Годишен зборник на ПМФ
Том 38 (1997)
Скопје, Р.Македонија

ISSN 0351-7441

Драган Димитровски[1], Дана Прелиќ[2], Јасмина Димитрова[2]

[1]*Институт за математика, Природно-математички факултет, Скопје*
[2]*Институт за биологија, Природно-математички факултет, Скопје*

ОБОПШТЕНИ ТРИГОНОМЕТРИИ ОД ВТОР РЕД СО ПРИМЕНА ВО ЕКОЛОШКИТЕ ИСТРАЖУВАЊА НА ПОПУЛАЦИИТЕ

Апстракт. *Методот на Бернули-Ферхилст за предвидување и опишување на природните периодични осцилации на биолошките видови е премногу идеалистичен за да се примени во автентични услови. Бидејќи не може да се постигне целосна изолација на видовите во еден вистински еко-систем, методот (2) кој содржи* $f(t)=\sum_{i=1}^{n} f_i(t)$ *и на тој начин ги вклучува различните надворешни влијанија е пореалистичен.*
Во трудот е предложено решение врз основа на прикажаната математичка анализа на решавањето на (2) преку генералната линеарна тригонометрија од II ред. Во овој случај, покрај монотоноста, и осцилаторноста, можни се променливи амплитуди, дури и нерегуларна осцилаторност како и нееднакви периоди. За стабилна биоценоза ($A(t)=const=A$) *се добиваат генерални хармониски осцилации* $\cos\sqrt{A}t$, $\sin\sqrt{A}t$, *со периоди* $T=\dfrac{2\pi}{\sqrt{A}}$.

I. Вовед

Ако математички се набљудува само еден изолиран биолошки вид во неговата популација, во смисла на математичка идеализација на проблемот, се доаѓа до еден од првите модели во математичката биологија, равенката Бернули-Ферхилст

$$\frac{dx}{dt} = Kx - \lambda x^2 \tag{1}$$

каде $x(t)$ е бројноста на видот, K е коефициентот на неговото природно и идеално размножување, а λ е коефициент на внатрешен отпор (или уште коефициент на внатрешна компетиција на видот).

Познато е дека равенката (1) има само монотоно растечки решенија (логистичка крива), која што се ближи кон својот супремум даден со $\dfrac{K}{\lambda}$.

Тоа значи дека равенката (1) како модел не е во состојба да ги предвиди и опише природните периодични осцилации на видот, кои се неизбежна појава, бидејќи идеален случај на малтусово растење во природни услови се јавува многу ретко.

Затоа, природно неопходно е (1) да се замени со пореален модел, во кој ќе постои член што ќе регулира некаква периодичност во дадени услови. Нека на бројноста $x(t)$ и нејзината промена $\dfrac{dx}{dt}$ влијае некој збирен фактор $f(t)$, што ќе ги претставува збирните надворешни влијанија, во прв ред, влијанијата предизвикани од сезонските измени на климатските фактори. Така што од идеалниот модел (1), пореален би бил моделот

$$\frac{dx}{dt} = Kx - \lambda x^2 + f(t) \tag{2}$$

кој математички гледано е една равенка Рикати.

Во овој труд ќе биде покажано кога и како равенката (2) ќе има осцилаторни и периодични решенија; и како периодата зависи од $k, \lambda, f(t)$; кога е едногодишна или почеста, правилна или неправилна.

II. Нелинеарна равенка Рикати и соодветна линеарна равенка од II ред

Ако во равенката (2) воведеме нова непозната функција $y(t)$ со смената

$$x = -\frac{1}{(-\lambda)} \frac{\dot{y}}{y} \tag{3}$$

која се препорачува од теоријата, и ако пресметаме извод

$$\dot{x} = \frac{1}{\lambda} \frac{\ddot{y}y - \dot{y}^2}{y^2} \tag{4}$$

заменуваме (3) и (4) во (2) добиваме

$$\frac{1}{\lambda}\left[\frac{\ddot{y}}{y} - \frac{\dot{y}^2}{y^2}\right] = K\frac{1}{\lambda}\frac{\dot{y}}{y} - \lambda\frac{1}{\lambda^2}\frac{\dot{y}^2}{y^2} + f(t)$$

од каде по соодветни поништувања имаме

$$\frac{\ddot{y}}{y} = K\frac{\dot{y}}{y} + \lambda f(t)$$

и добиваме, ослободувајќи се од именителот, линеарна равенка од II ред

$$\ddot{y} - K\dot{y} - \lambda y f(t) = 0 \tag{5}$$

Како што се знае од теоријата, оваа равенка може да се сведе на канончен облик со смената

$$y = Ze^{\frac{1}{2}\int K dt} \tag{6}$$

каде $Z = Z(t)$ е нова (трета) непозната функција. Наоѓајќи од (6) изводи

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \left(\dot{Z} + \frac{K}{2}Z\right)e^{\frac{K}{2}t} \\ \ddot{y} &= \left(\ddot{Z} + K\dot{Z} + \frac{K^2}{4}Z\right)e^{\frac{K}{2}t} \end{aligned} \tag{7}$$

и ако изводите (7), со смената (6), ги заменуваме во (5) добиваме

$$e^{\frac{K}{2}t}\left[\ddot{Z} + K\dot{Z} + \frac{K^2}{4}Z\right] - K\left[\dot{Z} + \frac{K}{2}Z\right]e^{\frac{K}{2}t} - \lambda f(t)e^{\frac{K}{2}t}Z = 0$$

или, по кратењето

$$\ddot{Z}-\left(\frac{K^2}{4}+\lambda f(t)\right)Z=0 \tag{8}$$

Добиваме линеарна равенка од II ред во каноничен облик, т.н. равенка на Хил, за која важи основниот критериум за осцилаторност:

Теорема: Ако во каноничниот облик

$$\ddot{Z}+A(t)Z=0 \tag{9}$$

важат условите

I. 1° $A(t)\geq 0$

2° интегралот $\int_0^{t=\infty} A(t)dt=\infty$ дивергира

тогаш сите решенија на (9) се осцилаторни.

II. Ако е $A(t)\leq 0$, сите решенија се монотони.

Со оглед на предзнакот минус во линеарниот член на равенката (8), за осцилаторни решенија мора да важи

$$\frac{K^2}{4}+\lambda f_{(t)}\leq 0 \tag{10}$$

што значи дека мора да има негативни надворешни влијанија $f(t)$ во равенката (2), и (со оглед дека е $\lambda\geq 0$)

$$f(t)\leq -\frac{K^2}{4\lambda} \tag{11}$$

т.е. за да има осцилаторни решенија мора да има не така мали збирни влијанија, во секој случај помали од $-K^2/4\lambda$:

$$f(t)=f_1+f_2+f_3+\cdots\cdots+f_n=\sum_{k=1}^{n}f_k\leq -\frac{K^2}{4\lambda} \tag{12}$$

кои во равенката (2) ја намалуваат десната страна, и со тоа ја нарушуваат монотоноста на решенијата. Освен условот (11), може да важи и

$$\int_{0}^{t=\infty}\left(\frac{K^2}{4}+\lambda\left|f(t)\right|\right)dt=+\infty \tag{13}$$

т.е. $f(t)$ мора да биде по ранг помал од линеарната функција $\left(-K^2/4\lambda\right)t$; $t \to +\infty$

Ако е $f(t) \geq -\dfrac{K^2}{4\lambda}$, решенијата по $Z_{(t)}$ ќе бидат монотони. Граничниот случај меѓу осцилаторни и монотони решенија ќе настапи ако е $f(t) = -\dfrac{K^2}{4\lambda}$. Ако ова го замениме во равенката (2), добиваме

$$\frac{dx}{dt}=Kx-\lambda x^2-\frac{K^2}{4\lambda}=-\frac{1}{4\lambda}\left[4\lambda^2x^2+K^2-4\lambda Kx\right]$$

или

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{1}{4\lambda}(2\lambda x-K)^2$$

една специјална равенка Рикати која може да се реши квадратурно со смената $2\lambda x-K=V$, $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{2\lambda}\dfrac{dV}{dt}$ и следува решение

$\dfrac{1}{2\lambda}\dfrac{dV}{dt}=\dfrac{1}{4\lambda}V^2$, понатаму: $-\dfrac{dV}{V^2}=\dfrac{1}{2}dt$, $\dfrac{1}{V}=\dfrac{t}{2}+C$, $V=2\lambda x-K=\dfrac{1}{\dfrac{t}{2}+C}$,

$$x(t)=\frac{1}{2\lambda}\left[\frac{1}{t/2+C}+K\right]$$

е гранично монотоно решение. За $f(t)$ помало од $-\dfrac{K^2}{4\lambda}$ решенијата се осцилаторни (по Z, а со тоа и по $x(t)$).

III. Општа линеарна тригонометрија од II ред

Осцилаторните решенија на (8) се обопштените тригонометриски функции sin и cos со база $A(t)=-\left(\dfrac{K^2}{4}+\lambda f(t)\right)$, т.е.

$$Z_1(t) = \cos_{A(t)} t = \cos_{-\left(\frac{K^2}{4}+\lambda f(t)\right)} t$$
$$Z_2(t) = \sin_{A(t)} t = \sin_{-\left(\frac{K^2}{4}+\lambda f_{(t)}\right)} t \tag{14}$$

кои се определени со редовите [1]:

$$\cos_{A(t)} t = 1 - \int_0^t\int_0^t A(t)dt^2 + \int_0^t\int_0^t A(t)dt^2 \int_0^t\int_0^t A(t)dt^2 - \cdots$$
$$\sin_{A(t)} t = t - \int_0^t\int_0^t tA(t)dt^2 + \int_0^t\int_0^t A(t)dt^2 \int_0^t\int_0^t tA(t)dt^2 - \cdots \tag{15}$$

Од (6) линеарно независните партикуларни осцилаторни решенија за $y(t)$ гласат

$$y_1 = e^{\frac{1}{2}Kt} \cos_{A(t)} t$$
$$y_2 = e^{\frac{1}{2}Kt} \sin_{A(t)} t \tag{16}$$

и на крајот партикуларното, осцилаторно решение за популацијата $x(t)$ гласи (од (3)):

$$x_1 = \frac{1}{\lambda}\frac{\dot{y}_1}{y_1}, \; x_2 = \frac{1}{\lambda}\frac{\dot{y}_2}{y_2}, \tag{17}$$

или $$x_1(t) = \frac{1}{\lambda}\frac{1}{e^{\frac{1}{2}Kt}\cos_{A(t)} t}\left[\frac{1}{2}Ke^{\frac{1}{2}Kt}\cos_{A(t)} t + e^{\frac{1}{2}Kt}\frac{d}{dt}\cos_{A(t)} t\right]$$

или $$x_1(t) = \frac{1}{\lambda}\left[\frac{K}{2} + \frac{\frac{d}{dt}\cos_{A(t)} t}{\cos_{A(t)} t}\right]$$

или $$x_1(t)=\frac{1}{\lambda}\left[\frac{K}{2}+\frac{d}{dt}\ln\cos_{A(t)}t\right] \tag{18}$$

и аналогно, има и второ линеарно независно партикуларно решение

$$x_2(t)=\frac{1}{\lambda\sin_{A(t)}t}\left[\frac{K}{2}\sin_{A(t)}t+\frac{d}{dt}\sin_{A(t)}t\right]$$

или $$x_2(t)=\frac{1}{\lambda}\left[\frac{K}{2}+\frac{d}{dt}\frac{\sin_{A(t)}t}{\sin_{A(t)}t}\right]$$

или $$x_2(t)=\frac{1}{\lambda}\left[\frac{K}{2}+\frac{d}{dt}\ln\sin_{A(t)}t\right] \tag{19}$$

Со (18) и (19) сме добиле две линеарно независни партикуларни решенија на равенката Рикати (2). Со оглед на елементарната теорија, општото решение може да се добие со една квадратура:

$$\frac{x-x_1}{x-x_2}=Ce^{\int-\lambda(x_1-x_2)dt} \tag{20}$$

каде C е интеграционата константа. Заменувајќи ги (18) и (19) во десната страна на (20), добиваме

$$\frac{x-x_1}{x-x_2}=Ce^{\int-\lambda\frac{1}{\lambda}\left[\frac{d}{dt}\ln\sin_{A(t)}t-\frac{d}{dt}\ln\cos_{A(t)}t\right]dt}=$$

$$=Ce^{-\int\frac{d}{dt}\ln\frac{\sin_{A(t)}t}{\cos_{A(t)}t}dt}=Ce^{-\ln tg_{A(t)}t}=\frac{C}{tg_{A(t)}t}=Cctg_{A(t)}t$$

и решавајќи ја оваа равенка по $x(t)$, добиваме типична дробно рационална форма на решението на равенката Рикати од интеграционата константа

$$x(t)=\frac{x_1-Cx_2ctg_{A(t)}t}{1-Cctg_{A(t)}t} \tag{21}$$

Решението (21) е осцилаторно, ако се основните решенија (18) и (19) осцилаторни, со база $A(t)$ и ако е во (21) $ctg_{A(t)}t = \frac{\cos_A t}{\sin_A t}$ осцилаторна функција со иста база. За тоа се валидни условите (11) и (13).

Првенствено не интересира осцилаторноста или периодичноста на основните решенија x_1 (18) и x_2 (19), кои се добиваат од општото решение (21) за $C = 0$, $C \to +\infty$.

За осцилаторноста се важни нулите на решенијата, т.е. точките $t = \sigma$ кои се решенија на равенките $x_1(\sigma) = 0$, $x_2(\sigma) = 0$. За оваа σ од (18) и (19) добиваме равенки

$$\begin{aligned} &\frac{K}{2}\cos_{A(t)} t + \frac{d}{dt}\cos_{A(t)} t = 0 \\ &\frac{K}{2}\sin_{A(t)} t + \frac{d}{dt}\sin_{A(t)} t = 0 \end{aligned} \tag{22}$$

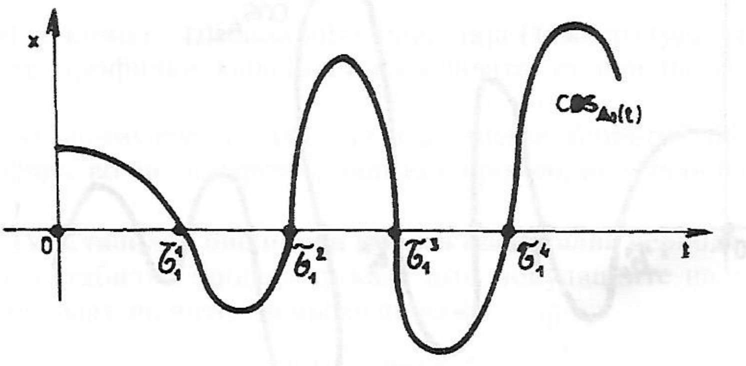
кои се од трансцедентен вид. Тие можат да имаат безброј нееквидистантни решенија

$$\begin{aligned} &\sigma_1^1, \sigma_1^2, \sigma_1^3, ..., \sigma_1^n, ... \\ &\sigma_2^1, \sigma_2^2, \sigma_2^3, ..., \sigma_2^n, ... \end{aligned}$$

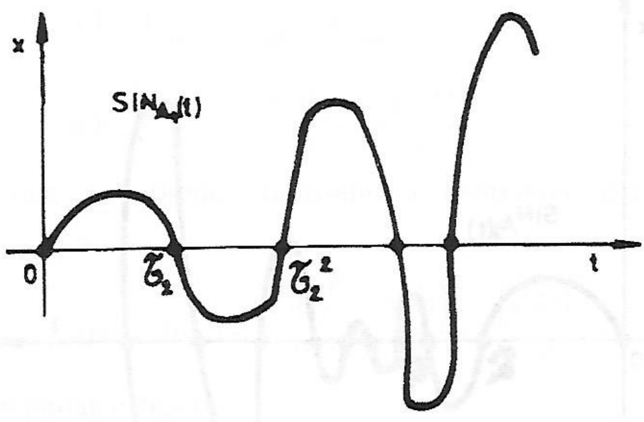
кои ги определуваат осцилациите на x_1 и x_2. Според Роловата теорема, меѓу две еднoподруги нули се наоѓа екстремумот на функциите x_1, x_2.

Од општата теорија на обопштената тригонометрија ([1], [2]) е познато:

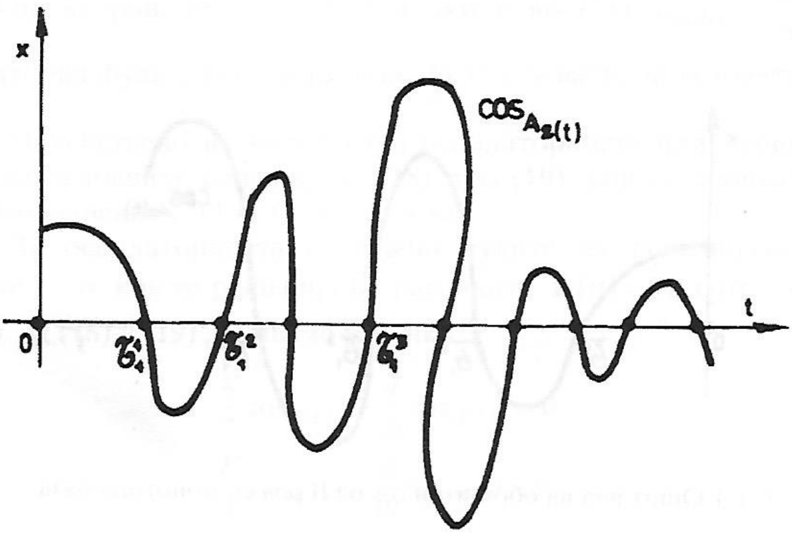
1. Дека осцилаторноста зависи од базата $A(t)$
2. Дека кога бројот на нулите $n \to \infty$, интервалите на нулите се сé потесни и потесни $\Delta\left[\sigma_1^n, \sigma_1^{n+1}\right] \to 0$, а амплитудите на x_1 и x_2 се повисоки.
3. Во колку базата A(t) е поголема, има сé повеќе осцилации
4. Многу разновидна слика се добива ако A(t) варира немонотоно, задржувајќи ги особините I и II од теоремата при формулата (10), така што се можни различни осцилации, обопштени и од II ред:



Сл. 1 Општ вид на обопштен cos од II ред со монотона база



Сл. 2 Општ вид на обопштен sin од II ред со монотона база



Сл. 3 Општ вид на обопштен cos од II ред со немонотона база

Сл. 4 Општ вид на обопштен sin од II ред со немонотона база

За овие осцилации е основна големината (базата)

$$A(t)=-\left(\frac{K^2}{4}+\lambda f(t)\right)=-\left(\frac{K^2}{4}+\lambda\sum_{i=1}^{n}f_i(t)\right) \tag{23}$$

каде $f_i(t)$ се комплетни биолошки влијанија (температура, светлина, влажност, трофички капацитет на почвата, степен на загаденост итн).

Со формулите од (8) - (23) добиваме теориски приод кон осцилациите во биологијата со општа и променлива "периода".

IV. Стабилни биолошки множества. Стална периода.

Во стабилни биоценози каде што популациите на видовите не претрпуваат значителни промени важи

$$A(t)=const=A \tag{24}$$

A е резултат на процесот на урамнотежување на коефициентот на видот K_i и надворешните влијанија f_i. Тогаш редовите (15) стануваат

$$\cos_A t=1-A\int_0^t\int_0^t dt^2+A^2\int_0^t\int_0^t dt^2\int_0^t\int_0^t dt^2\ldots\ldots\ldots$$

$$=1-A\frac{t^2}{2!}+A^2\frac{t^4}{4!}-A^3\frac{t^6}{6!}+\ldots\ldots\ldots$$

$$=1-\frac{\left(\sqrt{A}t\right)^2}{2!}+\frac{\left(\sqrt{A}t\right)^4}{4!}-\frac{\left(\sqrt{A}t\right)^6}{6!}+\ldots\ldots\ldots$$

а ова е ред за обична хармониска функција $\cos_A t=\cos\sqrt{A}t$. Добиваме

$$x_1=\cos\sqrt{A}t=1-\frac{\left(\sqrt{A}t\right)^2}{2!}+\frac{\left(\sqrt{A}t\right)^4}{4!}-\frac{\left(\sqrt{A}t\right)^6}{6!}+\cdots \tag{25}$$

чија што периода е дадена со

$$T=\frac{2\pi}{\sqrt{A}}=\frac{2\pi}{\sqrt{-\left(\frac{K^2}{4}+\lambda\sum_{i=1}^{n}f_i(t)\right)}} \tag{26}$$

слично и со синусот

$$\sin_A t = t - \int_0^t\int_0^t Atdt^2 + \int_0^t\int_0^t Adt^2 \int_0^t\int_0^t tAdt^2 \cdots$$

$$= t - A\frac{t^3}{3!} + A^2\frac{t^5}{5!} - A^3\frac{t^7}{7!} + \cdots$$

$$= \frac{\left(\sqrt{A}t\right)}{\sqrt{A}} - \frac{\left(\sqrt{A}t\right)^3}{\sqrt{A}3!} + \frac{\left(\sqrt{A}t\right)^5}{\sqrt{A}5!} \cdots$$

$$= \frac{1}{\sqrt{A}}\left[\frac{\left(\sqrt{A}t\right)}{1!} - \frac{\left(\sqrt{A}t\right)^3}{3!} + \frac{\left(\sqrt{A}t\right)^5}{5!} - \cdots\right]$$

а ова е точно ред за проста хармониска функција $\sin\sqrt{A}t$. Добиваме

$$x_{2(t)} = \frac{1}{\sqrt{A}}\sin\sqrt{A}t \tag{27}$$

со иста периода

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{A}} = \frac{2\pi}{\sqrt{-\left(K^2/4 + \lambda f\right)}}$$

и изменета амплитуда.

Примери: сезонска динамика на зоопланктонот од Боденското и Охридското Езеро

Со оглед на тоа што во екосистемските истражувања динамиката на одделните параметри (пример: популационата динамика на зоопланктонот од Боденското Езеро [3]) најчесто се следи за период од 1 година (T=1 година), се добива математичка врска меѓу периодата и сите влијанија

$$T = 1 \text{ година} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(K^2/4 + \lambda\sum f_i(t)\right)}}$$

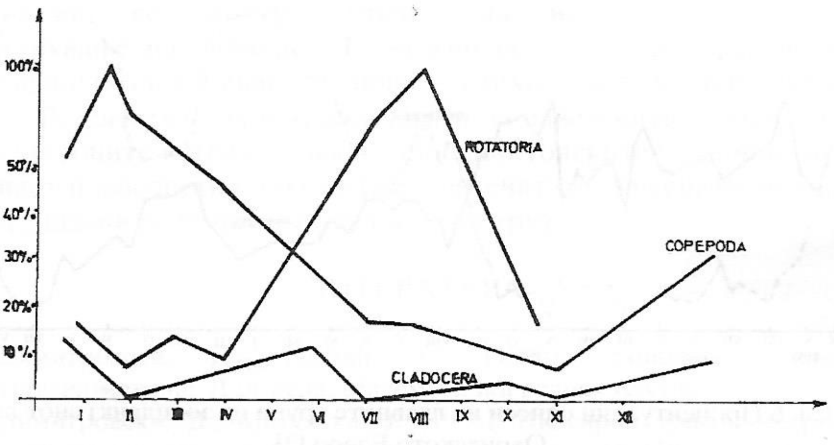
од каде со квадратна теоретска релација

$$4\pi^2(1\text{година})^2 = \left|\frac{K^2}{4} + \lambda\sum_{i=1}^{n} f_i(t)\right| \tag{28}$$

Во овој труд како илустрација за осцилаторни и периодични решенија, ќе бидат прикажани примери од сезонската динамиката на зоопланктонот во Боденското и Охридското Езеро [3]. Имено, станува збор за природни периодични осцилации на популациите од одделни групи во наведените езера.

На слика 5 претставена е динамиката на зоопланктонот од Боденското Езеро ([3]).

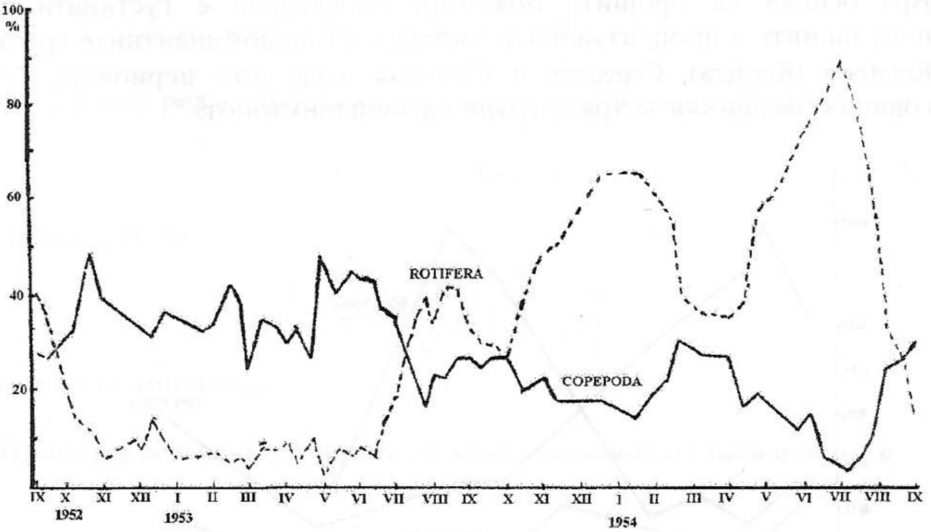
Auerbach и сор., 1924 (кај [3]) во текот на едногодишен истражуван циклус даваат анализа за квалитативниот и квантитативниот состав на зоопланктонот во Боденското Езеро. Врз основа на бројните податоци проследена е густината на популациите и процентуалната застапеност на доминантните групи: Rotatoria (Rotifera), Copepoda и Cladocera, каде што периодата T=1 година е заедничка за трите групи од зоопланктонот.



Сл. 5 Процентуални односи на главните групи од зоопланктонот во Боденското Езеро [3]

Од сликата 5 јасно се забележува дека популациите на Cladocera не претрпуваат значителни промени, односно имаат слична сезонска динамика во текот на истражуваната година. За разлика од нив популациите на Rotifera и Copepoda се јавуваат со поголема процентуална застапеност и различна сезонска динамика во текот на годината. Имено, максималните вредности на бројноста на едната група одговараат на минималната бројност на другата. Копеподите се јавуваат со максимална процентуална застапеност во зимскиот период од годината, за разлика од ротиферите чија максимална густина е во летниот период. Најверојатно, станува збор за остра компетиција во однос на исхраната, помеѓу двете групи на различни видови. При тоа се запазува односот (27), каде $f_i(t)$ се користење на исти типови на храна [3].

Следниот пример е земен од истражувањата на зоопланктонот во Охридското Езеро [3] во текот на двегодишен истражуван циклус (периодата T=2 години). Динамиката на зоопланктонот на Охридското Езеро е дадена на сликата 6 [3]:



Сл. 6 Процентуални односи на главните групи од зоопланктонот во Охридското Езеро [3]

Во првата истражувана година се забележува сличност на динамиката на зоопланктонот со Боденското Езеро: популациите на Copepoda покажуваат максимална застапеност во зимскиот период од годината, додека Rotifera во летниот период. Втората година во целина, во однос на првата година од истражувањето, од една страна, се карактеризира со зголемена бројност на популациите на ротиферите и намалена на копеподите. Од друга страна бројноста на ротиферите значително се зголемува во зимските месеци, додека максималната густина ја достигнува во летниот период (месец јули). Како што е споменато бројноста на копеподите е намалена, а минимумот е регистриран во истиот летен месец. Очигледно е дека овде станува збор за изразена компетиција. Бидејќи компетицијата не се води помеѓу два вида туку помеѓу две групи со повеќе видови, тешко е да се определи компетитивната зависност. Од страна на Серафимова-Хаџишче (1957) истражувањата на зоопланктонот во езерото се вршени на мешани, а не на чисти култури, така што не може со сигурност да се каже која комбинација на фактори дава најповолни услови за растење на дадена популација, бидејќи и во популацијата постои компетиција помеѓу единките од ист вид. Густината и сезонската динамика ќе биде различна, доколку популациите од секој вид се следат одделно. Меѓутоа, во овој случај кога се анализирани две групи од зоопланктонот со повеќе видови, кои имаат исти трофички афинитети, евидентна е компетитивна зависност во однос на исхраната.

Доколку во истражувањата на зоопланктонските популации и општо во истражувањата на популациите и од други природни екосистеми, се зголеми бројот на истражуваните години (зголемување на периодот Т) можни се поопширни одговори на овие прашања и добивање на појасна слика од математички аспект.

Резултатите од истражувањата од наведените автори ([3]) во популационите истражувања на зоопланктонските заедници, можат да бидат посоодветни доколку се применат обопштените теории од II ред , дадени во почетниот дел на овој труд.

ЛИТЕРАТУРА

[1]. Димитровски, Д., Цвејић, С. (1996): Уопштене линеарне тригонометрије II-ог реда. Математички радови Косова.

[2]. Димитровски, Д., Митевска, Ј. (1996): Линеарни тригонометрии од четврти и шести ред. Посебни изданија на год. Зб. Инст. мат. на ПМФ кн.II (23), Скопје.

[3]. Серафимова-Хаџишче, Ј. (1957): Зоопланктонот на Охридското Езеро во текот на 1952, 1953 и 1954 година. Филозофски факултет на Универзитетот во Скопје, Хидробиолошки Завод - Охрид, посебни изданија, том 1, Охрид.

[4]. Димитровски, Д., Митевска, Ј. (1998): Бројот е, универзална константа на природата. Филозофија и историја на природните науки, Скопје, Институт за математика.

[5]. Нахушев, А. М. (1995): Уравнение математической биологии."Вишая школа. Москва.

[6]. Волтерра, В. (1976): Математическая теория борьбы за существование. Наука. Москва.

Dragan Dimitrovski[1], Dana Prelić[2], Jasmina Dimitrova[2]

[1]*Institute of Mahtematics, Faculty of Natural Sciences, Skopje*
[2]*Institute of Biology, Faculty of Natural Sciences, Skopje*

SUMMARY

GENERALISED TRIGONOMETRIES OF SECOND ORDER AND ZOOPLANCTON POPULATIONS OF BODEN AND OHRID LIKE

The Bernulli-Ferhilst model is too idealistic to be performed in authentic conditions. For that reason mathematical biology has to use more realistic models. Because the full isolation of species can't be achieved completely in a true animal community, the method (2) which includes $f(t)=\sum_{i=1}^{n} f_i(t)$ taking into consideration different external influences is more realistic.

In this paper mathematical analysis on solving of equation (2) was developed through the general linear trigonometry of II order and its solution was proposed. In that case besides the monotony (1), oscillatority (18, 19), variable amplitudes (21), even irregular oscillatority (22), as well as unequal periods (23) are possible. In a stable biocenosis ($A(t)=const=A$) general harmonical oscillations $\cos\sqrt{A}t$, $\sin\sqrt{A}t$, with periods $T=\frac{2\pi}{\sqrt{A}}$ were obtained.