Математички Билтен
Книга 9-10 (XXXV-XXXVI)
1985-1986 (25-31)
Скопје, Југославија

ЕДНА ТЕОРЕМА ЗА АНАЛИТИЧНИ РЕШЕНИЈА НА p-ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА РАВЕНКА ОД ПРВ РЕД СО АНАЛИТИЧНА ДЕСНА СТРАНА

Борко Илиевски

Во оваа работа е третиран проблемот, со друг вид изводи, аналоген на проблемот на ареоларна аналитична диференцијална равенка, т.е. на равенка со ареоларен извод $\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \frac{\hat{d}w}{d\bar{z}}$, разгледана во трудот [5]. Имено, се разгледува т.н. p-диференцијална равенка од прв ред (1), со аналитична десна страна f, во класата на аналитични функции w. Притоа е поставен проблемот: да се најде услов што треба да го задоволува параметарот p за равенката (1) да има аналитично решение.

Идеи и извори на литература од ваква проблематика можат да се најдат, на пример, во [4].

Нека е дадена p-диференцијалната равенка од прв ред во нормален облик

$$\frac{\hat{d}_p w}{dz} = f(z,w), \tag{1}$$

при што

$$\frac{\hat{d}_p w}{dz} = \frac{1}{\sqrt{p}}\left(\frac{pu_x+v_y}{2} + i\frac{v_x-pu_y}{2}\right) \tag{2}$$

е т.н. p-извод на Положиј [1] по променливата $z=x+iy$, $p=p(x,y)>0$, даден непрекинато диференцијабилен по x и y реален параметар и f дадена аналитична функција од своите променливи $z=x+iy$ и $w=u(x,y)+iv(x,y)$.

<u>Теорема</u>. Ако десната страна f на p-диференцијалната равенка (1) е аналитична функција од две променливи $z=x+iy$ и $w=u+iv$, тогаш потребен и доволен услов равенката (1) да има аналитични решенија $w=w(z)$ е карактеристиката p да е позитивна реална константа.

<u>Доказ</u>. Да претпоставиме дека p-диференцијалната равенка (1) има аналитично решение $w=w(z)$. Согласно теоремата „Обопштениот p_1-извод на една p-аналитична функција е обопштена аналитична функција од IV-та класа, т.е. функција определена со равенката

$$\frac{\hat{d}\omega}{d\bar{z}} = A\omega + B\bar{\omega} \tag{3}$$

чиишто коефициенти изнесуваат

$$A = \frac{\hat{d}}{d\bar{z}} \ln \frac{p+p_1}{2\sqrt{pp_1}}, \qquad B = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\hat{d}}{d\bar{z}} \ln p, \tag{4}$$

([2] теорема 2.1 стр. 75), p-изводот $\frac{\hat{d}_p w}{dz}$ на аналитичната функција w ја задоволува равенката (3), при што, согласно (4),

$$A = \frac{\hat{d}}{d\bar{z}} \ln \frac{1+p}{2\sqrt{p}} \quad и \quad B = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\hat{d}}{d\bar{z}} \ln 1.$$

Значи, имаме

$$\frac{\hat{d}}{d\bar{z}}\left(\frac{\hat{d}_p w}{dz}\right) = \frac{\hat{d}}{d\bar{z}} \ln\frac{1+p}{2\sqrt{p}}\cdot\frac{\hat{d}_p w}{dz} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\hat{d}}{d\bar{z}} \ln 1\cdot\overline{\frac{\hat{d}_p w}{dz}},$$

т.е.

$$\frac{\hat{d}}{d\bar{z}}\left(\frac{\hat{d}_p w}{dz}\right) = \frac{\hat{d}}{d\bar{z}} \ln \frac{1+p}{2\sqrt{p}}\cdot\frac{\hat{d}_p w}{dz}. \tag{5}$$

Со оглед на равенката (1), идентитетот (5) се запишува:

$$\frac{\hat{d}}{d\bar{z}} f(z,w) = \frac{\hat{d}}{d\bar{z}} \ln \frac{1+p}{2\sqrt{p}}\cdot f(z,w),$$

односно, користејќи извесно операциско правило на операторниот извод $\frac{\hat{d}}{d\bar{z}}$ ([1] стр. 20):

$$\frac{\hat{\partial} f}{\partial\bar{z}} + \frac{\hat{\partial} f}{\partial w}\cdot\frac{\hat{d}w}{d\bar{z}} + \frac{\hat{\partial} f}{\partial\bar{w}}\cdot\frac{\hat{d}\bar{w}}{d\bar{z}} = \frac{\hat{d}}{d\bar{z}} \ln \frac{1+p}{2\sqrt{p}}\cdot f(z,w). \tag{6}$$

Функцијата f е аналитична од своите променливи z и w, а w е аналитична функција од z, поради што

$$\frac{\hat{\partial} f}{\partial\bar{z}} = 0, \quad \frac{\hat{\partial} f}{\partial\bar{w}} = 0 \quad и \quad \frac{\hat{d}w}{d\bar{z}} = 0$$

така што левата страна во (6) е еднаква на нула. Според тоа, (6) го добива обликот

$$\frac{\hat{d}}{d\bar{z}} \ln \frac{1+p}{2\sqrt{p}}\cdot f(z,w) = 0,$$

од каде што се добива

$$\frac{\hat{d}}{d\bar{z}} \ln \frac{1+p}{2\sqrt{p}} = 0, \tag{7}$$

бидејќи f(z,w) не е идентично еднаква на нула.

Како $p=p(x,y)>0$ е реална функција, ставајќи

$$\ln \frac{1+p}{2\sqrt{p}} = u^*(x,y), \tag{8}$$

равенството (7), според дефиницијата на операторниот извод $\frac{\hat{d}}{d\bar{z}}$, се запишува

$$\frac{1}{2}(u_x^* + iu_y^*) = 0,$$

од каде што се добива

$$u_x^* = 0 \quad \text{и} \quad u_y^* = 0. \tag{9}$$

Равенствата (9) даваат

$$u^*(x,y) = a = \text{const} \quad (a\in\mathbb{R}),$$

поради што (8) се запишува:

$$\ln\frac{1+p}{2\sqrt{p}} = a,$$

од каде што се добива

$$p^2 + 2(1-2e^{2a})p + 1 = 0. \tag{10}$$

Решенијата на квадратната равенка по p се

$$p = -(1-2e^{2a}) \pm \sqrt{(1-2e^{2a})^2 - 1},$$

а со оглед на позитивноста на реалната карактеристика p, треба

$$e^{2a} - 1 \geq 0 \quad \text{и} \quad 1 - 2e^{2a} \leq 0 \tag{11}$$

односно $a \geq 0$.

Со тоа покажавме дека потребен услов p-диференцијалната равенка (1) да има аналитично решение w е

$$p = \text{const} > 0. \tag{12}$$

Дека условот (12) е и доволен за p-диференцијалната равенка (1), со аналитична десна страна f, да има аналитично решение $w=w(z)$ следи оттаму што при неговото исполнување секогаш може да се најде аналитична функција w којашто ја задоволува равенката (1).

Навистина, бидејќи p-диференцијалната равенка (1) се разгледува во класата на аналитични функции $w=u+iv$, следува дека за p-изводот $\frac{\hat{d}_p w}{dz}$, со оглед на Cauchy-Riemann-овите услови $u_x=v_y$ и $u_y=-v_x$, имаме

$$\frac{\hat{d}_p w}{dz} = \frac{1}{\sqrt{p}}\left(\frac{pu_x+v_y}{2} + i\,\frac{v_x-pu_y}{2}\right) =$$

$$= \frac{p+1}{2\sqrt{p}}(u_x+iv_x) =$$

$$= \frac{p+1}{2\sqrt{p}}\cdot\frac{dw}{dz},$$

поради што p-диференцијалната равенка (1) го добива обликот

$$\frac{dw}{dz} = \frac{2\sqrt{p}}{p+1}\cdot f(z,w). \tag{13}$$

Согласно условот (12) што го задоволува карактеристиката p, десната страна во равенката (13) е аналитична функција од z и w, па според теоремата на Cauchy за диференцијална равенка со аналитична десна страна ([3] стр. 73), равенката (13) има само едно аналитично решение $w=w(z)$ такво што за $z=z_0$, $w(z_0)=w_0$, при што точката (z_0,w_0) припаѓа на областа на аналитичноста на десната страна $f(z,w)$.

Со тоа теоремата е во целост докажана.

Пример 1. p-линеарната диференцијална равенка

$$\frac{d_p w}{dz} + Aw + B = 0 \tag{14}$$

со аналитични по z коефициенти $A=A(z)$ и $B=B(z)$, $(f(z,w)=-Aw-B)$, во класата на аналитични функции се сведува на

$$\frac{dw}{dz} + \frac{2\sqrt{p}}{p+1}.Aw + \frac{2\sqrt{p}}{p+1}\cdot B = 0 \tag{15}$$

чиешто решение, како што е познато, гласи

$$w = e^{-\frac{2\sqrt{p}}{p+1}\int Adz}\left[C - \frac{2\sqrt{p}}{p+1}\int Be^{\frac{2\sqrt{p}}{p+1}\int Adz} dz\right]. \tag{16}$$

Специјално, за $p=1$, p-диференцијалната равенка (14) се сведува на обичната линеарна диференцијална равенка

$$\frac{dw}{dz} + Aw + B = 0, \tag{14'}$$

чиешто решение е

$$w = e^{-\int Adz}\left[C - \int Be^{\int Adz} dz\right]. \tag{16'}$$

Пример 2. p-диференцијалната равенка

$$\frac{\hat{d}_4 w}{dz} + \frac{5}{2}\cdot zw - \frac{5}{2}\cdot ze^{-z^2} = 0$$

е од обликот (14), при што $p=4$, така што согласно (16), нејзиното аналитично решение е

$$w = e^{-\frac{2\sqrt{4}}{4+1}\int\frac{5}{2}\cdot zdz}\left[C + \frac{2\sqrt{4}}{4+1}\int\frac{5}{2}\cdot ze^{-z^2} e^{\frac{2\sqrt{4}}{4+1}\int\frac{5}{2}\cdot zdz} dz\right],$$

т.е.

$$w = e^{-z^2}(C+z^2).$$

Ако ставиме $w=u+iv$ и $z=x+iy$, тогаш диференцијалната равенка од овој пример се распаѓа на еквивалентен на неа систем обични парцијални диференцијални равенки

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + 4(xu-yv)-4e^{y^2-x^2}(x\cos 2xy+y\sin 2xy) = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + 4(yu+xv)-4e^{y^2-x^2}(y\cos 2xy-x\sin 2xy) = 0.$$

Решение на овој систем е

$$u(x,y) = \operatorname{Re} e^{-z^2}(C+z^2),$$

$$v(x,y) = \operatorname{Im} e^{-z^2}(C+z^2),$$

т.е.

$$u(x,y) = e^{y^2-x^2}[(\alpha+x^2-y^2)\cos 2xy+(\beta+2xy)\sin 2xy]$$

$$v(x,y) = e^{y^2-x^2}[(\beta+2xy)\cos 2xy-(\alpha+x^2-y^2)\sin 2xy],$$

каде што $\alpha+i\beta=C$ е произволна комплексна константа, односно α и β се произволни реални константи.

<u>Последица</u>. p-диференцијалната равенка

$$\frac{\hat{d}_p w}{d\bar{z}} = f(\bar{z},w) \tag{17}$$

при што

$$\frac{\hat{d}_p w}{d\bar{z}} = \frac{1}{\sqrt{p}}\left(\frac{pu_x-v_y}{2} + i\frac{v_x+pu_y}{2}\right)$$

е таканаречен p-извод на Положиј на функцијата w по променливата $\bar{z}$ и f аналитична функција од своите променливи $\bar{z}=x-iy$ и $w=u(x,y)+$ $+iv(x,y)$, има антианалитични решенија ако и само ако карактеристиката p е позитивна реална константа.

Навистина, f е аналитична функција од $\bar{z}$ и w што е еквивалентно со

$$\frac{\hat{\partial} f}{\partial \bar{\bar{z}}} = \frac{\hat{\partial} f}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\hat{\partial} f}{\partial \bar{w}} = 0. \tag{18}$$

Земајќи конјугација на двете страни од равенството во (17), имаме

$$\overline{\frac{\hat{d}_p w}{d\bar{z}}} = \bar{f}(\bar{z},w),$$

т.е.

$$\frac{\hat{d}_p \bar{w}}{dz} = \bar{f}(\bar{z},w) \tag{19}$$

и притоа, согласно

$$\frac{\hat{\partial}\overline{f}}{\partial\overline{z}} = \overline{\frac{\hat{\partial} f}{\partial z}} = 0$$

и

$$\frac{\hat{\partial}\overline{f}}{\partial\overline{\overline{w}}} = \overline{\frac{\hat{\partial} f}{\partial \overline{w}}} = 0,$$

$\overline{f}$ е аналитична функција од z и $\overline{w}$, а $\overline{w}$ е аналитична од z. Со ова проблемот за наоѓање на антианалитични решенија w на p-диференцијалната равенка (17) е сведен на наоѓање аналитични решенија $\overline{w}$ на p-диференцијалната равенка (19). Јасно е дека важи и обратното. Бидејќи (19) е p-диференцијална равенка по непозната $\overline{w}$ од обликот (1), т.е. ги исполнува условите од докажаната теорема, следува дека p-диференцијалната равенка (17) има антианалитични решенија ако и само ако p е позитивна реална константа.

Л И Т Е Р А Т У Р А

[1] Г.Н. Положий: Обобщение теории аналитических функций комплексного переменного, Издательство Киевского университета, 1965

[2] Д. Димитровски: Прилог кон теоријата на обопштените аналитични функции, Годишен зборник на ПМФ - Скопје, кн. 20 секција А, 1970

[3] И.Г. Петровский: Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, Издательство Московского университета, 1984

[4] N. Ralević: Linear p-areolar differential equations with constant coefficients, Ljubljana, 1986

[5] D. Dimitrovski, B. Ilievski: L'équation différentielle aréolaire analytique, Contributions, V 1-2 -Section of mathem. and techn. sciences, Macedonian academy of sciences and arts, Skopje 1984

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ P-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С АНАЛИТИЧЕСКОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЮ

Борко Илиевски

Р е з ю м е

В этой работе изучается вопрос об условии которому должно удовлетворять положительная непрерывно-дифференцируемая характеристика $p=p(x,y)$ чтобы у обобшенного дифференциального уравнения первого порядка, в нормальной форме,

$$\frac{\hat{d}_p w}{dz} = f(z,w)$$

были аналитические решения $w=w(z)$.

При этом
$$\frac{\hat{d}_p w}{dz} = \frac{1}{\sqrt{p}}\left(\frac{pu_x+v_y}{2} + i\frac{v_x-pu_y}{2}\right)$$

так называемая операторная p-производная функции $w=u(x,y)+iv(x,y)$ по комплексному переменному $z=x+iy$ и f аналитическая функция от своих переменных z и w.