Годишен зборник на ПМФ
Том 38 (1997)
Скопје, Р.Македонија

ISSN 0351-7441

Драган Димитровски[1], Дана Прелиќ[2], Јасмина Димитрова[2]

[1]Институт за математика, Природно-математички факултет, Скопје
[2]Институт за биологија, Природно-математички факултет, Скопје

МЕТОДА НА ИТЕРАЦИИ ЗА СИСТЕМОТ РАВЕНКИ VOLTERRA

Вовед. Да го набљудуваме најпростиот случај на еколошкиот систем Volterra на взаемно дејство на два вида, од кои првиот x_1 е предатор (ловец), а вториот x_2 е плен. Тогаш системот равенки Volterra гласи:

$$\frac{dx_1}{dt} = K_1 x_1 - a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = K_2 x_2 - a_{21} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 \tag{1}$$

каде знакот "+" во првата равенка при коефициентот значи дека зголемената бројност x_2 ја зголемува и бројноста на предаторот x_1; и знакот "-" во втората равенка при a_{21} значи дека зголемената бројност на x_1 ја намалува бројноста на x_2. a_{11} и a_{22} се внатрешни отпори, а K_1 и K_2 се коефициенти на идеално малтусово размножување. Надворешните фактори $f_1(t)$ и $f_2(t)$ овде не се земени предвид.

Во врска со системот (1) постојат три главни групи проблеми:

I. Системот (1) да се состави од експериментални податоци. Треба да се определат коефициентите a_{ik}, K_j од некои мерења на бројноста

$$x_{11}, x_{12}, \cdots\cdots x_{1n}$$
$$x_{21}, x_{22}, \cdots\cdots x_{2n} \tag{2}$$

при што изводот се заменува со

$$\frac{dx_i}{dt} \approx \frac{\Delta x_i}{\Delta t_i}, \quad (3)$$

се пресметуваат разликите $\Delta x_i = x_{i+1}-x_i$ за соодветни времиња Δt_i и (2) и (3) се заменуваат во (1). Непознатите K_j и a_{ij} се определуваат или по метода на најмали квадрати, или по некој друг линеарно-алгебарски пат.

II. Особено тежок проблем е системот (1) генерално да се реши. Тоа во општ случај не е можно. Затоа се прибегнува кон:

- или оценка на решенијата x_1, x_2
- или само локално решение, во некој мал временски интервал

$$t_0 - h \le t \le t_0 + h. \quad (4)$$

Ова последново се прави со класичната метода на Пикар на сукцесивните апроксимации [1] која дава решение конвергентно во еден релативно мал интервал, а ретко за целото време T_1, T_2 на животот на едниот или другиот вид $x_{1,2}$.

III. Затоа теоретската екологија системот (1) го третира исклучително квалитативно низ оценка на важни елементи како:

- степен на компетиција (однос "предатор"-"плен")
- биолошки циклуси и периоди на учесничките во компетицијата
- прогноза на резултатите од животната борба ([2], [3]).

Во достапните литературни податоци не се среќаваат поопшти приоди кон II, освен по методата на Пикар на едно по друго приближување. На пример, не сме сретнале поопштата метода - **метода на итерации**, да се ползува во еколошките равенки.

Целта на овој труд ќе биде:

А. Доказ дека (1) може да се решава и со итерации, што е многу поопшто; и

Б. Споредба меѓу апроксимации и итерации;

При тоа основен резултат ќе биде сведување на решението (x_1, x_2) на (1) врз Гомперцовите функции.

Метода на сукцесивни апроксимации во системот Volterra (1)

Нека е даден системот Volterra (1) за взаемен однос на два вида со почетни услови:

$$\text{за } t = t_0,\ x_1(0) = x_1^0,\ x_2(0) = x_2^0, \tag{5}$$

каде t_0 е почеток на мерењето. Притоа, за некое одминато време t=0 ќе земеме дека почетните популации се $x_{1,0}$, $x_{2,0}$ ("родители").

Познато е дека според теоремата на Пикар решението (x_1, x_2) се добива како $\lim\limits_{n\to\infty}$ од нејзините апроксимации во интегрално - рекурзивна форма

$$\begin{aligned} x_1^{[n]} &= x_1^0 + \int_{t_0}^{t}\left[K_1 x_1^{[n-1]} - a_{11}\left(x_1^{[n-1]}\right)^2 + a_{12}x_1^{[n-1]}x_2^{[n-1]}\right]dt \\ x_2^{[n]} &= x_2^0 + \int_{t_0}^{t}\left[K_2 x_2^{[n-1]} - a_{11}x_1^{[n-1]}x_2^{[n-1]} - a_{22}\left(x_2^{[n-1]}\right)^2\right]dt \end{aligned} \tag{6}$$

добиени од интегралните равенки

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1^0 + \int_{t_0}^{t}\left[K_1x_1 - a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2\right]dt \\ x_2(t) &= x_2^0 + \int_{t_0}^{t}\left[K_2x_2 - a_{21}x_1x_1 - a_{22}x_2^2\right]dt \end{aligned} \tag{7}$$

Така, првата апроксимација ќе изнесува

$$\begin{aligned} x_1^I &= x_1^0 + \int_{t_0}^{t}\left[K_1x_1^0 - a_{11}\left(x_1^0\right)^2 + a_{12}x_1^0x_2^0\right]dt = \\ &= x_1^0 + \left[K_1x_1^0 - a_{11}\left(x_1^0\right)^2 + a_{12}x_1^0x_2^0\right](t - t_0) \end{aligned} \tag{8}$$

и аналогно

$$x_2^I = x_2^0 + \left[K_2x_2^0 - a_{22}\left(x_2^0\right)^2 - a_{21}x_1^0x_2^0\right](t - t_0)$$

Ова се линеарни функции од времето t во обликот

$$\begin{aligned} x_1^I &= A_1 + B_1(t-t_0) \\ x_2^I &= \alpha_1 + \beta_1(t-t_0) \end{aligned} \tag{9}$$

Втората апроксимација ќе гласи

$$x_1^{II} = x_1^0 + \int_{t_0}^{t}\left[K_1 x_1^I - a_{11}\left(x_1^I\right)^2 + a_{12}x_1^I x_2^I\right]dt =$$

$$= x_1^0 + \int_{t_0}^{t}\left\{\begin{matrix}\left[K_1\left(A_1 + B_1(t-t_0)\right)\right] - a_{11}\left[A_1 + B_1(t-t_0)\right]^2 + \\ +a_{12}\left[A_1 + B_1(t-t_0)\right]\left[A_2 + B_2(t-t_0)\right]\end{matrix}\right\}dt =$$

$$= A_1 + K_1 A_1(t-t_0) + K_1 B_1\frac{(t-t_0)^2}{2} - a_{11}\left[\begin{matrix}A_1^2(t-t_0) + 2A_1B_1\dfrac{(t-t_0)^2}{2} + \\ +B_1^2\dfrac{(t-t_0)^3}{3}\end{matrix}\right] +$$

$$+a_{12}\left[A_1A_2(t-t_0) + A_1B_2\frac{(t-t_0)^2}{2} + B_1A_2\frac{(t-t_0)^2}{2} + B_1B_2\frac{(t-t_0)^3}{3}\right] =$$

$$= A_2 + B_2(t-t_0) + C_2(t-t_0)^2 + D_2(t-t_0)^3$$

и аналогно

$$x_2^{II} = \alpha_2 + \beta_2(t-t_0) + \gamma_2(t-t_0)^2 + \delta_2(t-t_0)^3 \tag{10}$$

итн. Со индукција добиваме дека n-та апроксимација се полиномите

$$\begin{aligned} x_1^{[n]}(t) &= \sum_{K=0}^{2n+1} A_{1,K}(t-t_0)^K \\ x_2^{[n]}(t) &= \sum_{K=0}^{2n+1} B_{2,K}(t-t_0)^K \end{aligned} \tag{11}$$

чиишто коефициенти можат да се добијат на горниот начин опишан меѓу (5), (6), (7), (8), (9) и (10).

Точното решение на (1) се добива со

$$x_1(t) = \lim_{n\to\infty} x_1^{[n]}(t)$$
$$x_2(t) = \lim_{n\to\infty} x_2^{[n]}(t) \tag{12}$$

каде полиномите (11) се претвораат во редови кои конвергираат; и според теоремата на Пикар, исто така важи во интервалот

$$t_0 - h \le t \le t_0 + h \tag{13}$$

каде пикаровото ограничување h е определено со

$$h = \min\left[a, \frac{b}{M}\right] \tag{14}$$

каде a и b се граници на мерењето во некој временски интервал на експериментот

$$0 \le a \le T$$
$$a \le b \le T + \Delta T \tag{15}$$

а M е максимум на десните страни во (1), кои се

1^0. непрекинати на $[a, b]$

2^0. бидејќи се квадратни форми, тие на [a, b] го задоволуваат Липшицовиот услов. Бидејќи $x_1(t)$, $x_2(t)$ се ограничени за биолошките растења, важи

$$|x_1| \le m_1, |x_2| \le m_2, \text{ и}$$
$$M_1 = Max\left(K_1x_1 - a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2\right) \tag{16}$$

(аналогно за M_2), па добиваме

$$M_1 \le K_1m_1 + |a_{11}|m_1^2 + |a_{12}|m_1m_2$$
$$M_2 \le K_2m_2 + |a_{21}|m_1m_2 + |a_{22}|m_2^2 \tag{17}$$

и $$M = Max(M_1, M_2)$$

Затоа според теоремата Пикар бројот

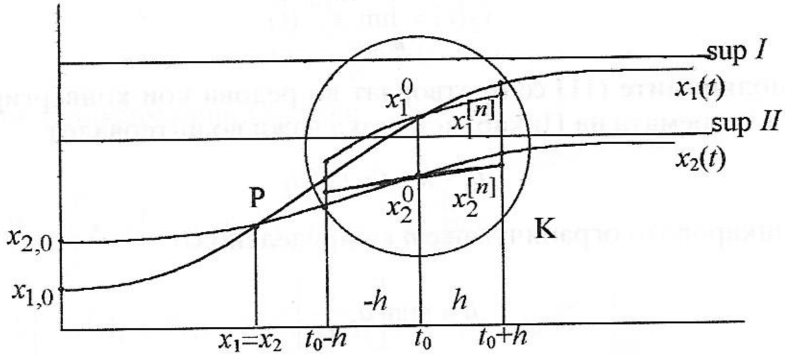
$$h = \frac{b}{M_1 \text{ или } M_2} \tag{18}$$

ќе биде мал, па така итерациите важат **локално** во мал правоаголник околу t_0:

$$t_0 - h \le t \le t_0 + h$$

или

$$|t - t_0| \le h \tag{19}$$



На сликата се прикажани:

- $x_1(t)$, $x_2(t)$ - теоретска крива на бројноста на видовите во компетиција.
- sup I, sup II - нивни теоретски супремуми (врвни вредности)
- $x_1^{[n]}, x_2^{[n]}$ приближни решенија добиени со апроксимации во мал интервал од -h до +h.
- t_0 - време на почеток на експериментот
- $x_{1,0}; x_{2,0}$ "родители" - почетни вредности на бројноста
- P - точка во која предаторот ќе го достигне по бројност пленот
- [t_0 - h, t_0 + h] - интервал во кој важат нашите пресметки
- K - круг на конвергенцијата на нумеричките постапки (5) - (18).

Може да се заклучи дека постапката е лесна, но дека решението не го опфаќа целиот период на компетиција и, уште помалку, целиот животен циклус на видовите $x_1(t)$, $x_2(t)$.

Затоа се поставува прашањето дали има друга метода, не многу покомплицирана од горната, која ќе даде поширок интервал на конвергенција. Одговорот е :

Метода на итерации за нелинеарниот систем равенки Volterra

За интегралните равенки (3) ги поставуваме истите низи (6) со почетни услови (5), но истовремено од равенката (1) поставуваме и прв интеграл.

$$\frac{dx_1}{x_1} = (K_1 - a_{11}x_1 + a_{12}x_2)dt = L_1(x_1, x_2)dt$$
$$\frac{dx_2}{x_2} = (K_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2)dt = L_2(x_1, x_2)dt \tag{1*}$$

следува

$$\ln x_1 = \ln C_1 + \int_{t_0}^{t} (K_1 - a_{11}x_1 + a_{12}x_2)dt$$

$$\ln x_2 = \ln C_2 + \int_{t_0}^{t} (K_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2)dt$$

Од каде по антилогаритмирањето и определувањето на интеграционите константи го добиваме првиот интеграл:

$$x_1 = x_1^0 e^{\int_{t_0}^{t}(K_1 - a_{11}x_1 + a_{12}x_2)dt}$$
$$x_2 = x_2^0 e^{\int_{t_0}^{t}(K_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2)dt} \tag{20}$$

Ќе се обидеме за решението (1) со итерации, да го зголемиме кругот K. За таа цел треба да се провери дали за интегралните оператори (7) важи принципот на фиксна точка, т.е. дали е исполнето неравенството

$$\left|x_1^{[n]} - x_1^{[n-1]}\right| \le q_1^n \left|x_1^1 - x_1^0\right|, |q_1| \le 1$$
и
$$\left|x_2^{|n|} - x_2^{|n-1|}\right| \le q_2^n \left|x_2^1 - x_2^0\right|, |q_2| \le 1 \tag{21}$$

Ако од низите

$$x_1^{[n]} = x_1^0 + \int_{t_0}^{t} \left[K_1 x_1^{[n-1]} - a_{11}\left(x_1^{[n-1]}\right)^2 + a_{12} x_1^{[n-1]} x_2^{[n-1]} \right] dt$$

$$x_1^{[n-1]} = x_1^0 + \int_{t_0}^{t} \left[K_1 x_1^{[n-2]} - a_{11}\left(x_1^{[n-2]}\right)^2 + a_{12} x_1^{[n-2]} x_2^{[n-2]} \right] dt$$

формираме разлика по апсолутна вредност

$$\left|x_1^{[n]}-x_1^{[n-1]}\right|\le K_1\int_{t_0}^{t}\left|x_1^{[n-1]}-x_1^{[n-2]}\right|dt+|a_{11}|\int\left|\left(x_1^{[n-1]}\right)^2-\left(x_1^{[n-2]}\right)^2\right|dt$$
$$+|a_{12}|\int_0^t\left|x_1^{[n-1]}x_2^{[n-1]}-x_1^{[n-2]}x_2^{[n-2]}\right|dt \qquad (22)$$

каде лесно ги изведуваме следните оценки

$$\left|\left(x_1^{[n-1]}\right)^2-\left(x_1^{[n-2]}\right)^2\right|\le\left|x_1^{[n-1]}+x_1^{[n-2]}\right|\left|x_1^{[n-1]}-x_1^{[n-2]}\right|\le$$
$$\le 2Max(|x_1|,|x_2|)\left|x_1^{[n-1]}-x_1^{[n-2]}\right|$$

и

$$\left|x_1^{[n-1]}-x_2^{[n-1]}-x_1^{[n-2]}x_2^{[n-2]}\right|=$$
$$=\left|x_1^{[n-1]}x_2^{[n-1]}-x_1^{[n-1]}x_2^{[n-2]}+x_1^{[n-1]}x_2^{[n-2]}-x_1^{[n-2]}x_2^{[n-2]}\right|\le$$
$$\le Max|x_1|\left|x_2^{[n-1]}-x_2^{[n-2]}\right|+Max|x_2|\left|x_1^{[n-1]}-x_2^{[n-2]}\right|$$

од каде добиваме оценка

$$\left|x_1^{[n]}-x_1^{[n-1]}\right|\le K_1\int_{t_0}^{t}\left|x_1^{[n-1]}-x_1^{[n-2]}\right|dt+$$
$$+\int_{t_0}^{t}|a_{11}|2Max(|x_1|,|x_2|)\left|x_1^{[n-1]}-x_1^{[n-2]}\right|dt+ \qquad (23)$$
$$+\int_{t_0}^{t}|a_{12}|Max(|x_1|,|x_2|)\left[\left|x_2^{[n-1]}-x_2^{[n-2]}\right|+\left|x_1^{[n-1]}-x_1^{[n-2]}\right|\right]dt$$

Ако оценката (22) ја примениме на (23) уште еднаш, имаме и втори интеграли

$$\left|x_1^{[n]}-x_1^{[n-1]}\right| \le K_1^2 \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t}\left|x_1^{[n-2]}-x_1^{[n-3]}\right| dt^2 +$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t}\left(2Max(|x_1|,|x_2|)|a_{11}|\right)^2\left|x_1^{[n-2]}-x_1^{[n-3]}\right| dt^2 \tag{24}$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t}|a_{12}|^2\left\{(Max|x_1|)^2\left|x_2^{[n-2]}-x_2^{[n-3]}\right|+\left(Max|x_2|^2\right)\left|x_1^{[n-2]}-x_1^{[n-3]}\right|\right\} dt^2$$

Ако мајорациите (23) и (24) ги продолжиме n-1 пати, ќе добиеме n интеграли $\int_{t_0}^{t}$, што ќе доведе до факториелна функција.

$$\left|x_1^{[n]}-x_1^{[n-1]}\right| \le \int_{t_0}^{t} dt \int_{t_0}^{t} dt \int_{t_0}^{t} dt \cdots\cdots \int_{t_0}^{t} K_1^n\left|x_1^I-x_1^0\right| dt + \ldots\ldots$$

или

$$\left|x_1^{[n]}-x_1^{[n-1]}\right| \le K_1^n \frac{(t-t_0)^n}{n!}\left|x_1^I-x_1^0\right| +$$

$$+\left(2Max(|x_1|,|x_2|)|a_{11}|^2\right)^n \frac{(t-t_0)^n}{n!}\left|x_1^I-x_1^0\right| +$$

$$+|a_{12}|^n\left[(Max|x_1|)^n+(Max|x_2|)^n\right]\frac{(t-t_0)^n}{n!}\underset{i=1,2}{Max}\left|x_i^I-x_i^0\right|$$

или

$$\left|x_1^{[n]}-x_1^{[n-1]}\right| \le \left[K_1^n+(2Max|x_i|)^n|a_{11}|^n+|a_{12}|^n(2Max|x_i|)^n\right]\frac{(t-t_0)^n}{n!}\left|x_1^I-x_1^0\right| \quad \ldots(25)$$

или $$\left|x_1^{[n]}-x_1^{[n-1]}\right| \le q_1^n\left|x_1^I-x_1^0\right| \tag{26}$$

каде

$$q_1^n=\frac{K_1^n+\left(|a_{11}|^n+|a_{12}|^n\right)(2Max|x_i|)^n}{n!}(t-t_0)^n \le 1 \tag{27}$$

бидејќи факториелната функција е посилна од секоја експоненцијална.

Од (26) и (27) следува дека операторот (7) е оператор на контракција. Аналогно се покажува и (25) за (x_2). Тоа значи дека за (7) важи принципот на фиксна точка т.е. низите (6) се конвергентни и тоа точно тежат кон решението на (1) под услови (5).

Тоа значи дека важат итерации во системот (1), т.е. и во нејзиниот прв интеграл (20). Ако појдеме од равенките (7), нив ќе ги наречеме прва итерација. Заменувајќи ги сами во себе, имаме втора итерација.

$$x_1^{II} = x_1^0 e^{\int_{t_0}^{t} \left(K_1 - a_{11} x_1^0 e^{t_0} \int^{t} (K_1 - a_{11} x_1 + a_{12} x_2) dt + a_{12} x_2^0 e^{t_0} \int^{t} (K_2 - a_{21} x_1 - a_{22} x_2) dt \right)}$$

Или, ако со (1*) ги означиме линеарните функции од x_1, x_2 под интегралите, добиваме приближно решение преку Гомперцови функции, брзи по конвергенција и лесни за таблично пресметување.

$$\begin{aligned} x_1^{II} &= x_1^0 e^{\int_{t_0}^{t} K_1 dt \; - \int_{t_0}^{t} a_{11} x_1^0 e^{\int_{t_0}^{t} L_1(x_1,x_2) dt} dt \; + \int_{t_0}^{t} a_{12} x_2^0 e^{\int_{t_0}^{t} L_2(x_1,x_2) dt} dt} \\ x_2^{II} &= x_2^0 e^{\int_{t_0}^{t} K_2 dt \; - \int_{t_0}^{t} a_{21} x_2^0 e^{\int_{t_0}^{t} L_1(x_1,x_2) dt} dt \; - \int_{t_0}^{t} a_{22} x_1^0 e^{\int_{t_0}^{t} L_2(x_1,x_2) dt} dt} \end{aligned} \qquad (28)$$

Бидејќи неравенката (27) е точна за секое, t, t_0, и не фигурира никакво x, заради тоа следува дека формулите (28) важат за секое t, т.е. за целиот животен циклус и компетиција на видовите $x_1(t)$, $x_2(t)$. Поисцрпно за методата на итерации во математиката види во [4].

Литература

[1] Picard Émil (1878): Les approximaticus successives, C.R. Acad. Paris.

[2] Vito Volterra (1926): Théorie mathématique de la lutte pour la vie, Paris, Gauthier-Villars.

[3] Смит Дж. (1976): Модели в Экологии, "Мир", Москва.

[4] Димитровски, Д. (1995-1996): Методи на итерации. Посебни изданија на Инст. мат. ПМФ Скопје, Т.23, 24, 25.

Dragan Dimitrovski[1], Dana Prelić[2], Jasmina Dimitrova[2]

[1]*Institute of Mahtematics, Faculty of Natural Sciences, Skopje*
[2]*Institute of Biology, Faculty of Natural Sciences, Skopje*

MÈTHODE DES ITTÉRATIONS APPLIQUÉ AUSYSTÈME DES ÉQUATIONS ÉCOLOGIQUES VOLTERRA

-RÉSUMÉ-

Le système ècologique de Vito Volterra (1) qui décrit les réelations mutueles des n espèces, conténant les équations non-linéaires, est habituellement traité au moyen des approximations successives de Emil Picard. Ce mèthode classique, qui comprend un intervale de la validité $[t_0 - h; t_0 + h]$, depend essentiellement de *h*, ($h = Min\left(a, \frac{b}{M}\right)$), M=Max$\left(k_i x_i - \sum_{i,k=1}^{n} x_i x_k\right)$, et il ne peut pas être suffisament grand, qu' exige la vie $x_i(t)$ d'une espèce concourente. Ainsi les approximations de Picard donent les résultats numériques corrects quant aux espèces $x_i(t)$ seulement dans l'intèrieur du cercle de l' image, qui est loin d'être capable de couvrir la vie entière $[t_0, T_i]$ de chaque espèce.

C'est pourquoi dans cet article nous faisons un essai de remplacer les approximations de Picard, ayant une valeur évidement locale, avec un mèthode plus large des ittérations fondées sur la Théorie du point fixe. Le résultat essentiel est:

I. Que le procédé s'en va sans difficulte
II. Que le procédé des intègrales successives converge
III. Que les valeurs $x_i(t)$ sont données par les foncions de Gompertz.