ЛИНЕАРНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ СВОДЛИВИ НА ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ ОД ПОНИЗОК РЕД

Драган С. Димитровски, Петар Р. Лазов

1. Предмет на овој труд е линеарната диференцијална равенка

$$\sum_{j=0}^{m}\left\{\sum_{\mu=\max(k-j,0)}^{\min(n-j,k)}\ \sum_{i=\mu}^{k}\binom{k}{i}\binom{i}{\mu}\psi^{[k-i]}f_{j+\mu-k}^{(i-\mu)}\right\}y^{(n-j)}=0 \tag{1}$$

$m=2,3,\dots;\ 1\leq k<n,$

каде што изразите $\psi^{[\ell]}$ се определени со рекурентните релации

$$\psi^{[\ell]}=f_m\psi^{[\ell-1]}+\left(\psi^{[\ell-1]}\right)',\quad \psi^{[0]}=1, \tag{2}$$

а $f_0, f_1, f_2, \dots\dots\dots, f_{m-k}, f_m$ -произволни k -пати диференцијабилни функции од x ($f_0\neq 0$). Ќе покажеме дека решавањето на равенката (1) се сведува на решавање на линеарната равенка

$$\sum_{i=0}^{n-k} f_i\, y^{(n-k-i)}=P_{k-1}\exp\left(-\int f_m\,dx\right), \tag{3}$$

каде што $P_{k-1}(x)=\sum_{\nu=0}^{k-1}c_{\nu+1}x^{\nu}$, а c_ℓ ($\ell=\overline{1,k}$)-произволни константи. Притоа општиот интеграл на (1) е определен со општиот интеграл на равенката (3).

2. Равенката (3) може да се напише како

$$L\equiv u\sum_{i=0}^{n-k} f_i\, y^{(n-k-i)}=P_{k-1}, \tag{4}$$

каде што

$$u=\exp\left(\int f_m\,dx\right). \tag{5}$$

Изводите на изразот (5) ќе ги дефинираме како

$$u^{(\ell)}=\psi^{[\ell]}u. \tag{6}$$

Врз основа на (6) непосредно се добиваат релациите (2).

Ако равенката (4) ја диференцираме k пати, се добива $L^{(k)}=0$.

Од друга страна

$$L^{(k)}=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}u^{(k-i)}\sum_{\ell=0}^{n-k}\left(f_\ell\, y^{(n-k-\ell)}\right)^{(i)}=\sum_{i=0}^{k}\sum_{\ell=0}^{n-k}\sum_{j=0}^{i}\binom{k}{i}\binom{i}{j}u^{(k-i)}f_\ell^{(i-j)}y^{(n-k-\ell+j)}.$$

Со промена на сумирањето, последниот израз станува

$$L^{(k)}=\sum_{\mu=k}^{n}\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=j}^{k}\binom{k}{i}\binom{i}{j}u^{(k-i)}f_{\mu-k}^{(i-j)}y^{(n-\mu+j)}=$$

$$=u\sum_{j=0}^{n}\left\{\sum_{\mu=\max(k-j,0)}^{\min(n-j,k)}\ \sum_{i=\mu}^{k}\binom{k}{i}\binom{i}{\mu}\psi^{[k-i]}f_{j+\mu-k}^{(i-\mu)}\right\}y^{(n-j)},$$

па равенката $L^{(k)}=0$ всушност е равенката (1).

Од начинот на кој ја добивме равенката (1) следи дека нејзиниот општ интеграл е определен со општиот интеграл на равенката (3), и тој содржи n произволни константи.

3. За $k=1$ решавањето на соодветната равенка од типот (1) се сведува на решавање на линеарна диференцијална равенка од ($n-1$)-ти ред. Овој резултат е добиен во [1].

За $k=n-1$ решавањето на соодветната равенка од типот (1) се сведува на решавање на линеарна диференцијална равенка од прв ред т.е. на пресметување на квадратури. Овој резултат го имаме добиено во [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. И.А.Шапкарев:Годишен Зборник на ЕМФ,Скопје,Кн.4,1970,5-9.

2. П.Р.Лазов,Д.С.Димитровски:Билтен на ДМФ од СРМ,Кн.XXV,1974,45-46.

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, СВОДИМЫЕ К ЛИНЕЙНЫМ УРАВНЕНИЯМ БОЛЕЕ НИЗКОГО ПОРЯДКА

Р Е З Ю М Е

В этой работе показывается, что решение линейного дифференциального уравнения (1) сводится к решению уравнения (3). При этом для $k=1$ вытекает результат получен в [1], а для $k=n-1$ результат получен в [2].