(\zeta)} e^{z\zeta} F(\zeta)\, d\zeta = \Phi_2(z)$$

што треба посебно да се проучи.

ЛИТЕРАТУРА

[1] D.Dimitrovski, B.Ilievski: L'équation différentielle aréolaire de Laplace et sur la possibilité de l'introduction des transformations de Laplace aréolaires, Matematički radovi Kosova (Punime matematike), No 1, 1986, 17-35

[2] D.Dimitrovski: Sur quelques équations différentielles aréolaires linéaires spéciales du II ordre. Matematički Vesnik SR Srbije, t. 38, Beograd 1986, 417-424. (Communiqué au Sympose Intern. de l'Analyse Complexe, Budva, Yougoslavie, 1986)

[3] G.Djoč: Rukovodstvo k praktičeskomu primeneniju preobrazovanija Laplasa. Fizmatgiz, Moskva, 1958

SUR LE SENS PHYSIQUE ET L'IMPORTANCE TECNIQUE DES TRANSFORMACIONS DE LAPLACE ARÉOLAIRES

Dragan Dimitrovski et Miloje Rajović
La Faculté des Sciences, l'Université de Skopje et Prishtina

Résumé

Le rôle de la variable conjuguée $\overline{z}$ et l'importance des fonctions anti-analytiques $\overline{f}$, les fonctions analytiques d'un variable conjugue f $(\overline{z})$, les fonctions bianalytiques de Goursat, les fonctions généralisées analytiques de Bers, Položii et Vekua, étant bien connues, les auteurs essaient d'introduire la transformation de Laplace aréolaire, c'est a dire par rapport à $\overline{z}$. En employant 70% du matiere connu sur les transformation de Laplace, dans 30% du texte ils trouvent une liaison et analogie parmisces deux transformations. Dans le cas d'une dimension la formule

$$\overline{L(F(z))} = L_A(F(z))$$

étant demontrée (L_A - transformation de Laplace aréolaire), on donne une explication physique de cet appareil mathématique, ouvrant le chemin dans le cas de plusiers dimensions.