Математички Билтен
14 (XL)
1990 (87-90)
Скопје, Југославија

РЕШАВАЊЕ НА ЕДНА КЛАСА ЛИНЕАРНИ ИНТЕГРАЛНИ РАВЕНКИ НА ВОЛТЕРРА ОД ВТОР ВИД

Димов А. Лазо

Во оваа работа е разгледана следнава класа линеарни интегрални равенки на Волтерра од втор вид:

$$x^k\phi(x) + \lambda\int_0^x \left[\sum_{i=1}^{k} a_i x^{k-i}(x-y)^{i-1}\right]\phi(y)dy = x^k f(x). \tag{8}$$

Со помош на лапласовата трансформација равенката се трансформира во ојлеровата диференцијална равенка:

$$p^kF^{(k)} - \lambda\{a_1p^{k-1}F^{(k-1)} - \left[a_1\binom{k-1}{1} + a_2\right]p^{k-2}F^{(k-2)} + \ldots +$$
$$+(-1)^{s-1}(s-1)!\left[\binom{k-1}{s-1}a_1 + \binom{k-2}{s-2}a_2 + \ldots + a_s\right]p^{k-s}F^{(k-s)} + \ldots +$$
$$+(-1)^{k-1}(k-1)!\left[a_1+a_2+\ldots+a_k\right]F(p) = (-1)^k p^k G(p), \tag{12}$$

каде што $F(p) = L(\phi(x))$, $G(p) = L(x^kf(x))$.

1. Во [1] е докажано дека линеарните интегрални равенки на Волтерра од втор вид:

$$\phi(x) + \lambda\int_0^x K(x,y)\phi(y)dy = f(x), \tag{1}$$

кај кои јадрото зависи само од разликата на аргументите, т.е. кои имаат јадро од вид:

$$K(x,y) = k(x-y),$$

може да се решат со помош на лапласовата трансформација дефинирана со:

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-px}f(x)dx. \tag{2}$$

Притоа се користи својството на лапласовата трансформација да ја пресликува конволуцијата на две функции, дефинирана со:

$$f(x)*g(x) = \int_0^x f(x-y)g(y)dy, \tag{3}$$

во производот на лапласовите трансформации, т.е. важи:

$$L(f(x)*g(x)) = L(f(x))L(g(x)). \tag{4}$$

Решението на равенката (1) е добиено во облик:

$$\phi(x) = L^{-1}\left[\frac{L(f)}{1+L(K)}\right], \tag{5}$$

каде што со L^{-1} е означена инверзната лапласова трансформација дефинирана со:

$$L^{-1}(F(p)) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{px}F(p)dp. \tag{6}$$

2. Овде ќе изложиме уште една постапка за примена на лапласовата трансформација за трансформирање на една класа линеарни интегрални равенки на Волтерра од втор вид, во ојлерова диференцијална равенка, па според тоа и за нивно решавање, бидејќи постапката за решавање на ојлеровата диференцијална равенка е општопозната.

Имено, да ја разгледаме линеарната интегрална равенка на Волтерра од втор вид чие јадро $K(x,y)$ е од вид:

$$K(x,y) = \sum_{i=1}^{k} \frac{a^i}{x^i}(x-y)^{i-1}. \tag{7}$$

Со вакво јадро равенката (1) може да се напише во вид

$$x^k\phi(x) + \lambda\int_0^x \phi(y)\left[\sum_{i=1}^{k} a^i x^{k-i}(x-y)^{i-1}\right]dy = x^k f(x), \tag{8}$$

или малку поинаку:

$$x^k\phi(x) + \lambda\sum_{i=1}^{k} a_i x^{k-i}\int_0^x (x-y)^{i-1}\phi(y)dy = x^k f(x). \tag{9}$$

Сега, ако го имаме во предвид својството на лапласовата трансформација:

$$L(x^k f(x)) = (-1)^k F^{(k)}_{(p)},$$

образложено во [2] и уште ако имаме предвид дека интегралот под знакот за сума е, всушност, конволуција на функциите $\phi(y)$ и y^{i-1}, добиваме

$$L\left[a_i x^{k-i}\int_0^x (x-y)^{i-1}\phi(y)dy\right] = a_i(-1)^{k-i}(i-1)!\left[\frac{F(p)}{p^i}\right]^{(k-i)}$$

Имајќи го во обсир последниот резултат, интегралната равенка (9) по примена на лапласовата трансформација ќе се трансформира во следнава диференцијална равенка:

$$(-1)^k F^{(k)} + \lambda\sum_{i=1}^{k} a_i(-1)^{k-i}(i-1)!\left[\frac{F(p)}{p^i}\right]^{(k-i)} = G(p), \qquad (10)$$

каде што функцијата $G(p)$ е дадена со:

$$G(p) = L(x^k f(x)).$$

За изводот под знакот за сума, применувајќи ја лајбницовата формула, добиваме:

$$\left[\frac{F(p)}{p^i}\right]^{(k-i)} = \frac{1}{p^k}\Big[p^{k-i}F^{(k-i)} - \binom{k-i}{1}ip^{k-i-1}F^{(k-i-1)} + \ldots +$$
$$+(-1)^s\binom{k-i}{s}i(i+1)\ldots(i+s-1)p^{k-i-s}F^{(k-i-s)} + \ldots +$$
$$+(-1)^{k-i}i(i+1)\ldots(k-1)F\Big].$$

Со замена на последниот резултат во равенката (10) ја добиваме следнава диференцијална равенка:

$$(-1)^k p^k F^{(k)} + \lambda\sum_{i=1}^{k} a_i(-1)^{k-i}(i-1)!\Big[p^{k-i}F^{(k-i)} +$$
$$+\sum_{s=1}^{k-i}(-1)^s\binom{k-i}{s}i(i+1)\ldots(i+s-1)p^{k-i-s}F^{(k-i-s)}\Big] = p^k G(p). \qquad (11)$$

Равенката (11), по извесни трансформации и недолги пресметки, го добива попрегледниот облик:

$$p^k F^{(k)} - \lambda\{-\left[a_1\binom{k-1}{1}+a_2\right]p^{k-2}F^{(k-2)} + a_1 p^{k-1}F^{(k-1)} + \ldots +$$
$$+ (-1)^{s-1}(s-1)!\left[\binom{k-1}{s-1}a_1+\binom{k-2}{s-2}a_2+\ldots+\binom{k-s+1}{1}a_{s-1}+a_s\right]p^{k-s}F^{(k-s)} +$$
$$+\ldots+(-1)^{k-1}(k-1)!\left[a_1+a_2+\ldots+a_k\right]F(p) = (-1)^k p^k G(p). \qquad (12)$$

Пример. Да ја разгледаме интегралната равенка

$$x^2\phi(x) + \int_0^x [6x+4(x-y)]\phi(y)dy = f(x).$$

Споредувајќи со (8) се гледа дека к=2, $a_1=6$, $a_2=4$, па со замена во (12) ја добиваме следнава диференцијална равенка:

$$p^2F'' - 6pF' + 10F = p^2G(p).$$

Забелешка: Да забележиме дека со равенката (12) е опфатен случајот третиран во [4].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Трикоми, Ф.: Интегральные уравнения, И.Л. Москва, 1962

[2] Диткин, В.А., Прудников, А.И.: Интегральные преобразования и операционное исчисление, издательство „Наука", Москва, 1974

[3] Goursat, E.: Cours d'analyse mathematique, tom III, Paris, 1942

[4] Damjanović, B.M.: Jedna metoda rešavanja Volterine integralne jednačine specijalnog tipa, Zbornik radova Prirodno-matematičkog fakulteta, br. 2, Kragujevac, 1981

RESOLUTION D'UNE CLASSE DES ÉQUATIONS LINÉAIRES INTEGRALES DE VOLTERRA DE SECONDE ESPECE

Dimov A. Lazo

Resumé

Dans cet article on considère la classe suivante des équations linéaires integrales de Volterra de seconde espece:

$$x^k\phi(x) + \lambda\int_0^x \phi(y)\left[\sum_{i=1}^{k} a_i x^{k-i}(x-y)^{i-1}\right]dy = x^k f(x), \qquad (8)$$

on transforme, en utilisant la transofrmation de Laplace, et on obtient l'équation différentielle d'Euler:

$$p^kF^{(k)} - \lambda\{a_1p^{k-1}F^{(k-1)} - \left[a_1\binom{k-1}{1}+a_2\right]p^{k-2}F^{(k-2)} + \ldots +$$
$$+ (-1)^{s-1}(s-1)!\left[\binom{k-1}{s-1}a_1+\binom{k-2}{s-2}a_2+\ldots+\binom{k-s+1}{1}a_{s-1}+a_s\right]p^{k-s}F^{(k-s)} +$$
$$+\ldots+(-1)^{k-1}(k-1)!\left[a_1+a_2+\ldots+a_k\right]F(p) = (-1)^kp^kG(p). \qquad (12)$$

Où: $F(p) = L(\phi(x))$ et $G(p) = L(x^kf(x))$ sont transformations de Laplace.