Годишен зборник на ПМФ ISSN 0351-7441
Том 38 (1997)
Скопје, Р.Македонија

Драган Димитровски, Роза Ацеска, Анета Илиевска

ПРИБЛИЖНО ЕДНАКВИ ИНТЕГРАЛИ ТЕОДОРЕСКУ

Айсшракш. *При граничниие задачи за системаша йарцијални равенки (1) важни се елеменшише во формулаша (3), ш.е. иншеграл од ший Коши и иншегралош Теодореску. Елеменшарношо иресмешување на овие иншеграли во конкрешни задачи може да йредсшавува особена шешкошија. Зашоа во шрудош се даваай најйрво дефиниции на йриближно еднакви комйлексни броеви и функции, а йошоа неколку леми за йриближна еднаквосш на два иншеграла од ший Коши или два иншеграла Теодореску.*

Нека е дадена система парцијални равенки од I ред со две непознати функции $U(x,y)$ и $V(x,y)$, дефинирани над една заедничка конечна област G_{x0y} од $x0y$-рамнината, затворена со глатка контура Γ=*limitG*:

$$\begin{aligned} a_1(x,y)U_x + b_1U_y + c_1V_x + d_1V_y + F(x,y,U,V) = 0 \\ a_2(x,y)U_x + b_2U_y + c_2V_x + d_2V_y + G(x,y,U,V) = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

каде F и G се дадени функции.

Познато е:

I. Дека (1) може да се напише во вид на една парцијална равенка од II ред, со елиминација на една од непознатите функции U или V.

II. Воведувајќи комплексни променливи $z = x + iy, W = U(x,y) + iV(x,y)$ и соодветни изводи, системата (1) може да се запише како една равенка од комплексна непозната функција W:

$$\Phi\left(z,\bar{z},W\left(z,\bar{z}\right),W_z,W_{\bar{z}}\right) = 0 \tag{2}$$

Вообичаена практична задача од општ вид за системата (1), или равенката (2) е следната: да се определи решение на (2), определено во Г, кое на Г = *limitG* има определена вредност $h(z,\bar{z})$. Основна појдовна формула во овие проблеми е формулата Помпеју:

$$W(z,\bar{z}) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{W(\varsigma,\bar{\varsigma})}{\varsigma - z}d\varsigma - \frac{1}{\pi}\iint_{G}\frac{\partial W}{\partial\bar{\varsigma}}\cdot\frac{d\xi d\eta}{\varsigma - z} \tag{3}$$

Ако е $W = f(z,\bar{z})$ решение на равенката (2) (ареоларна, од тип Векуа, квазилинеарна, "парцијална" со два изводи $\frac{\partial W}{\partial z},\frac{\partial W}{\partial \bar{z}}$, итн.), таа како интеграционен елемент ќе содржи произволна аналитичка функција $\Phi(z)$. Таа функција се определува од граничните услови на задачата, и при тоа е најчесто неопходно да се реши интегралот од тип Коши

$$I = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(\varsigma,\bar{\varsigma})}{\varsigma - z}d\varsigma\,, \tag{4}$$

каде $\varsigma = \xi + i\eta \in \Gamma, z \in \operatorname{int} G$; и ако $f(\varsigma,\bar{\varsigma})$ е непрекината функција од свои аргументи, според теоремата на Привалов, (4) определува една аналитичка функција од *z*; како и да се реши интегралот Теодореску

$$T_G f_{\bar{\varsigma}} = -\frac{1}{\pi}\iint_{G}\frac{f_{\bar{\varsigma}}(\varsigma,\bar{\varsigma})}{\varsigma - z}d\xi d\eta \tag{5}$$

каде $\varsigma \neq z; \varsigma, z \in G, z \notin \Gamma$, а изводот $f_{\bar{\varsigma}}$ е познат ако е познато решението $W = f(z,\bar{z})$ на (2). Практичното пресметување на (4) и (5) не се тривијална работа, така што егзактно решение на граничниот проблем е практично ретко.

При формулација и решавање на различни гранични задачи доаѓаме до потреба за приближно пресметување на интегралите (4) и (5) ([1], [2]), без оглед на тоа што полето на комплексните функции не е подредено. За таа цел потребни се неколку дефиниции на приближно еднакви комплексни броеви и функции, како и некои основни леми за нивни релации, без оглед на тоа што релацијата "<" важи само за нивниот реален и имагинарен дел. Во овој труд ги даваме овие потребни елементи. На почеток, следните дефиниции:

1. Приближно еднакви комплексни броеви. Декартови координати.

Нека се $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ два комплексни броја од иста Гаусова рамнина. За z_1 и z_2 ќе речеме дека се приближно еднакви и пишуваме

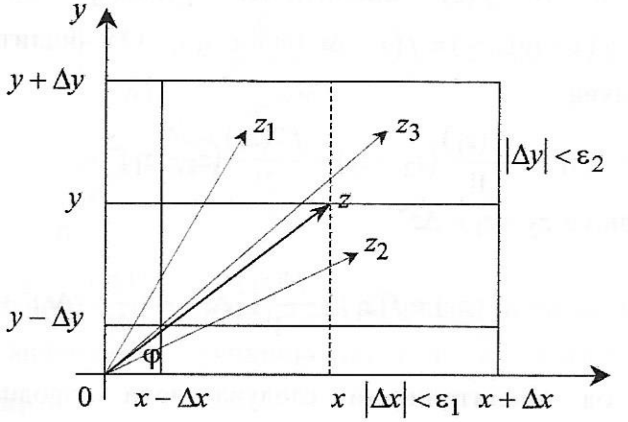
$$z_1 \doteq z_2 \Leftrightarrow x_1 \approx x_2, y_1 \approx y_2 \tag{6}$$

т.е., ако се приближно еднакви нивните реални и имагинарни делови.

Дефиниција. Нека се z_1 и $z_2 = z_1 + \Delta z$ два комплексни броја. Велиме дека $z_1 \doteq z_2$, ако $|z_2 - z_1| = |\Delta z| < \varepsilon$, т.е.

$$|(x+\Delta x) - x| = |\Delta x| < \varepsilon_1, |(y+\Delta y) - y| = |\Delta y| < \varepsilon_2, \tag{7}$$

каде $|\Delta z| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} < \sqrt{\varepsilon_1{}^2 + \varepsilon_2{}^2} < \varepsilon$

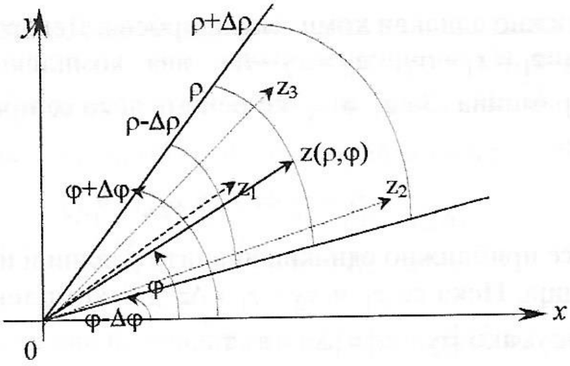


На сликата, геометриски, сите афикси $z_1, z_2, z_3, \ldots$ кои се во правоаголникот се приближно еднакви со z.

2. Поларни координати

Два комплексни броја $z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}, z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}$ се приближно еднакви ако им се приближно еднакви модулите и аргументите:

$$z_1 \doteq z_2 \Leftrightarrow \begin{matrix} |\Delta\rho| = |\rho_2 - \rho_1| < \varepsilon_1, \\ |\Delta\varphi| = |\varphi_2 - \varphi_1| < \varepsilon_2 \end{matrix} \tag{8}$$



Геометриски, тоа значи дека сите афикси што се наоѓаат во кружниот исечок, определуваат приближно еднакви комплексни броеви.

3. Приближна вредност на аналитичка функција

Нека е $W = f(z)$ аналитичка функција од z, при што $f(z_1) = f(x+iy), (z_2) = f(x \pm \Delta x + i(y \pm \Delta y))$. Од аналитичноста во z_1 и z_2 следува

$$f(z_2) = f(z_1) + \frac{f'(z_1)}{1!}(z_2 - z_1) + \frac{f''(z_1)}{2!}(z_2 - z_1)^2 + \ldots$$

или, како е $z_2 - z_1 = \Delta z$

$$f(z_2) = f(z_1) + \frac{f'(z_1)}{1!}\Delta z + \frac{f''(z_1)}{2!}(\Delta z)^2 + \ldots \qquad (9)$$

Како од аналитичноста следува дека изводите $\left|f^{(k)}(z_1)\right|$ се ограничени, тоа имаме

$$\begin{aligned} |\Delta f| = |f(z_2) - f(z_1)| &< |f'(z_1)| \cdot |\Delta z| + \frac{|f''(z_1)|}{2!} \cdot |\Delta z|^2 + \ldots \\ &< M_1 \cdot |\Delta z| + M_2 \cdot |\Delta z|^2 + \ldots + M_n \cdot |\Delta z|^n + \ldots \\ &< M_1 \cdot |\Delta z| + \sigma(|\Delta z|) \end{aligned}$$

Од (9) исто така добиваме

$$\arg(f(z_2) - f(z_1)) \approx \arg f'(z_1) + \arg(\Delta z) < \varepsilon_2 \qquad (10)$$

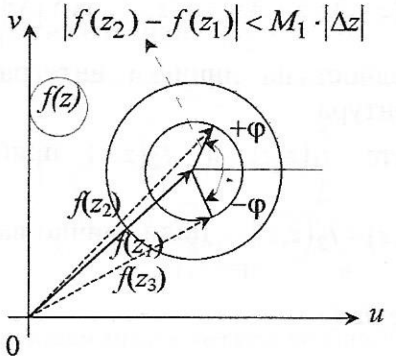
Дефиниција. Ќе речеме $f(z_2) \doteq f(z_1)$, ако:

I. $|\Delta z| < \varepsilon_1$; II. важи (10), т.е.

$$f(z_2) \doteq f(z_1) + f'(z_1)\cdot \Delta z\,, \tag{11}$$

каде $|f'(z_1)| < M, \arg \Delta f(z) \approx \varphi + \arg(\Delta z) < \varepsilon_2$

Според ова, има безброј блиски вредности на функцијата, и тоа се сите афикси $f(z_k)$ кои се во кругот со центар во $f(z_1)$, чиј радиус не надминува $\max|\ f(z_1)\ |\cdot|\Delta z|$, а аргументот се движи од $-\varphi$ до $+\varphi$.



4. Приближна вредност на функција од две комплексни променливи

Нека е $f(z,\bar{z})$ аналитичка функција по z и $\bar{z}$. Тогаш важи Тајлоровата формула

$$f(z+\Delta z, \bar{z}+\Delta\bar{z}) = f(z,\bar{z}) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\Delta\bar{z}\right) +$$

$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\Delta z)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}}\Delta z \Delta\bar{z} + \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}^2}(\Delta\bar{z})^2\right) + \sigma(\Delta z^2)$$

Како се сите парцијални изводи ограничени, што следува од аналитичноста

$$\left|\frac{1}{(m+n)!}\cdot\frac{\partial^{m+n} f}{\partial z^m \partial \bar{z}^n}\right| < k\,,$$

тоа имаме

$$\left|f\left(z+\Delta z,\bar{z}+\Delta\bar{z}\right)-f\left(z,\bar{z}\right)\right|<\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|\cdot\left|\Delta z\right|+\left|\frac{\partial f}{\partial\bar{z}}\right|\cdot\left|\Delta\bar{z}\right|+\sigma\left(\left(\Delta z\right)\right)\qquad(12)$$

и ако е $|\Delta z|=|\Delta\bar{z}|<\varepsilon,\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|<k_1,\left|\frac{\partial f}{\partial\bar{z}}\right|<k_2$, добиваме

$$\left|f\left(z+\Delta z,\bar{z}+\Delta\bar{z}\right)-f\left(z,\bar{z}\right)\right|<\left(k_1+k_2\right)|\Delta z|$$

Оценката на аргументот овде е покомплицирана и затоа ќе се задоволиме само со приближностите по модул (во недостиг на геометриска интерпретација). Даваме следна дефиниција:

$$f\left(z+\Delta z,\bar{z}+\Delta\bar{z}\right)\dot{=}f\left(z,\bar{z}\right),\text{ ако }|\Delta z|<\varepsilon\qquad(13)$$

5. <u>Приближна вредност на линиски интеграл од две различни функции по иста контура</u>

Нека се функциите $f_1\left(z,\bar{z}\right)$ и $f_2\left(z,\bar{z}\right)$ приближно еднакви по контурата Γ: $\left.f_1\left(z,\bar{z}\right)\dot{=}f_2\left(z,\bar{z}\right)\right|_{\Gamma}$. Дали слично важи и за интегралите $\oint\limits_{\Gamma}f_1\left(z,\bar{z}\right)dz$ и $\oint\limits_{\Gamma}f_2\left(z,\bar{z}\right)dz$?

Имаме

$$\left|\oint\limits_{\Gamma}f_1\left(z,\bar{z}\right)dz-\oint\limits_{\Gamma}f_2\left(z,\bar{z}\right)dz\right|=\left|\oint\limits_{\Gamma}\left(f_1\left(z,\bar{z}\right)-f_2\left(z,\bar{z}\right)\right)dz\right|<$$

$$<\oint\limits_{\Gamma}\left|f_1\left(z,\bar{z}\right)-f_2\left(z,\bar{z}\right)\right|dz<\varepsilon\oint\limits_{\Gamma}|dz|=\varepsilon L<\varepsilon_1$$

бидејќи интегралната сума $\sum\limits_{k=1}^{n}|\Delta z_k|$ тежи кон должината L на контурата Γ.

Следува:

<u>Лема.</u> За да важи:

$$\oint\limits_{\Gamma}f_1\left(z,\bar{z}\right)dz\dot{=}\oint\limits_{\Gamma}f_2\left(z,\bar{z}\right)dz\qquad(14)$$

доволно е да важи $f_1\left(z,\bar{z}\right)\dot{=}f_2\left(z,\bar{z}\right)$ во $G=int\Gamma$ и на $\Gamma=limitG$.

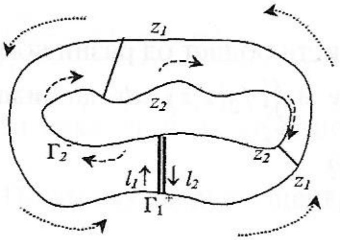
6. Приближна вредност на линиски комплексен интеграл на аналитичка функција од две комплексни променливи по две различни, но блиски контури

Кога интегралите $\oint\limits_{\Gamma_1} f\left(z_1,\overline{z_1}\right)dz_1$ и $\oint\limits_{\Gamma_2} f\left(z_2,\overline{z_2}\right)dz_2$ земени по две различни, но блиски контури се приближно еднакви?

Заради едноставност, нека е едната контура во другата. Исто така, нека се по претпоставка нивните должини приближно еднакви:

$$L_1=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\dot{x}_1^{\,2}+\dot{y}_1^{\,2}}\,dt\,,\ L_2=\int_{\tau_1}^{\tau_2}\sqrt{\dot{x}_2^{\,2}+\dot{y}_2^{\,2}}\,d\tau,\quad L_1\approx L_2\,.$$

Нека посматраме контура $\Gamma_1^+ + \Gamma_2^-$, при која Γ_1 и Γ_2 се врзани со прорез во вид на повратна отсечка $\uparrow l_1 l_2 \downarrow$.



Тогаш, интегралот по заедничка контура ќе биде

$$\oint\limits_{\Gamma_1^+ + \Gamma_2^-} f\left(\varsigma,\overline{\varsigma}\right)d\varsigma=\oint\limits_{\Gamma_1^+} f\left(z_1,\overline{z_1}\right)dz+\int\limits_{l_1} fd\varsigma-\int\limits_{l_2} fd\varsigma+$$

$$+\oint\limits_{\Gamma_2^-} f\left(z_2,\overline{z_2}\right)dz_2=\oint\limits_{\Gamma_1} fdz_1-\oint\limits_{\Gamma_2} fdz_2$$

Нека се z_1 и z_2 блиски точки респективно на контурите Γ_1 и Γ_2, така што $z_1 = z_2+\varepsilon$. Нека се функциите $f_1\left(z,\overline{z}\right)$ и $f_2\left(z,\overline{z}\right)$ соодветно блиски во z_1 и z_2, т.е. нека е $f_1=f_2+\zeta$, каде ε и ζ се мали по модул. Имаме оценка

$$\left|\oint\limits_{\Gamma_1^+ + \Gamma_2^-} f\left(\varsigma,\overline{\varsigma}\right)d\varsigma\right|=\left|\oint\limits_{\Gamma_1} f_1dz_1-\oint\limits_{\Gamma_2} f_2dz_2\right|$$

Бидејќи важи $dz_1=d\left(z_2+\varepsilon\right)=dz_2$ и $\Gamma_1\approx\Gamma_2$:

$$< \left| \oint_{\Gamma_2} (f_2 + \zeta) dz_2 - \oint_{\Gamma_2} f_2 dz_2 \right| < \oint_{\Gamma_2} |\zeta| \cdot |dz_2| =$$

$$= |\zeta| \oint_{\Gamma_2} |dz_2| = |\zeta| \cdot L_2 < \varepsilon$$

Следува

Лема: Под условите

$$1^\circ L_1 \approx L_2, \quad 2^\circ z_1 = z_2 + \varepsilon, \quad 3^\circ f_1(z_1, \overline{z_1})\Big|_{\Gamma_1} \doteq f_2(z_2, \overline{z_2})\Big|_{\Gamma_2}$$

важи
$$\oint_{\Gamma_1} f_1 dz_1 \doteq \oint_{\Gamma_2} f_2 dz_2 . \tag{15}$$

7. Двоен интеграл по иста област од разни комплексни функции

Може ли $\iint_G f_1(z, \overline{z}) dxdy$ и $\iint_G f_2(z, \overline{z}) dxdy$ да бидат блиски интеграли по комплексна вредност?

Имаме оценка

$$\left| \iint_G f_1(z, \overline{z}) dxdy - \iint_G f_2(z, \overline{z}) dxdy \right| =$$

$$= \left| \iint_G \left(f_1(z, \overline{z}) - f_2(z, \overline{z}) \right) dxdy \right| \leq$$

$$\leq \iint_G \left| f_1(z, \overline{z}) - f_2(z, \overline{z}) \right| \cdot |dx| \cdot |dy|$$

Нека е $f_1 \doteq f_2$, т.е., $f_1(z, \overline{z}) - f_2(z, \overline{z}) = \varepsilon$. Тогаш, горната разлика е

$$\leq \iint_G |\varepsilon| \cdot |dx| \cdot |dy| = |\varepsilon| \cdot areaG = |\varepsilon| \cdot M = \varepsilon_1 .$$

Следува

Лема: За да важи

$$\iint_G f_1(z, \overline{z}) dxdy \doteq \iint_G f_2(z, \overline{z}) dxdy , \tag{16}$$

доволно е да важи $f_1 \doteq f_2$ во иста област G.

8. Двоен интеграл од различни но блиски функции по различни но блиски области

Да оцениме два интеграли

$$\left|\iint\limits_{G_1} f_1(z,\bar{z})dxdy - \iint\limits_{G_2} f_2(z,\bar{z})dxdy\right| =$$

$$= \left|\iint\limits_{G_1} f_1(z,\bar{z})dxdy - \iint\limits_{G_2} f_1(z,\bar{z})dxdy + \iint\limits_{G_2} f_1(z,\bar{z})dxdy - \iint\limits_{G_2} f_2(z,\bar{z})dxdy\right| <$$

$$< \left|\iint\limits_{G_1 \setminus G_2} f_1(z,\bar{z})dxdy\right| + \iint\limits_{G_2} |f_1 - f_2| \cdot |dx| \cdot |dy|$$

Нека е f_1 аналитичка и нека f_1 и f_2 се блиски. Тогаш $|f_1| < M$ и $f_1 \doteq f_2$ или $|f_1 - f_2| < \varepsilon$. Понатаму следува оценка:

$$< M \iint\limits_{G_1 \setminus G_2} |dx| \cdot |dy| + \varepsilon \iint\limits_{G_2} |dx| \cdot |dy| < M \cdot area(G_1 \setminus G_2) + \varepsilon \cdot areaG_2$$

$$< M \cdot \varepsilon_1 + \varepsilon \cdot M_2 = \varepsilon_2$$

Следува

Лема: Под условите

$$1° |G_1 \setminus G_2| < \varepsilon; \quad 2° f_1\big|_{G_1} \doteq f_2\big|_{G_2}$$

важи
$$\iint\limits_{G_1} f_1(z,\bar{z})dxdy \doteq \iint\limits_{G_2} f_2(z,\bar{z})dxdy. \tag{17}$$

9. Приближно еднакви интеграли од тип Коши

Нека се G_1 и G_2 две области приближно еднакви по плоштина, и $\Gamma_1 = limit\,G_1$, $\Gamma_2 = limit\,G_2$. Нека се $f_1(\varsigma_1, \overline{\varsigma_1})$ и $f_2(\varsigma_2, \overline{\varsigma_2})$ две функции аналитички по Γ_1, односно Γ_2. Тогаш важи следната

Лема: Важи приближната еднаквост меѓу линиските интеграли од тип Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1}\frac{f_1\left(\varsigma_1,\overline{\varsigma_1}\right)}{\varsigma_1-z}d\varsigma_1 \doteq \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_2}\frac{f_2\left(\varsigma_2,\overline{\varsigma_2}\right)}{\varsigma_2-z}d\varsigma_2\,, \tag{18}$$

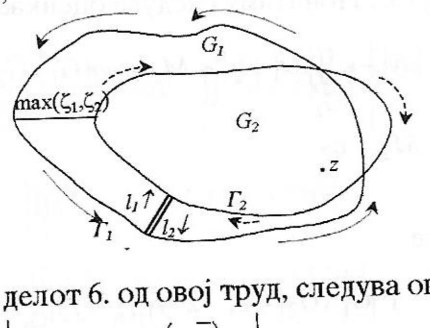
ако важат следните услови:

$$\begin{array}{ll} 1^\circ\ f_1(\varsigma_1)\doteq f_2(\varsigma_2) & 4^\circ\ z\in\operatorname{int}(G_1,G_2) \\ 2^\circ\ \varsigma_1(\Gamma_1)\doteq\varsigma_2(\Gamma_2) & 5^\circ\ areaG_1\approx areaG_2 \\ 3^\circ\ L_1(\Gamma_1)\approx L_2(\Gamma_2) & \end{array} \tag{19}$$

Доказ:
Да формираме разлика

$$\Delta = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1}\frac{f_1\left(\varsigma_1,\overline{\varsigma_1}\right)}{\varsigma_1-z}d\varsigma_1 - \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_2}\frac{f_2\left(\varsigma_2,\overline{\varsigma_2}\right)}{\varsigma_2-z}d\varsigma_2$$

и да ја посматраме по контурата $\Gamma_1^+ + \Gamma_2^-$ која ги претставува областите G_1 и G_2;



Тогаш, со оглед на делот 6. од овој труд, следува оценка:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1^+ + \Gamma_2^-}\frac{f\left(\varsigma,\overline{\varsigma}\right)}{\varsigma-z}d\varsigma\right| = |\Delta| <$$

$$< \frac{1}{2\pi}\oint_{\Gamma_1^+ + \Gamma_2^-}\left|\frac{f_1}{\varsigma_1-z}d\varsigma_1 - \frac{f_2}{\varsigma_2-z}d\varsigma_2\right|$$

Како е $\varsigma_2=\varsigma_1+\varepsilon, d\varsigma_2=d\varsigma_1$, и како f_1, f_2 се ограничени на Γ_1, Γ_2, следува

$$< \frac{1}{2\pi} Max(|f_1|,|f_2|) \oint_{\Gamma_1^+ + \Gamma_2^-} \left| \frac{1}{\varsigma_1 - z} - \frac{1}{\varsigma_2 - z} \right| d\varsigma_1 <$$

$$< \frac{1}{2\pi} \underset{\Gamma_1+\Gamma_2}{Max} |f| \oint_{\Gamma_1^+ + \Gamma_2^-} \frac{|\varsigma_2 - \varsigma_1|}{|\varsigma_1 - z|} |d\varsigma_1| <$$

$$< \frac{1}{2\pi} \underset{\Gamma_1+\Gamma_2}{Max} |f| \cdot \varepsilon \oint_{\Gamma_1^+ + \Gamma_2^-} \frac{|d\varsigma_1|}{|\varsigma_1 - z|}$$

Како интегралот $\oint_{\Gamma_1^+ + \Gamma_2^-} \frac{d\varsigma_1}{\varsigma_1 - z}$ постои $(= 2 \cdot 2\pi i)$ и интегралот $\oint_{\Gamma_1^+ + \Gamma_2^-} \frac{|d\varsigma_1|}{|\varsigma_1 - z|}$ е регуларен поради тоа што $z \in \mathrm{int}(G_1, G_2)$, следува $|\Delta| < \frac{1}{2\pi} \max |f(\varsigma)| \cdot I \cdot \varepsilon$ и како $\varepsilon = |\varsigma_1 - \varsigma_2|$ е мало, следува лемата.

10. <u>Приближно еднакви интеграли Теодореску</u>

Нека важат слични услови како во претходната лема. Да посматраме два интеграла Теодореску

$$T_{G_1} f_1 = -\frac{1}{\pi} \iint_{G_1} \frac{f_1(\varsigma_1, \overline{\varsigma_1})}{\varsigma_1 - z} d\xi_1 d\eta_1$$
$$T_{G_2} f_2 = -\frac{1}{\pi} \iint_{G_2} \frac{f_2(\varsigma_2, \overline{\varsigma_2})}{\varsigma_2 - z} d\xi_2 d\eta_2 \tag{20}$$

и да формираме разлика $\Delta = T_{G_1} f_1 - T_{G_2} f_2$. Како областите G_1, G_2 се пространи, броевите ς_1, ς_2 може да бидат многу различни, а со тоа и $f_1(\varsigma_1), f_2(\varsigma_2)$. Затоа ќе извршиме иста интегрална поделба на правоаголници $dG_i = d\xi_i d\eta_i$ со $z \in dG_i$. Ќе ги посматраме горните интеграли Теодореску врз севкупноста на овие правоаголници кои ги исполнуваат областите G_1, G_2. Ќе се повикаме на нашиот труд [1] и точка 8 од овој труд. Во секој од правоаголниците ΔG_1 и ΔG_2 ќе важи следната оценка: од $\varsigma_1 = \xi_1 + i\eta_1 = \varsigma_2 = \xi_2 + i\eta_2$, следува

$d\varsigma_1 \doteq d\varsigma_2, d\xi_1 d\eta_1 \approx d\xi_2 d\eta_2, dG_1 \approx dG_2$ и важи

$$\begin{aligned}|\Delta_k| &\le \frac{1}{\pi}\iint_{\Delta G_k} \left|f_1\left(\varsigma_1,\overline{\varsigma_1}\right)\right| \cdot \left|\frac{1}{\varsigma_1 - z} - \frac{1}{\varsigma_2 - z}\right| d\xi_1 d\eta_1 \le \\ &\le \frac{1}{\pi}\max_{\Delta G_k}(|f_1|,|f_2|)\iint_{\Delta G_k}\frac{|\varsigma_2 - \varsigma_1|}{|\varsigma_1 - z|}d\xi_1 d\eta_1 \le \\ &\le \frac{1}{\pi}\max_{\Delta G_k}|f| \cdot \varepsilon \cdot |I|\end{aligned}$$

Како $I = -\frac{1}{\pi}\iint_{\Delta G}\frac{1}{\varsigma_1 - z}d\xi_1 d\eta_1$ е елементарен интеграл Теодореску за кој покажавме дека постои во малата област ΔG_k, и во целите области G_1, G_2, тоа $|I|$ постои; ако ε е мала големина во сумата на интегралите следува дека разликата $|\Delta|$ може да се направи произволно мала. Следува:

Лема: Нека се $f_1\left(\varsigma_1,\overline{\varsigma_1}\right)$ и $f_2\left(\varsigma_2,\overline{\varsigma_2}\right)$ две аналитички функции приближно еднакви во некоја околина ΔG_k на точката z, заедничка за областите G_1, G_2. Тогаш за $(\varsigma_1,\varsigma_2) \in \operatorname{int}\Delta G_k$ може да се смета дека $1° f_1(\varsigma_1) = f_2(\varsigma_2)$ по целата област G_1, G_2. Ако уште важи :

$$\begin{aligned}&2° \, areaG_1 \approx areaG_2, \quad 3° \, \varsigma_1(\Gamma_1) \doteq \varsigma_2(\Gamma_2), \\ &4° \, L_1(\Gamma_1) \doteq L_2(\Gamma_2), \quad 5° \, z \in \operatorname{int}(G_1, G_2),\end{aligned} \tag{21}$$

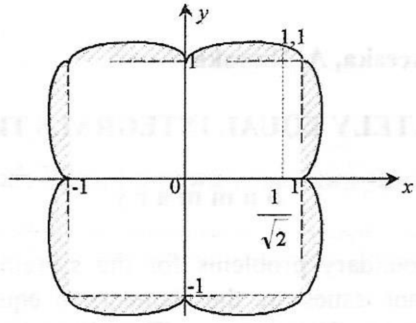
тогаш интегралите Теодореску (20) се приближно еднакви

$$T_{G_1} f_1 \doteq T_{G_2} f_2 . \tag{22}$$

Пример:

Да се пресмета интегралот Теодореску

$T_G f = -\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{d\xi d\eta}{1+\varsigma^n(\varsigma - 1 - iy)(\varsigma + 1 - iy)(\varsigma - i - x)(\varsigma + i - x)} \cdot \frac{1}{\varsigma - z}$ каде областа G е дадена со внатрешноста на кривата Γ: $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$ (слика)



или во поларни координати Г: $\rho = \dfrac{1}{\sqrt{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi}}$.

Куса анализа на кривата Γ дава дека таа е опишана околу единичниот квадрат со максимално отстапување во

$$4x^3 + 4y^3y' = 2x + 2yy', \quad y' = 0, \quad x^2 = \frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow y^4 - y^2 - \frac{1}{4} = 0, \quad y = \pm\sqrt{1{,}21} = \pm 1{,}1$$

Подинтегралната функција

$$f\left(\varsigma, \bar{\varsigma}\right) = \frac{1}{1 + \varsigma^n(\varsigma - 1 - iy)(\varsigma + 1 - iy)(\varsigma - i - x)(\varsigma + i - x)}$$ во внатрешноста на

квадратот $|x| < 1, |y| < 1$, поради ς^n е блиска до 1. По самиот квадрат
$\varsigma_1 = 1 + iy, \varsigma_2 = 1 + iy, \varsigma_3 = x - i, \varsigma_4 = x + i, \quad -1 \le x \le +1, \quad -1 \le y \le +1$

$f(\square)$ е пак единица. Како кривата Γ има max за $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}; y_{\max} \approx 1{,}1;$ тоа

$f(\Gamma) \approx f(\square)$. Затоа $T_G f$ може да се замени приближно со $T\square 1$, кој лесно се пресметува:

$$T_G f\left(\varsigma, \bar{\varsigma}\right) \doteq \frac{A - z}{-i\pi} \ln \frac{A^2 - z^2}{\bar{A}^2 - z^2}, \quad A = a + ib = 1 + i$$

Литература

[1] D.Dimitrovski, Roza Aceska: Un calcul immédiat de l'intégrale Théodorescu, год.35, ПМФ, Мат. Инст., том 37 (1996), Скопје, Р.Македонија, pp.13-27

[2] И. Н. Векуа: *Обобщенные аналитические функции*, "Физматгиз", Москва, 1959, pp. 227-233

[3] Ф. Д. Гагов: *Краевые задачи*, "Физматгиз", Москва, 1963, pp. 418-462

D. Dimitrovski, R. Aceska, A. Ilievska

APPROXIMATELY EQUAL INTEGRALS THEODORESCU

Summary

When treating the boundary problems for the system of partial differential equations (1) important issues are the elements in equation (3), i.e. Cauchy-type integral and integral Theodorescu. The elementary calculation of these integrals in particular problems can be difficult task. Therefore, at the beginning of this paper we give definitions of approximately equal complex numbers and functions, followed by few lemmas for approximate equivalence of two Cauchy – type integrals or two integrals Theodorescu.