Математички Билтен
11-12 (XXXVII-XXXVIII)
1987-1988 (29-38)
Скопје, Југославија

СВЕДУВАЊЕ КОНТУРЕН ПРОБЛЕМ ОД ЧЕТВРТИ РЕД НА КОНТУРЕН ПРОБЛЕМ ОД ВТОР РЕД

Слободанка С. Георгиевска

И.Шапкарев во трудот [7] укажува дека е можно контурни проблеми од повисок ред, при одредени услови за решението, да се сведат на контурни проблеми од понизок ред. Така, тој, контурен проблем од трет ред сведува на контурен проблем од втор ред. Ние во овој труд разгледуваме контурен проблем од четврти ред во две точки и со слична постапка неговото решавање го сведуваме на решавање на контурен проблем од втор ред.

Контурни проблеми од четврти ред се среќаваат во трудовите на Д.Перчинкова [4,5], С.Георгиевска [1], Э.Камке [2], Л.Коллатц [3] и др.

1. Да ја разгледаме диференцијалната равенка

$$z^{iv} + Az''' + Bz'' + Cz' + Dz = 0 \tag{1.1}$$

(A,B,C,D - константи) со контурни услови

$$z(a) = z(b) = 0 \tag{1.2}$$

($a < b$) и условот бараното решение да биде полн куб.

Равенката

$$r^4 + Ar^3 + Br^2 + Cr + D = 0 \tag{1.3}$$

е карактеристична равенка на равенката (1.1).

Нека нејзините корени се r_1, r_2, r_3 и r_4. Нивната зависност од коефициентите на равенката (1) е дадена со виетовите формули:

$$\begin{aligned} r_1+r_2+r_3+r_4 &= -A, \\ r_1r_2+r_1r_3+r_1r_4+r_2r_3+r_2r_4+r_3r_4 &= B, \\ r_1r_2r_3+r_1r_3r_4+r_2r_3r_4 &= -C, \\ r_1r_2r_3r_4 &= D. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Општиот интеграл на равенката (1.1) е од вид [6]:

$$z = e^{r_4x}\left(A_4+A_3\int e^{(r_3-r_4)x}dx+A_2\int(e^{(r_3-r_4)x}\int e^{(r_2-r_3)x}dx)dx +\right.$$

$$\left.+ A_1\int(e^{(r_3-r_4)x}\int(e^{(r_2-r_3)x}\int e^{(r_1-r_2)x}dx)dx)dx\right) \tag{1.5}$$

каде што A_1, A_2, A_3, A_4 се произволни константи.

Воведувајќи ги ознаките

$$\alpha_i = \int e^{(r_i-r_{i+1})x}dx,$$

$$\beta_i = \int(e^{(r_i-r_{i+1})x}\int e^{(r_{i-1}-r_i)x}dx)dx =$$

$$= \int e^{(r_i-r_{i+1})x}\alpha_{i-1}dx,$$

$$\gamma_i = \int(e^{(r_i-r_{i+1})x}\int(e^{(r_{i-1}-r_i)x}\int e^{(r_{i-2}-r_{i-1})x}dx)dx)dx =$$

$$= \int e^{(r_i-r_{i+1})x}\beta_{i-1}dx,$$

општото решение (1.5) прима вид

$$z = e^{r_4x}(A_4+A_3\alpha_3+A_2\beta_3+A_1\gamma_3). \tag{1.6}$$

За десната страна на (1.5) односно (1.6) да биде полн куб потребно е да важат следниве услови

$$3A_2A_4\beta_3=A_3^2\alpha_3^2, \qquad 27A_1A_4^2\gamma_3=A_3^3\alpha_3^3. \tag{1.7}$$

Ако ја диференцираме првата од релациите (1.7) двапати наоѓаме

$$3A_2A_4 = 2A_3^2e^{[(r_3-r_4)-(r_2-r_3)]x}$$

од каде што

$$2A_3^2 = 3A_2A_4,$$

$$r_3-r_4 = r_2-r_3. \tag{1.8}$$

Диференцирајќи го вториот услов од (1.7) двапати, добиваме

$$9A_1A_4^2\alpha_1 = 2A_3^3\alpha_3e^{[(r_3-r_4)-(r_2-r_3)]x}.$$

Земајќи ја предвид втората равенка од (1.8) добиваме

$$9A_1A_4^2\alpha_1 = 2A_3^3\alpha_3,$$

а диференцирајќи го ова равенство уште еднаш имаме

$$9A_1A_4^2 = 2A_3^3 e^{[(r_3-r_4)-(r_1-r_2)]x}$$

односно

$$2A_3^3 = 9A_1A_4^2, \qquad (1.9)$$

$$r_3-r_4 = r_1-r_2.$$

Врз основа на напред изложеното можеме да **заклучиме: решението** (1.5) ќе биде полн куб ако за константите A_i (i=1,2,3,4) важи

$$3A_2A_4 = 2A_3^2,$$

$$9A_1A_4^2 = 2A_3^3, \qquad (1.10)$$

и ако корените r_i (i=1,2,3,4) на карактеристичната равенка (1.3) ги задоволуваат равенствата

$$r_3-r_4 = r_2-r_3 = r_1-r_2. \qquad (1.11)$$

Да видиме кои услови треба да ги задоволуваат коефициентите на карактеристичната равенка (1.3) за таа да има корени за кои важи (1.11).

Од (1.11) добиваме

$$2r_3 = r_2+r_4, \quad r_3+r_2 = r_4+r_1$$

т.е.

$$r_3 = 2r_2-r_1, \quad r_4 = 3r_2-2r_1.$$

Заменувајќи во првата равенка од (1.4) се наоѓа

$$r_2 = \frac{1}{6}(2r_1-A),$$

$$r_3 = -\frac{1}{3}(r_1+A),$$

$$r_4 = -\frac{1}{2}(2r_1+A).$$

Ако овие изрази се заменат во втората равенка од (1.4) се добива равенката

$$40r_1^2 + 20Ar_1 + 36B - 11A^2 = 0,$$

чии корени се

$$(r_1)_{1,2} = \frac{1}{20}(-5A\pm 3\sqrt{15A^2-40B}).$$

Соодветно, за останатите корени на карактеристичната равенка (1.3) следува

$$r_2 = \frac{1}{20}(-5A\pm\sqrt{15A^2-40B}),$$

$$r_3 = \frac{-1}{20}(5A\pm\sqrt{15A^2-40B}),$$

$$r_4 = -\frac{1}{20}(5A\pm 3\sqrt{15A^2-40B}).$$

Ако овие изрази ги замениме во третата равенка од (1.4) доведена во вид

$$r_2r_3(r_1+r_4)+r_1r_4(r_2+r_3) = -C$$

имаме

$$4AB - A^3 = 8C. \tag{1.12}$$

Со елиминација на r_1, r_2, r_3, r_4 од четвртата равенка на (1.4) се добива

$$11A^4+8A^2B-144B^2+1600D = 0. \tag{1.13}$$

Релациите (1.12) и (1.13) се услови кои треба да ги исполнуваат коефициентите на равенката (1.1) за таа да има решение полн куб.

1.1. Да го изразиме сега општото решение (1.5) како полн куб, а потоа да го најдеме бараното решение.

Земајќи го предвид системот (1.10) следува дека општото решение на (1.1) може да се запише во вид

$$z = \left[\frac{e^{r_4x/3}}{\sqrt[3]{6A_1}}(A_2+A_1\sqrt[3]{6\int e^{(r_1-r_2)x}\int(e^{(r_1-r_2)x}\int e^{(r_1-r_2)x}dx)dx)dx}\right]^3. \tag{1.14}$$

Користејќи ги контурните услови (1.2), константите A_1 и A_2 може да се определат од системот равенки

$$\begin{aligned} &A_1\sqrt[3]{6\int(e^{(r_1-r_2)x}\int(e^{(r_1-r_2)x}\int e^{(r_1-r_2)x}dx)dx)dx}\,\Big|_{x=b}+A_2=0,\\ &A_1\sqrt[3]{6\int e^{(r_1-r_2)x}\int e^{(r_1-r_2)x}\int e^{(r_1-r_2)x}dx)dx)dx}\,\Big|_{x=a}+A_2=0. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Системот има нетривијално решение за A_1 и A_2 ако детерминантата на системот е нула, т.е.

$$\begin{vmatrix} \sqrt[3]{6\int(e^{(r_1-r_2)x}\int(e^{(r_1-r_2)x}\int e^{(r_1-r_2)x}dx)dx)dx}\,\Big|_{x=b} & 1\\ \sqrt[3]{6\int(e^{(r_1-r_2)x}\int(e^{(r_1-r_2)x}\int e^{(r_1-r_2)x}dx)dx)dx}\,\Big|_{x=a} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

Со пресметување на детерминантата се добива

$$\sqrt[3]{6}\int\left(e^{(r_1-r_2)x}\int\left(e^{(r_1-r_2)x}\int e^{(r_1-r_2)x}dx\right)dx\right)dx\Big|_a^b = 0. \tag{1.16}$$

Ако $r_1=r_2$ следува дека

$$\int_a^b dx = 0, \text{ т.е. } b-a = 0,$$

а тоа не е можно бидејќи, по претпоставка, $a<b$.

Значи, во случај кога корените на карактеристичната равенка се меѓу себе сите еднакви, контурниот проблем (1.1), (1.2) нема ненулто решение, т.е. тој има само тривијално решение.

Ако $r_1\neq r_2$, од (1.16) следува релацијата

$$e^{(b-a)(r_1-r_2)} = 1. \tag{1.17}$$

Поради условот (1.11) сите корени се или реални или конјугирано комплексни.

Ако r_i $(i=1,2,3,4)$ се реални броеви, равенката (1.17) не може да биде исполнета.

Значи, ако корените r_i се реални, контурниот проблем (1.1) и (1.2) има само тривијално решение.

Нека r_i $(i=1,2,3,4)$ се конјугирано-комплексни и од вид

$$r_1=\alpha-i\beta,\quad r_2=\alpha-\frac{i\beta}{3},\quad r_3=\alpha+\frac{i\beta}{3},\quad r_4=\alpha+i\beta. \tag{1.18}$$

При овој облик на корените r_i $(i=1,2,3,4)$ равенката (1.17) прима вид

$$e^{\frac{2}{3}(b-a)\beta i} = 1.$$

Оттука

$$\beta = \frac{3m\pi}{b-a}, \qquad (m=\pm1,\pm2,\dots).$$

За A_2 од втората равенка на (1.15) се добива

$$A_2 = \frac{3A_1}{2i\beta}e^{-2ia\beta/3}.$$

Заменувајќи во (1.14), со директно пресметување го добиваме бараното решение во вид

$$z = D_1\left[e^{\frac{\alpha x}{3}}\sin\frac{m\pi(x-a)}{b-a}\right]^3, \tag{1.19}$$

каде што

$$D_1 = \frac{9A_1^2}{2\beta^2} e^{-\frac{3m\pi ai}{b-a}}.$$

Од првата равенка на (1.4) и (1.18) добиваме

$$\alpha = -\frac{A}{4}.$$

Според тоа, бараното решение прима вид

$$z = D_1 \left[e^{-\frac{A}{12}x} \sin \frac{m\pi(x-a)}{b-a}\right]^3. \qquad (1.20)$$

2. Контурниот проблем

$$y'' + py' + qy = 0, \qquad (2.1)$$

$$y(a) = y(b) = 0 \qquad (2.2)$$

(p,q - константи) има решение [2]

$$y = De^{-\frac{p}{2}x} \sin\frac{m\pi(x-a)}{b-a} \quad (m=\pm 1, \pm 2, \dots). \qquad (2.3)$$

Ако земеме смена $y^3=z$ во однос на z ја добиваме диференцијалната равенка од четврти ред

$$z^{iv}+6pz'''+(11p^2+10q)z''+6p(p^2+5q)z'+9q(q+2p^2)z = 0, \qquad (2.4)$$

а контурните услови (2.2) ќе поминат во контурни услови

$$z(a) = z(b) = 0 \qquad (2.5)$$

т.е. контурните услови (1.2).

Решението на равенката (2.4) што ги задоволува овие контурни услови (2.5), со обзир на смената $z=y^3$, ќе биде

$$z = C^* \left[e^{-\frac{p}{2}x} \sin\frac{m\pi(x-a)}{b-a}\right]^3.$$

Од диференцијалните равенки (1.1) и (2.4) произлегува

$$A=6p,\ B=11p^2+10q,\ C=6p(p^2+5q),\ D=9q(q+2p^2),$$

т.е.

$$z = C^* \left[e^{-\frac{A}{12}x} \sin\frac{m\pi(x-a)}{b-a}\right]^3. \qquad (2.6)$$

Од еквивалентноста на оваа формула со формулата (1.20) можеме да констатираме дека решавањето на контурниот проблем од четврти ред (1.1), (1.2) и условот решението да биде полн куб се сведува на решавање на контурен проблем од втор ред (2.1), (2.2); притоа, кубот од решението на контурниот проблем од втор ред е решение на контурниот проблем од четврти ред. Диференцијалната равенка од четврти р · (2.4) е добиена на тој начин што секое решение е куб од решение на диференцијалната равенка од втор ред (2.1).

Како специјални случаи на овој проблем се јавуваат проблемите наведени подолу.

Ако p=0 контурниот проблем (2.1), (2.2) се сведува на контурниот проблем

$$y'' + qy = 0, \quad y(a) = y(b) = 0, \tag{2.7}$$

чие решение е наведено од Э.Камке во [2] под 2.9, (а).

Контурниот проблем од четврти ред при овој специјален случај е од вид

$$z^{IV} + 10qz'' + 9q^2z = 0, \tag{2.8}$$

$$z(a) = z(b) = 0 \tag{2.9}$$

и неговото решение како трет степен од решението на контурниот проблем (2.7) е

$$z(x) = \left[\sqrt{\frac{2}{b-a}}\sin\frac{n\pi(x-a)}{b-a}\right]^3.$$

При контурниот проблем

$$y'' + qy = 0, \quad y'(a) = y'(b) = 0, \tag{2.10}$$

чие решение од Э.Камке во [2] е наведено под 2.9. (б)

$$y(x) = \sqrt{\frac{2}{b-a}}\cos\frac{n\pi(x-a)}{b-a}, \quad n \geq 1,$$

контурните услови (2.9) преминуваат во контурни услови

$$z'(a) = z'(b) = 0. \tag{2.11}$$

Решението на контурниот проблем (2.8), (2.11) врз основа на напред изнесеното претставува трет степен од решението на контурниот проблем (2.10) и гласи

$$z(x) = \left[\sqrt{\frac{2}{b-a}}\cos\frac{n\pi(x-a)}{b-a}\right]^3, \quad n \geq 1,$$

Аналогно постапувајќи може да се види дека контурните услови

$$y'(a) = \alpha y(a), \quad y'(b) = \alpha y(b), \quad (\alpha \neq 0) \tag{2.12}$$

преминуваат во контурни услови

$$z'(a) = 3\alpha z(a), \quad z'(b) = 3\alpha z(b) \tag{2.13}$$

и решението на контурниот проблем (2.8), (2.13) е

$$z(x) = \left[\cos\frac{n\pi(x-a)}{b-a} + \alpha\frac{b-a}{n\pi}\sin\frac{n\pi(x-a)}{b-a}\right]^3.$$

Подолу се наведени контурните услови за контурен проблем од втор ред, чие решение е познато, како и соодветните контурни услови за контурен проблем од четврти ред чие решение со оваа постапка, може да се добие на многу поедноставен начин.

Најнапред да ги наведеме контурните услови кои се срекаваат кај Камке [2] под 2.9 и Шапкарев [7].

ТАБЕЛА 1.

1^o	$y(a)=y(b)=0$	$z(a)=z(b)=0$
2^o	$y'(a)=y'(b)=0$	$z'(a)=z'(b)=0$
3^o	$y'(a)=\alpha y(a)$ $y'(b)=\alpha y(b) \quad \alpha\neq 0$	$z'(a)=3\alpha z(a)$ $z'(b)=3\alpha z(b)$
4^o	$y(a)=y(b)$ $y'(a)=y'(b)$	$z(a)=z(b)$ $z'(a)=z'(b)$
5^o	$y(b)=-y(a)$ $y'(b)=-y'(a)$	$z(b)=-z(a)$ $z'(b)=-z'(a)$
6^o	$y(a)=y(b)$ $y'(a)=-y'(b)$	$z(a)=z(b)$ $z'(a)=-z'(b)$
7^o	$cy(0)=y(\pi)$ $y'(0)=cy'(\pi) \quad c\neq 0,\pm 1$	$c^3z(0)=z(\pi)$ $cz'(0)=z'(\pi)$

Во табелата 2 се наведени контурни услови за равенка од втор ред што се срекаваат кај И.Шапкарев [7] и соодветните контурни услови за контурен проблем од четврти ред

ТАБЕЛА 2.

1^o	$ay'(0)+by(0)=0$ $cy'(0)+dy(\ell)=0$	$az'(0)+3bz(0)=0$ $cz'(0)+3dz(\ell)=0$
2^o	$y(0)=y'(\ell)+Ay(\ell)=0$	$z(0)=z'(\ell)+3Az(\ell)=0$
3^o	$y'(0)=y'(\ell)+Ay(\ell)=0$	$z'(0)=z'(\ell)+3Az(\ell)=0$
4^o	$y(0)=y'(\ell)-\lambda Ay(\ell)=0$	$z(0)=z'(\ell)-3\lambda Az(\ell)=0$
5^o	$ay(\ell)+by(0)=0$ $cy'(\ell)+dy'(0)=0$	$a^3z(\ell)+b^3z(0)=0$ $a^2cz'(\ell)+b^2dz'(0)=0$

Тргнувајќи од најопштите контурни услови

$$\alpha_{11}y(a)+\alpha_{12}y'(a)+\beta_{11}y(b)+\beta_{12}y'(b) = 0$$

$$\alpha_{21}y(a)+\alpha_{22}y'(a)+\beta_{21}y(b)+\beta_{22}y'(b) = 0,$$

за различни вредности на α_{ij} и β_{ij} $(i,j=1,2)$, добиени се следниве резултати кои се наведени во табела 3.

ТАБЕЛА 3.

1°	$y(a)=y'(b)=0$	$z(a)=z'(b)=0$
2°	$y'(a)=y(b)=0$	$z'(a)=z(b)=0$
3°	$y'(a)=0$ $\alpha_{21}y(a)+\beta_{21}y(b)=0$	$z'(a)=0$ $\alpha_{21}^3z(a)+\beta_{21}^3z(b)=0$
4°	$\alpha_{11}y(a)+\alpha_{12}y'(a)=0$ $\alpha_{21}y(a)+\beta_{21}y(b)=0$	$3\alpha_{11}z(a)+\alpha_{12}z'(a)=0$ $\alpha_{21}^3z(a)+\beta_{21}^3z(b)=0$
5°	$y(a)=0$ $\beta_{21}y(b)+\beta_{22}y'(b)=0$	$z(a)=0$ $3\beta_{21}z(b)+\beta_{22}z'(b)=0$
6°	$\alpha_{11}y(a)+\alpha_{12}y'(a)=0$ $y(b)=0$	$3\alpha_{11}z(a)+\alpha_{12}z'(a)=0$ $z(b)=0$
7°	$\alpha_{11}y(a)+\alpha_{12}y'(a)=0$ $y'(b)=0$	$3\alpha_{11}z(a)+\alpha_{12}z'(a)=0$ $z'(b)=0$
8°	$\alpha_{11}y(a)+\alpha_{12}y'(a)=0$ $\beta_{21}y(b)+\beta_{22}y'(b)=0$	$3\alpha_{11}z(a)+\alpha_{12}z'(a)=0$ $3\beta_{21}z(b)+\beta_{22}z'(b)=0$
9°	$\alpha_{11}y(a)+\beta_{11}y(b)=0$ $y'(b)=0$	$\alpha_{11}^3z(a)+\beta_{11}^3z(b)=0$ $z'(b)=0$
10°	$\alpha_{11}y(a)+\beta_{11}\ y(b)=0$ $\beta_{21}y(b)+\beta_{22}y'(b)=0$	$\alpha_{11}^3z(a)+\beta_{11}^3z(b)=0$ $3\beta_{21}z(b)+\beta_{22}z'(b)=0$

ЛИТЕРАТУРА

[1] ГЕОРГИЕВСКА,С. - За еден Sturm-Liouville-ов проблем од IV ред, editions speciales, sec. Equations differentialles, liv. 3(20), Скопје, 1977

[2] КАМКЕ,Э. - Спровочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, Москва, 1971

[3] КОЛЛАТЦ,Л. - Задачи на собственные значения, Москва, 1968

[4] ПЕРЧИНКОВА,Д. - Прилог кон изучувањето на хомогените проблеми со сопствени вредности при обичните линеарни диференцијални равенки, Посебни изданија, кн. 13, Скопје, 1963

[5] ПЕРЧИНКОВА,Д. - Уште за некои проблеми со сопствени вредности од IV ред, Билтен на ДМФ на СРМ, кн. XXI, Скопје, 1970

[6] ШАПКАРЕВ,И. - Една забелешка за интеграцијата на линеарните диференцијални равенки со константни коефициенти, Билтен на ДМФ на СРМ, кн. XXI, Скопје, 1970

[7] ШАПКАРЕВ,И. - За еден контурен проблем од трети ред (предадено за печат)