С.ГЕОРГИЕВСКА

ЗА ЕДЕН STURM-LIOUVILLE-ОВ ПРОБЛЕМ ОД IV РЕД

1. Во книгата на E.Kamke (1) дадена е табела за сопствени вредности и сопствени функции на проблемот со сопствени вредности

$$y^{(4)} + \lambda y = 0 \qquad \lambda \neq 0$$
$$y^{(p)}(a) = y^{(q)}(a) = y^{(r)}(b) = y^{(s)}(b) = 0 \quad \left(y^{(p)} = \frac{d^p y}{dx^p}\right)$$

G.Cimmino [2] го разгледува проблемот со сопствени вредности

$$y^{(4)} + (\lambda+1) m^2 y^{(2)} + m^4 y = 0$$
$$y'(0) = y(0) = y\left(\frac{2\pi}{m}\right) = y'\left(\frac{2\pi}{m}\right) = 0$$

2. Во овој труд ќе го разработиме проблемот со сопствени вредности, составен од равенката

$$y^{(4)} + (\lambda+1) m^2 y^{(2)} + m^4 y = 0 \tag{1}$$

при услови на Sturm

$$y^{(p_1)}(a) = y^{(p_2)}(a) = y^{(q_1)}(b) = y^{(q_2)}(b) = 0 \tag{2}$$

(при p_i, q_i = 0, 1, 2, 3 (i=1,2) каде $p \neq p_2$, $q_1 \neq q_2$). Тој се јавува како посебен проблем, за $\nu = 2$, од проблемот

$$y^{(2\nu)} + (\lambda+1) m^{\nu} y^{(\nu)} + \lambda m^{2\nu} y = 0$$
$$y^{(p_1)}(a) = y^{(p_2)}(a) = \dots = y^{(p_\nu)}(a) = y^{(q_1)}(b) = y^{(q_2)}(b) = \dots y^{(q_\nu)}(b) = 0$$

(при p_i, q_i = 0, 1, ..., 2i-1, (i=1,...,ν) каде $p_i \neq p_j$, $q_i \neq q_j$) кој е воопштување на проблемот на G.Cimmino во однос на редот на диференцијалната равенка.

2.1. За да ги одредиме сопствените вредности на проблемот (1)-(2), потребно е да ги најдеме оние вредности на параметарот λ за кои проблемот има нетривијално решение. За таа цел ќе ја користиме така наречената $\Delta(\lambda)$-постапка.

Општото решение на равенката (1) за $\lambda > 0$, $\lambda = \kappa^2$ е од облик

$$y = C_1\cos mx + C_2\sin mx + C_3\cos mkx + C_4\sin mkx$$

каде C_1, C_2, C_3, C_4 се произволни константи на интеграцијата.

Равенките (2) даваат

$$C_1\cos\left(ma_i + \alpha\frac{\bar{U}}{2}\right) + C_2\sin\left(ma_i + \alpha\frac{\bar{U}}{2}\right) +$$
$$+ k^{\alpha}C_3\cos\left(mka_i + \alpha\frac{\bar{U}}{2}\right) + k^{\alpha}C_4\sin\left(mka_i + \alpha\frac{\bar{U}}{2}\right) = 0$$

За $i=1$, $\alpha=p_1, p_2$, $a_1=a$, и за $i=2$, $\alpha=q_1, q_2$, $a_2=b$, добиваме четири линеарни хомогени равенки по C_i $(i=1, \dots, 4)$ што ни овозможува, во колку имаме и други решенија за C_i освен тривијалното, $C_i = 0$ $(i=1, \dots, 4)$, да ги определиме од условот, соодветната карактеристична детерминанта да биде рамна на нула.

Оваа детерминанта од IV ред го има обликот:

$$\begin{vmatrix}
\cos\left(ma + p_1\frac{\bar{U}}{2}\right) & \sin\left(ma + p_1\frac{\bar{U}}{2}\right) & k^{p_1}\cos\left(mka + p_1\frac{\bar{U}}{2}\right) & k^{p_1}\sin\left(mka + p_1\frac{\bar{U}}{2}\right) \\
\cos\left(ma + p_2\frac{\bar{U}}{2}\right) & \sin\left(ma + p_2\frac{\bar{U}}{2}\right) & k^{p_2}\cos\left(mka + p_2\frac{\bar{U}}{2}\right) & k^{p_2}\sin\left(mka + p_2\frac{\bar{U}}{2}\right) \\
\cos\left(mb + q_1\frac{\bar{U}}{2}\right) & \sin\left(mb + q_1\frac{\bar{U}}{2}\right) & k^{q_1}\cos\left(mkb + q_1\frac{\bar{U}}{2}\right) & k^{q_1}\sin\left(mkb + q_1\frac{\bar{U}}{2}\right) \\
\cos\left(mb + q_2\frac{\bar{U}}{2}\right) & \sin\left(mb + q_2\frac{\bar{U}}{2}\right) & k^{q_2}\cos\left(mkb + q_2\frac{\bar{U}}{2}\right) & k^{q_2}\sin\left(mkb + q_2\frac{\bar{U}}{2}\right)
\end{vmatrix} = 0$$

Од последователно пресметување на детерминантата, за карактеристична равенка се добива равенката

$$k^{q_1+q_2}\left[(q_2 - q_1)\frac{\bar{U}}{2}\right]\sin(p_2 - p_1)\frac{\bar{U}}{2} -$$
$$-k^{p_2+q_2}\sin\left[kK + (q_2 - p_2)\frac{\bar{U}}{2}\right]\sin\left[K + (q_1 - p_1)\frac{\bar{U}}{2}\right] +$$

$$+K^{p_2+q_1}\sin\left[kK+(q_1-p_2)\frac{\bar U}{2}\right]\sin\left[K+(q_1-p_1)\frac{\bar U}{2}\right]+$$
$$+K^{p_1+p_2}\sin(q_2-q_1)\frac{\bar U}{2}\cdot\sin(p_2-p_1)\frac{\bar U}{2}+$$
$$+K^{p_1+q_1}\sin\left[K+(q_2-p_2)\frac{\bar U}{2}\right]\sin\left[kK+(q_1-p_1)\frac{\bar U}{2}\right]+$$
$$+K^{p_1+q_2}\sin\left[K+(q_1-p_1)\frac{\bar U}{2}\right]\sin\left[kK+(q_2-p_2)\frac{\bar U}{2}\right]=0 \qquad (3)$$

тоа е една трансцендентна равенка по к ($K=m(b-a)$, $\lambda=k^2$) која има бескрајно многу решенија, освен кога $p_1=0$, $p_2=1$, $q_1=2$ и $q_2=3$. Значи, освен тривијалното решение за произволните константи C_i ($i=1, \ldots, 4$) постои и друго решение, при услов да е исполнет условот (3), односно за оние вредности на к ($k=\sqrt{\lambda}$) за кои што е задоволена равенката (3). Како што се гледа таа равенка е задоволена за бескрајно многу вредности на к, спрема тоа и постојат бескрајно многу сопствени вредности за проблемот.

2.2. Изразот за сопствените функции со точност до еден константен фактор е од следниот облик

$$\varphi(x)=K^{q_1+q_2}\sin\left[(q_2-q_1)\frac{\bar U}{2}\right]\sin\left[m(x-a)-\frac{\bar U}{2}p_2\right]-$$
$$-K^{p_2+q_2}\sin\left[kK+(q_2-p_2)\frac{\bar U}{2}\right]\sin\left[m(x-b)-\frac{\bar U}{2}q_1\right]+$$
$$+K^{p_2+q_1}\sin\left[kK+(q_1-p_2)\frac{\bar U}{2}\right]\sin\left[m(x-b)-\frac{\bar U}{2}q_2\right]+$$
$$+K^{p_2}\sin\left[(q_2-q_1)\frac{\bar U}{2}\right]\sin\left[mk(x-a)-\frac{\bar U}{2}p_2\right]-$$
$$-K^{q_1}\sin\left[K+(q_2-p_2)\frac{\bar U}{2}\right]\sin\left[mk(x-b)-q_1\frac{\bar U}{2}\right]+$$
$$+K^{q_2}\sin\left[K+(q_1-p_2)\frac{\bar U}{2}\right]\sin\left[mk(x-b)-q_2\frac{\bar U}{2}\right]$$

3. За конкретни вредности на $p_i, q_i=0,1,2,3)$ ($i=1,2$) карактеристичните равенки и изразите за сопствените функции со точност до еден константен фактор, користејќи аналогни ознаки на **Kamke**-овите, имено

$U_1(x,y)=\cos mk(y-a)\cos m(x-a)$ $\qquad W_1(k,x)=\sin mk(x-b)$

$U_2(x,y)=\sin mk(y-a)\sin m(x-a)$ $\qquad W_2(k,x)=\cos mk(x-b)$

$U_3(x,y)=\cos mk(y-a)\sin m(x-a)$

$U_4(x,y)=\sin mk(y-a)\cos m(x-a)$

се поместени во следната табела:

р.број	контурни услови $(p_1,p_2;q_1,q_2)$	Карактеристични равенки	Сопствени вредности
1°	(0,1;0,1)	$2k[1-U_1(b,b)]-(1+k^2)U_2(b,b)=0$	преброиво
2°	(0,1;0,2)	$\mathrm{ctg}K\,\mathrm{tg}Kk-k=0\,,\ \mathrm{ctg}K\neq 0$	
3°	(0,1;0,3)	$(1+k^4)U_1(b,b)+k(1+k^2)[U_1(b,b)-1]=0$	
4°	(0,1;1,2)	$(1+k^2)[U_1(b,b)-1]+2kU_2(b,b)=0$	преброиво
5°	(0,1;1,3)	$(1-k)(\mathrm{tg}K\ \mathrm{ctg}Kk-k)=0\,,\ \mathrm{tg}K\neq 0$	
6°	(0,1;2,3)	$k(1+k^2)U_2(b,b)+2k^2U_1(b,b)=k^4+1$	$\lambda=1$
7°	(0,2;0,2)	$(1-k^2)^2\sin K\sin Kk=0\,,$ $K\neq i\pi$ $k=i\pi$	$\lambda=1$ $\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{K}\right)^2$ $\forall\lambda=k^2$
8°	(0,2;0,3)	$(k^3-\mathrm{ctg}K\ \mathrm{tg}Kk)(1-k^2)=0\,,\ \mathrm{ctg}K\neq 0$	преброиво
9°	(0,2;1,2)	$\mathrm{tg}K\,\mathrm{ctg}Kk-k=0\,,\quad \mathrm{tg}K\neq 0$	преброиво
10°	(0,2;1,3)	$(k^2-1)\cos K\ \cos Kk=0\,,\quad K\neq\frac{2i+1}{2}\pi$ $K=\frac{2i+1}{2}\pi$	$\lambda_n=\left(\frac{2n+1}{2i+1}\right)^2$ $\forall\lambda=k^2$
11°	(0,2;2,3)	$(1-k^2)(\mathrm{ctg}K\ \mathrm{tg}Kk-k)=0\,,\quad \mathrm{ctg}K\neq 0$	преброиво
12°	(0,3;0,3)	$2k^3[1-U_1(b,b)]-(1+k^2)U_2(b,b)=0$	преброиво
13°	(0,3;1,2)	$2k^2-(1-k^4)U_1(b,b)-k(1+k^2)U_2(b,b)=0$	преброиво
14°	(0,3;1,3)	$(1-k^2)(\mathrm{tg}K\ \mathrm{ctg}Kk-k^3)=0;\ \mathrm{tg}K\neq 0$	
15°	(0,3;2,3)	$k(1+k^2)[1-U_1(b,b)]-(1+k^4)U_2(b,b)=0$	преброиво
16°	(1,2;1,2)	$2k[1-U_1(b,b)]-(1+k^2)U_2(b,b)=0$	преброиво
17°	(1,2;1,3)	$(1-k^2)(\mathrm{ctg}K\ \mathrm{tg}Kk-k)=0\quad \mathrm{ctg}K\neq 0$	
18°	(1,2;2,3)	$(1+k^2)[U_1(b,b)-1]+2kU_2(b,b)=0$	преброиво
19°	(1,3;1,3)	$(k^2-1)\sin K\ \sin Kk=0\,,\quad K\neq i\pi$ $K=i\pi$	$\lambda=\left(\frac{n\pi}{k}\right)^2$ $\forall\lambda=k^2$
20°	(1,3;2,3)	$(k^2-1)(1-k\,\mathrm{tg}K\ \mathrm{ctg}Kk)=0\,,\ \mathrm{tg}K\neq 0$	преброиво
21°	(2,3;2,3)	$2k[1-U_1(b,b)]-(1+k^2)U_2(b,b)=0$	преброиво

Потребно е да напоменеме дека останатите проблеми со сопствени вредности од вид $(p_1,p_2;q_1,q_2)$ со смената $\eta(\xi)=\varphi(x),\xi=-x$ се сведуваат на проблеми од табелата.

Сопствени функции
$\varphi(x) = u_4(x,b) + W_1(k,x) - u_4(b,x) +$ $+ k[u_3(b,x) + W_1(1,x) - u_3(x,b)]$
$\varphi(x) = u_2(b,x) + k^2 u_2(x,b) +$ $+ k[u_1(x,b) + u_1(b,x) - W_2(k,x) - W_2(1,x)]$
$\varphi(x) = C_1 \cos mx + C_2 \sin mx$
$\varphi(x) = \sin mx$ $\varphi(x) = u_4(a,x)$ $\varphi(x) = u_3(x,a)$
$\varphi(x) = u_2(b,x) - u_2(x,b)$
$\varphi(x) = u_4(b,x) - k u_3(x,b)$
$\varphi(x) = u_4(a,x)$ $\varphi(x) = u_3(x,a)$
$\varphi(x) = u_2(b,x) - k^2 u_2(x,b)$
$\varphi(x) = u_4(b,x) - u_4(x,b) - W_1(k,x) + k^3[u_3(x,b) - u_3(b,x) - W_1(1,x)]$
$\varphi(x) = u_3(b,0) + k W_1(k,0) - k^3 u_4(b,0) +$ $+ k[u_4(x,b) + W_2(k,x)] + k^3[u_1(b,x) - W_2(1,x)]$
$\varphi(x) = u_4(b,x) - k^5 u_3(x,b) + k^2[W_1(k,x) - u_4(x,b)] -$ $- k^3[W_1(1,x) + u_3(b,x)]$
$\varphi(x) = u_1(b,x) - W_2(k,x) + k[u_2(x,b) + u_2(b,x)] +$ $+ k^2[u_1(x,b) - W_2(1,x)].$
$\varphi(x) = u_3(b,x) + k^3 u_4(x,b) + k[W_1(k,x) - u_4(b,x)] +$ $+ k^2[W_1(1,x) - u_3(x,b)]$
$\varphi(x) = u_1(a,x)$ $\varphi(x) = u_1(x,a)$
$\varphi(x) = u_1(b,x) - k^2 u_1(x,b)$
$\varphi(x) = u_4(b,x) - W_1(k,x) - k u_3(b,x) + k^2 u_4(x,b) + k^3[W_1(1,x) - u_3(x,b)]$

ЛИТЕРАТУРА:

[1] E.Kamke: Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen, Bd.I, Leipzig, 1959

[2] G.Cimmino: Autosoluzioni e autovalori nelle equazioni differenziali lineari ordinarie autoaggiunte di ordine superiore, Math.Zeit.,t.32,1930, 4-58