

АНАЛИТИЧКА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА РАВЕНКА НА РАСТЕЊЕТО И ОБОПШТЕНИТЕ ЗАКОНИ НА МАЛТУС

Лав ЛОЗИНСКИ, Драјан ДИМИТРОВСКИ

Математичките модели на растењето во биологијата обично се претставени во вид на диференцијални равенки или системи равенки од прв ред со најразлично моделирани десни страни на равенките. Решенијата на тие равенки се јавуваат како закони на растењето на определената популација. Еден сумарен преглед на многубројните модели на растењето нè доведува до заклучок дека сите тие имаат многу заеднички особини, коишто би биле многу полезни ако би се формулирале на соодветен начин. Во овој труд ќе биде прикажано следното: ако математичкиот модел на растењето е една аналитичка диференцијална равенка, тогаш за текот на растењето секогаш може да се најде една мајорантна ограничена функција, а решението на равенката е задолжително ограничено со еден супремум којшто зависи само од суштинските биолошки карактеристики на моделот. Освен тоа, ако се апстрахираме од конкретните модели, во аналитички случај тие можат секогаш да се сопостават со една компаративна равенка на Бернули, која е аналогна на добро познатиот модел на Берталанфи-Питер. На таков начин сите видови на растењето, општо зборувајќи, можат да се сведаат на класичните резултати на логистичката теорија на Волтера, Ферхилст и Малтус.

Приложената табела содржи краток преглед на моделите на растењето и наведува на некои обопштени заклучоци. Не земајќи го во предвид биолошкото потекло на моделот, заедничко за сите нив, се јавува следното:

1. Сите имаат облик на диференцијална равенка од I ред

$$(1) - (11) \quad \frac{dx}{dt} = f(t, x).$$

2. Десната страна на равенката, т. е. функцијата $f(t, x)$ е аналитичка со две независни променливи.

Без оглед на суштинското значење на овие констатации за општата анализа на равенката ние ништо слично во доступната литература не најдовме. Единствено кај Lottka, [21], [22] сретнавме идеја за развиток во редот, и тоа само за тој случај кога десната страна е функција само од една променлива:

$$(12) \quad \frac{dx}{dt} = F(x) = ax + bx^2 + cx^3 + \dots$$

Задржувајќи се на членовите од прв, втор или трет ред, ние ги добивме моделите број [1], [2] или [5]. Истата процедура се предлага и во монографијата [16], на страна 89, но не е доволно разработена.

Ние овде ќе покажеме дека овој приод дава обопштени резултати.

Ќе минеме сега кон анализа на општата равенка и кон основна идеја за оценка на решенијата со помош на диференцијалните неравенки. Врз основа на приложениот табеларен преглед, поткрепен со монографиите [9], [12] и [13], ќе сметаме дека во основниот модел [12] десната страна на равенката е аналитичка функција од своите аргументи. Како во тој случај за функцијата $f(t, x)$ важи Тајлоровото разложување

$$(13) \quad f(t, x) = f(0,0) + \frac{\partial f_0}{\partial x} x + \frac{\partial f_0}{\partial t} t + \frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2} x^2 + 2 \frac{\partial^2 f_0}{\partial x \partial t} xt + \frac{\partial^2 f_0}{\partial t^2} t^2 + \dots + \frac{\partial^{m+n} f_0}{\partial x^m \partial t^n} x^m t^n, + \dots,$$

и како овде коефициентите во вид на парцијални изводи се јавуваат како константи, тоа ја имаме следната диференцијална равенка од I ред

$$(14) \quad \frac{dx}{dt} = f_0(t) + f_1(t)x + f_2(t)x^2 + \dots + f_n(t)x^n + R_n(x, t),$$

каде коефициентите се некои аналитички функции од времето t . Ако остаточниот член го напишеме во Лагранжева форма

Број на моделот	Модел (равенка)	Име на моделот (автор)	Решение	Литература
(1)	$\frac{dx}{dt} = kx$	Малтус	$x = x_0 e^{kt}$	[1]
(2)	$\frac{dx}{dt} = kx - \lambda x^2$	Ферхилст	$x = \frac{k \lambda}{1 + a e^{-kt}}$	[2], [3]
(3)	$\frac{dx}{dt} = -k(A - x)$	Веб (рав. на огр. раст.)	$x = A - B e^{-kt}$	[4], [5]
(4)	$\frac{dx}{dt} = f(t) = k_1 t + k_2 t^2 + \dots$	Перл — Рид	$x = \int f(t) dt$	[5]
(5)	$\frac{dx}{dt} = kx(A - x) [k_1 t + k_2 t^2 + \dots + k_n t^n]$	Робертсон	$x = d + \frac{A}{1 + m e^{k_1 t} + k_2 t^2 + \dots + k_n t^n}$	[7], [9]
(6)	$\frac{dx}{dt} = V \cdot x^{2/3} - kx^1$	Шмалгаузен	Можно квадратурно решение	[11]
(7)	$\frac{dx}{dt} = k \cdot \frac{1}{2t+1} \cdot x$	Глајзер	„	[14]
(8)	$\frac{dx}{dt} = x \sqrt{k^2 + 2 ark(x_0 - x)}$	Хиншелвуд	„	[15], [16]
(9)	$\frac{dx}{dt} = a_1 x^{b_1} - a_2 x^{b_2}$	Бергалафи — Питер	Понекогаш квадратурно решение	[17], [18]
(10)	$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_1 (\varepsilon_1 - \lambda_1 x_1) \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_2 (-\varepsilon_2 + \lambda_2 x_1) \end{aligned} \right\}$	Волтера	Функции на Гомперц за $\lambda_1 \approx 0, x \approx A e^{kx} (-\exp(-t))$	[19]
(11)	$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{\alpha x_1}{1 + x_2^2} - x_1 + \mu x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= \beta_1 x_1 - (\beta_2 + \mu_2) x_2 \end{aligned} \right\}$	В. Г. Назаренко		[20]

$$R_n(x, t) = f^{(n)}(\theta_n) \cdot \frac{x^n}{n!},$$

тоа поради ограниченоста на сите изводи од f по t , а исто така и поради аналитичноста на f , ќе важат ограничувањата на сите коефициенти:

$$(15) \quad -a_i < f_i(t) < +a_i; \quad \left| f^{(n)}(\theta_n) \right| < M.$$

Ако пак сега, потпирајќи се на лемата на Чаплигин, во која се зборува: ако во равенките

$$\frac{dx_1}{dt} = F_1(t, x_1), \quad \frac{dx}{dt} = F(t, x), \quad \frac{dx_2}{dt} = F_2(t, x)$$

важи

$$F_1(t, x_1) < F(t, x) < F_2(t, x_2)$$

во некоја заедничка област на tox -рамнината, каде F_1, F, F_2 задоволуваат еден ист почетен услов, тогаш и за соодветните решенија на равенките ќе важи:

$$(16) \quad x_1(t) < x(t) < x_2(t).$$

Бидејќи меѓу f_i постојат и позитивни и негативни функции, тогаш очигледно е потребно мајорантни или минорантни равенки за (12) и (14) да се бараат врз основа на (15), помеѓу равенките:

$$(17) \quad \frac{dx}{dt} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n,$$

каде a_i се јавуваат како позитивни или негативни меѓи за коефициентите со произволна можна точност.

Оваа идеја за анализа на равенката (17) ќе биде основна за натамошните изведувања.

Ако сакаме да изведеме некои биолошки заклучоци, тогаш во (17) ќе биде потребно да се изврши соодветна конкретизација на коефициентите. Тоа ќе го изведеме постепено.

Прво ќе го проанализираме растењето со отпори и соодветната мајорантна равенка на Бернули. Земајќи го во предвид знакот, коефициентите во равенката (17) ќе ги наречеме коефициенти на растење или на стимул ако е $a_i > 0$, и коефициенти на отпор ако е $a_i < 0$. Отпрвин ќе посматраме една варијанта во равенката (17), во која природниот експоненцијален раст се регулира со коефициентот k , а различни отпори се мерат со коефициентите: $-a_1, -a_2, -a_3, \dots, -a_n$:

$$(18) \quad \frac{dx}{dt} = kx - a_1 x - a_2 x^2 - a_3 x^3 - \dots - a_n x^n.$$

Очигледно е дека оваа равенка во себе го содржи Малтусовиот и Ферхилстовиот модел. Таа во принцип може да се реши со помош на квадратури, но резултатот во имплицитен облик е тешко читлив за биологот поради неговата комплицирана форма. Затоа, ние ќе ползуваме метода на оценка на решението. Ако се посматра растењето $x(t) > 1$, што е природно, од неравенството $x^k > x^1$ добиваме $-a_k x^k \leq -a_k x$, а за десната страна на равенката (18) ја имаме мајорантата:

$$f_1(t, x) = kx - a_1 x - a_2 x^2 - \dots - a_n x^n < (k - a_1 - a_2 - \dots - a_{n-1})x - a_n x^n.$$

На тој начин ќе го имаме следното мајорантно равенство од типот на Бернули:

$$(19) \quad \frac{dx}{dt} = Ax - a_n x^n, \quad A = k - a_1 - a_2 - \dots - a_{n-1},$$

коешто, како што е познато во елементарната теорија, може да се реши со смената $Z = x^{1-n}$. Неговото решение гласи:

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt[n-1]{Ce^{-A(n-1)t} + \frac{a^n}{A}}}$$

каде интеграциската константа ќе ја определиме од почетните услови:

$$t = 0, \quad x(t = 0) = x_0$$

и тогаш добиваме:

$$(20) \quad x(t) = \frac{1}{\sqrt[n-1]{\left(\frac{1}{x_0^{n-1}} - \frac{a_n}{A}\right)e^{-A(n-1)t} + \frac{a_n^n}{A}}}$$

Тоа решение има важни особини. Кога $t \rightarrow \infty$; $\exp\{-A(n-1)t\} \rightarrow 0$ и бројноста

$$x(t) \rightarrow \sqrt[n-1]{\frac{A}{a_n}},$$

т. е.

$$(21) \quad x(t) \leq \sqrt[n-1]{\frac{k - a_1 - a_2 - \dots - a_{n-1}}{a_n}}.$$

Така можеме да го формулираме следниот обопштен Малтусов закон:

Ако коефициентот на природното растење k е поголем од збирот на коефициентите на сите отпори: $k > a_1 + a_2 + \dots + a_n$, тогаш растењето не може да се зголеми до бесконечност, и тоа во секој случај ќе остане ограничено со еден суфремум, еднаков на $n-1$ -корен од количникот меѓу коефициентот на природното растење намален за збир од коефициентите на сите отпори до ред $n-1$, со коефициентот на најголемиот отпор.

Со други зборови, во облик на алгебарска зависност, растењето е пропорционално со $n-1$ -коренот од еден генерализиран коефициент на стимулансот, и е обратнопропорционален со коефициентот на најголемиот отпор. Најголем дел класични модели е опфатен со овој закон.

Примери на растење кај популациите во кои е изразен и феноменот на миграцијата, најповеќе влијаат врз посматрање на проблемите на растењето и со стимули, а не само со отпори. Тргувајќи од основната логистичка равенка

$$(22) \quad \Delta x = (N - M + I - E) \cdot \Delta t,$$

каде N е број на новородени, M — број на умрени, I — број на имигрирани, E — на емигрирани во еден ист временски интервал Δt на времето, ако притоа се посматраат и внатрешните отпори со коефициентот A , ако коефициентот на природното растење е k (експоненцијален Малтусов раст), тогаш имаме диференцијална равенка од облик:

$$(23) \quad \frac{dx}{dt} = kx - Ax^2 + B(t) \sin \omega t + C(t) x(t) \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$$

во која учествуваат и периодичните влијанија врз бројноста, определени со двата последни собирци. Развивање на горните функции во ред би довело до потреба да се посматраат следните диференцијални равенки:

$$(24) \quad \frac{dx}{dt} = kx - \sum_{k=0}^{m_1} a_k x^k + \sum_{k=0}^{m_2} b_k x^k - a_n x^n,$$

каде

$$k > 0, a_n > 0, a_i > 0, b_i > 0, m_1 \leq n-1; m_2 \leq n-1.$$

При достаточни големи бројности $x(t) \geq 1$ стануваат можни обичните мајорантни постапки, и затоа за (24) го имаме следното мајорантно равенство на Бернули:

$$(25) \quad \frac{dx}{dt} = (k - a_0 - a_1 - \dots - a_{m_1}) x - (a_n - b_0 - b_1 - \dots - b_{m_2}) x^n,$$

чиешто егзактно решение при дадени почетни услови има облик:

$$(26) \quad x(t) = \frac{1}{\int_{x_0}^{n-1} \left(\frac{1}{x_0^{n-1}} - \frac{a_n - \sum b_k}{k - \sum a_k} \right) e^{-(k - \sum a_k)(n-1)t} + \frac{a_n - \sum b_k}{k - \sum a_k}}$$

Со негова помош може да се изведе следната дискусија:

1° Ако коефициентот на природното растење k е поголем од збирот на коефициентите на сите отпори

$$k > a_0 + a_1 + \dots + a_n,$$

тогаш

$$\exp\{-(n-1)(k - \sum a_k)t\} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty$$

и поголемата бројност на мајорантната равенка тежи кон:

$$(27) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \sqrt[n-1]{\frac{k - \sum a_k}{a_n - \sum b_k}}.$$

Овој број се јавува како супремум и за равенката (24). Можеме да го формулираме следниот Малтусов закон:

Во случај на растење на една популација која врз бројноста дејствувашаат различни отпори, а исто така и различни стимули, растењето x е задолжително ограничено кога $t \rightarrow \infty$ и е ограничено со нејзината определена со (27) ако коефициентот на природното растење е поголем од збирот на сите коефициенти на сите отпори, а ако коефициентот на најголемиот отпор е поголем од сите коефициенти на сите други стимули.

2°. Ако коефициентот на природното растење е помал од збирот на коефициентите на сите отпори: $k = \sum a_k < 0$, тогаш $\exp\{-(n-1)(k - \sum a_k)t\} \rightarrow \infty$ и го добиваме резултатот:

$$(28) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

којшто значи дека видот тежи кон изумирање. Тоа може да се смета за потполно природно во дадените услови, а времето на смртноста може да се определи од неравенката $x(t) \leq \varepsilon$.

3°. Ако коефициентот пред највисокиот степен x^n не се јавува задолжително како негативен, тогаш имаме случај со високи стимули од n -тиот ред, па во овие услови и нова компаративна равенка:

$$(29) \quad \frac{dx}{dt} = (k - \sum a_k)x + (a_n + \sum b_k)x^n$$

чиешто решение може да се напише во следниот облик:

$$(30) \quad x(t) = \frac{1}{\sqrt[n-1]{\left(\frac{1}{x_0^{n-1}} + \frac{a_n + \sum b_k}{k - \sum a_k}\right) e^{-(k - \sum a_k)(n-1)t} - \frac{a_n + \sum b_k}{k - \sum a_k}}}$$

И овде, ако е $k > \sum a_k$, што би било природно, решението е определено само за парни коренови показатели, и тоа само во следниот конечен интервал:

$$(31) \quad 0 < t < -\frac{1}{(n-1)(k - \sum a_k)} \ln \frac{\frac{a_n + \sum b_k}{k - \sum a_k}}{\frac{1}{x_0^{n-1}} + \frac{a_n + \sum b_k}{k - \sum a_k}}$$

и ако t тежи кон десната страна на интервалот, тогаш лесно можеме да се увериме дека $x \rightarrow \infty$ доволно брзо. Тоа значи, ако постојат стимуланти на растењето поголеми од коефициентот на природното растење и пропорционални на n -тиот степен на растењето, растењето се наголемува со голема брзина и тежи кон бесконечност во некој конечен временски интервал. Ако еден таков стимул, кој далеку го надминува природното растење, може да се оствари само при една изразита миграција, тогаш таквата ситуација ќе биде сразмерно ретка појава и не може да биде регулирана со Малтусовите закони за изолираните колонии.

4°. Ако почетната бројност на колонијата е x_0 и ако коефициентот пред експонентот во решението (26) е еднаков на нула

$$\frac{1}{x_0^{n-1}} - \frac{a_n - \sum b_k}{k - \sum a_k} = 0, \quad \text{т. е.} \quad x_0 = \sqrt[n-1]{\frac{k - \sum a_k}{a_n - \sum b_k}},$$

тогаш решението ќе биде:

$$(32) \quad x(t) = \sqrt[n-1]{\frac{k - \sum a_k}{a_n - \sum b_k}}$$

и x приближувајќи се ќе стане еднакво на x_0 . Тоа значи дека стимулите и отпорите се урамнотезени во дадената постојана популација и дека во растењето настапил застој. Имаме $\Delta x = 0$ и $N - M \approx 0$.

5°. Земајќи предвид дека $x(t)$ е бројност, а не број на единици, x има релативна вредност и $x = 1$ не значи една единствена личност, туку бројност еднаква на единица бројност. Во тој случај е неопходно доказот да се комплетира и за бројноста $0 \leq x \leq 1$. Применувајќи ги наведените постапки, добиваме мајорантна равенка во присуство на отпори:

$$(33) \quad \frac{dx}{dt} = kx - \left(\sum_{k=2}^n a_k \right) x^n$$

чиешто егзактно решение има облик:

$$(34) \quad x(t) = \frac{1}{\sqrt[n-1]{\left(\frac{1}{x_0^{n-1}} - \frac{\sum_{k=2}^n a_k}{k} \right) e^{-(n-1)kt} + \frac{\sum_{k=2}^n a_k}{k}}}$$

и во случајот кога $t \rightarrow \infty$, добиваме еден Малтусов закон во математички облик:

$$(34) \quad x(t) \rightarrow \sqrt[n-1]{\frac{k}{\sum_{k=2}^n a_k}}$$

којшто го докажува следниот обопштен Малтусов принцип:

Во процесот на природното растење под влијание на различни отпори, бројноста на колонијата е ограничена и тежи кон некој супремум којшто е инверзнопропорционален на коефициентите на растењето и е обратнопропорционален на збирот од коефициентите на отпорите.

Слично за равенката-модел со стимули и со отпори

$$(35) \quad \frac{dx}{dt} = (k + b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1})x - (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n)x^n,$$

ползувајќи се со општото решение во аналогна форма, можеме да добиеме уште еден Малтусов закон

$$(36) \quad x(t) \rightarrow \sqrt[n-1]{\frac{k + b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}}{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n}}$$

Во процесот на растењето, при постоење на стимули и отпори, при единствен услов коефициентот на природното растење да е позитивен, а исто така да е позитивен и коефициентот a_n пред најголемиот отпор, растењето ќе биде ограничено со некој супремум, право-пропорционален со збирот на сите стимуланти и обратнопропорционален на збирот на сите отпори.

Изведените закони резултираат низ многубројни последици и примени во најважните модели. Да наведеме само некои како пример:

Распињето под услови на внајтрешни ојџори и периодични сили, зависни од времето. Едно логично расудување не доведува до диференцијалната равенка:

$$(37) \quad \frac{dx}{dt} = kx - Ax^2 - F(t, x); \quad F(0, 0) = 0,$$

којашто претставува една диференцијална равенка на Рикати. F е обично ограничена и периодична функција од времето: $|F(t)| < M$. Мајорантната равенка којашто има облик:

$$\frac{dx}{dt} = kx - Ax^2 + M$$

може да се сведе под изучуваните законитости. Следниот конкретен Малтусов закон може да биде формулиран за тие видови на растењето:

Ако на природното распиње во присуство на внајтрешни ојџори влијае некоја променлива осцилајорна сила со ограничен интензитет, тогаш распињето се ограничува со максимумот на бројноста:

$$(38) \quad x(t) \leq \frac{k + \sqrt{k^2 + 4AM}}{2A}$$

каде $k > 0$ е коефициентот на природното распиње; $A > 0$ е коефициентот на внајтрешните ојџори; а $M \geq |F|$ е максимална амплитуда на надворешните влијанија.

Овој модел е особено интересен при постоење на периодични осцилации како влијанија ден — ноќ, лето — зима, периодичен прилив на храна или вода, сезонски, метеоролошки, трофички и искусствени влијанија.

— Равенката на Пијер—Берталанфи. Еден од најдобрите и најприфатените модели на растењето во биологијата е равенката на Питер—Берталанфи, која го содржи принципот на одржувањето на материјата во вид на формулација, која промената на растењето ја дефинира како разлика меѓу катаболизам и анаболизам:

$$(39) \quad \frac{dW}{dt} = a_2 W^{b_1} - a_1 W^{b_2}$$

каде е

$$a_1 > 0, a_2 > 0, b_1 > 0, b_2 > 0, b_1 < b_2.$$

Во однос на таа равенка, која не секогаш е равенка на Бернули и која не секогаш може да се реши низ квадратури, постои обемна литература. Што се однесува до мајорантата на решението и до ограниченостите на овде иследуваните методи и без решавање може да се констатира дека растењето е ограничено со супремумот:

$$(40) \quad W(t) \leq \sqrt{\frac{a_1}{a_2}}^{b_2 - b_1}$$

којшто зависи само од виталните биолошки параметри во оваа равенка.

— *Систем на Волџера*. Во познатиот систем на Волтера за растењето при заемното дејство на повеќе видови имаме:

$$(41) \quad \left\{ \frac{dx_i}{dt} = x_i (k_i - a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \dots - a_{in}x_n) \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Ако од коефициентите k_i на природното растење и од коефициентите a_{ij} на отпорите може да се заклучи дека дадениот раст, на пример x_i , навистина се јавува како најмал, тогаш за i -тата равенка веднаш ја имаме следната мајорантна равенка на Бернули:

$$(42) \quad \frac{dx_i}{dt} = k_i x_i - \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \right) x_i^2$$

и во склад со нашите изведувања го добиваме следниот Малтусов закон за системот на Волтера:

$$(43) \quad x_i \leq \frac{k_i}{\sum a_{ij}}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Укажаните методи на оценка даваат голем број интересни резултати ако се применат на постојните модели. Но, нивната вредност е повеќе од една генерална природа — сите тие заедно го нагласуваат принципот на ограниченоста на секој раст и, барем гледано математички, нема опасност од ефектуирање на Малтусовата хипотеза на катастрофа во идеални услови на растењето, што е до неодамна предмет на многубројни социолошки, економски и политички расправи.

LITERATURA

- [1]. Malthus T., *An Essay on the Principle of Population*, London, 1798.
- [2]. Verhülst P. F., *Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement*, *Corresp. Math. et Phys.*, 10, 1838, 113—121.
- [3]. Verhülst P. F., *Recherches sur la croissance des cultures bactériennes*, Paris, 1942, 211 p. (2^e ed. Paris, 1959).
- [4]. Cohn A. E., Muray H. A., *Jr. Quart. Rev. Biol.*, 2, 469, 1927.
- [5]. Pearle-Reed, *vidi Brody* 9, p. 556. Исто така:
Pearle R., Reed J., *On the rate of growth of the population of the United States since 1790 and its mathematical representation*, „*Proc. Nat. Acad. Sci.*“ 1920, 6, p. 275—293.
- [6]. Robertson T. B., *Chemical basis of growth and senescence*, Lippincott, 1924.

- [7]. Pearl R., and Reed, L. J., *Metron*, 3, 1 (1923).
- [8]. Gaumpertz B., *On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new mode of determining the value of life confingencies*. Phil. Trans. Roy. Soc., London, 1825, 115, 2, 513—585. (конкретна формула с. 522).
- [9]. Brody Samuel, *Bioenergetics and growth*. N. Y., 1945 (Reinhold Publ. Corp).
- [10]. Webb F., (Вебб Ф.), *Биохимическая технология и микробиологический синтез*. Пер. с англ. под редак. Н. Н. Васильева и К. П. Гаконова, М., 1969, 557 стр.
- [11]. Шмальгаузен И. И., *Факторы эволюции*. М., 1968, 248 стр.
- [12]. Бейли, *Математика в биологии и медицине*. пер. с англ., Мир, Москва, 1970, стр. 173—201 и стр. 202—233.
- [13]. *Количественные аспекты роста организмов*, под редак. А. И. Затина, Академия наук СССР, Инст. биологии развития, Наука, Москва, 1975.
- [14]. Glaser O., *Biol. Rev.*, 13, 20 (1938), and *Growth supplement*, p. 53 (1940).
- [15]. Hirschelwood S. N., *The Chemical Kinetics of the Bacterial Cell*, Oxford University Press. London, 1946. 284 p.
- [16]. Василев Н. Н., Амбросов В. А., Саладиев А. А. *Модификация процессов микробиологического синтеза*. Изд. Ласная промышленность, Москва, 1975, стр. 27, 47, 49, 51, 62; особено 66.
- [17]. Bertalanffy von L. 1938. *A quantitative theory of organic growth* (Inquires of growth laws II). *Human Biology*, 10, 2, 181—213.
- [18]. Bertalanffy von L. 1964. *Basic concepts in quantitative biology of metabolism*. *Helgol. Wiss. Meersunters*, 9, 1—4, 5—34.
- [19]. Volterra Vito, *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie*. Paris, Gauthier-Villars, 1931, Cahires Scientifiques, fasc. VII.
- [20]. Назаренко В. Г., *Модификации модели клеточной популяции, учитывающей свою митотическую активность*, *Биофизика*, XXIII, вып. 2, 1978, стр. 332.
- [21]. Lottka Alfred, *Elements of Mathematical Biology*, N. Y. 1956, str. 46.
- [22]. Lottka A., *Theorie analytique des associations biologiques*, II, (Analyse demographique, avec application particulière à l'espèce humaine); *Actualite scient. et industrielles*, fasc. 780, *Exposés de Biometrie et de Statistique Biologique*, XII, str. 48.

S U M M A R Y

ANALYTIC DIFFERENTIAL EQUATION OF GROWTH AND
GENERALISED MALTHUS LAWS

Lav LOZINSKI, Dragan DIMITROVSKI

We propose application of the lemma of Tchapligin to the differential equations of growth in biology, it makes the estimation of the processes very effective. In the present paper it is applied to the general analytic differential equation of the growth with resistences and stimulations.

University „Kiril i Metodij“,
Faculty of Biology,
Faculty of Mathematical Sciences,
Skopje — Yugoslavia.