Математички Билтен
14 (XL)
1990 (79-86)
Скопје, Југославија

НЕКОИ АНАЛИТИЧНИ РЕШЕНИЈА НА ЕДНА КЛАСА РАВЕНКИ ВЕКУА

Борко Илиевски

Оваа работа е едно природно продолжение на трудот [1], во кој е третиран проблемот на Cauchy, т.е. еден модифициран метод на интеграција со помош на редови во случај на аналитична ареоларна диференцијална равенка од I-ви ред.

Во оваа работа споменатиот метод го применуваме над две ареоларни равенки од I-ви ред, коишто се специјален случај на равенката на Векуа, со чија помош се дефинираат различни класи обопштени аналитични функции [2], [3].

Согласно со врската (9), што постои помеѓу ареоларниот извод (10) и операторот (11) на Bilimovitch, разгледуван како мера на отстапување од аналитичност на една неаналитична функција [4], најдените решенија (8) и (18) на ареоларните равенки (1) и (12) соодветно, се неаналитични функции чиешто отстапување од аналитичност е еднакво на двојната вредност на самата неаналитична функција, односно на удвоената комплексно конјугирана вредност на неаналитичната функција. Така проблемот во оваа работа е сличен на проблемите разгледувани од С. Фемпл во некои негови трудови, како на пример [5], [6] и други.

1. Следејќи ја работата [1] го поставуваме проблемот за наоѓање решение $W = W(z,\bar{z})$ на ареоларната диференцијална равенка

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = W \tag{1}$$

во вид на ред

$$W = \sum_{p=o}^{\infty} \sum_{q=o}^{\infty} C_{pq} z^p \bar{z}^q \tag{2}$$

во областа

$$D_{z\bar{z}}: \ |z| < r, \quad |\bar{z}| < r$$

при постоење на условот

$$z = \bar{z} = 0, \quad W(0,0) = 0. \tag{3}$$

Условот (3) повлекува $C_{oo} = 0$, поради што сумирањата во (2) се вршат по сите можни ненегативни цели вредности на p и q, при што едновремено p и q не треба да примат вредност нула.

Со замена на функцијата (2) во равенката (1) се добива идентитетот

$$\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} qC_{pq}z^{p}\bar{z}^{q-1} = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} C_{pq}z^{p}\bar{z}^{q}, \tag{4}$$

од каде што го имаме системот

$$\begin{aligned}
&C_{n1} = C_{n0} \\
&2C_{n-1\,2} = C_{n-1\,1} \\
&3C_{n-2\,3} = C_{n-2\,2} \qquad\qquad (n=0,1,2,\ldots \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad k=0,1,2,\ldots,n) \\
&(k+1)C_{n-k\;k+1} = C_{n-k\;k} \\
&\vdots \\
&(n+1)C_{0\;n+1} = C_{0\;n}
\end{aligned} \tag{5}$$

за определување на коефициентите C_{pq} во функцијата (2). Од системот (5) се добива

$$C_{0q} = 0 \qquad (q=0,1,2,\ldots) \tag{6}$$

$$C_{pq} = \frac{1}{q!}C_{p0} \qquad (p,q=1,2,\ldots) \tag{7}$$

По таков начин, коефициентите C_{pq} $(q\neq 0)$ во двојниот ред (2) еднозначно се определени преку произволните комплексни константи C_{p0} $(p=1,2,\ldots)$, поради што решението на равенката (1) се запишува во обликот

$$W = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} \frac{C_{p0}}{q!}\, z^{p}\bar{z}^{q},$$

односно

$$W = \sum_{p=1}^{\infty} C_{p0}z^{p}\cdot \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^{q}}{q!}. \tag{8}$$

Произволноста на C_{p0} $(p=1,2,\ldots)$ е со едно ограничување што ни ја наметнува самата основна претпоставка дека двојниот степенски ред (2) е конвергентен во областа $D_{z\bar{z}}$, поради што е оправдано неговото диференцирање член по член. Оттука следува конвергентноста на редот

$$\sum_{p=1}^{\infty} C_{po} z^p$$

за $|z| < r$, каде што тој определува произволна аналитична по z функција $\Phi(z)$. Поради ова, функцијата W, определена со равенството (8), го добива обликот

$$W = \Phi(z) e^{\bar{z}}, \tag{8'}$$

при што

$$\Phi(z) = \sum_{p=1}^{\infty} C_{po} z^p$$

е, како што веќе рековме, произволна аналитична функција.

Да направиме една интересна забелешка на досегашната работа. Имено, имајќи ја предвид врската

$$2\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = B \tag{9}$$

помеѓу ареоларниот извод

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{10}$$

и операторот на Билимовиќ

$$B = \mathrm{grad} U + [\vec{k}, \mathrm{grad} V], \tag{11}$$

интерпретиран како мера на отстапување од аналитичност на една неаналитична функција $W = W(z,\bar{z}) = U(x,y)+iV(x,y)$ (над којашто се применува) и којшто се совпаѓа со $\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}$ [4], ареоларната равенка (1) се запишува

$$B(W) = 2W$$

поради што, досегашната работа може да се формулира и како проблем за наоѓање на неаналитични функции W, во облик на степенски ред (2) и за кои важи условот (3), чиешто отстапување од аналитичност е еднакво на двојната вредност од самата функција W.

2. Сега, за еден друг вид равенка на Векуа

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \bar{W}, \tag{12}$$

во која непознатата функција се наоѓа под знакот на комплексна конјугација, да се обидеме да најдеме решение во обликот на двојниот ред (2) при постоење на условот (3).

Со замена на функцијата W, определена со (2), во ареоларната равенка (12) го имаме идентитетот

$$\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} qC_{pq} z^{p}\bar{z}^{q-1} = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} \bar{C}_{pq}\bar{z}^{p}z^{q} \tag{13}$$

од каде што, по запишувањето на споменатиот идентитет во развиена форма и изедначувањето на коефициентите пред соодветните степени $z^{\alpha}\bar{z}^{\beta}$, се добива системот

$$\begin{aligned}
C_{01} &= 0\\
C_{11} &= \bar{C}_{01}\\
2C_{02} &= \bar{C}_{10}\\
C_{21} &= \bar{C}_{02}\\
2C_{12} &= \bar{C}_{11}\\
3C_{03} &= \bar{C}_{20}\\
&\vdots\\
C_{n1} &= \bar{C}_{0\,n}\\
2C_{n-1\;2} &= \bar{C}_{1\;n-1}\\
3C_{n-2\;3} &= \bar{C}_{2\;n-2}\\
&\vdots\\
(n+1)C_{0\;n+1} &= \bar{C}_{n0}\\
&\vdots
\end{aligned} \tag{14}$$

Равенките од системот (14) ќе ги групираме во групи. n-тата група (n=1,2,...) е определена со системот равенки

$$\begin{aligned}
C_{0n} &= \frac{1}{n}\bar{C}_{n-1\;0}\\
C_{n1} &= \frac{1}{1}\bar{C}_{0\;n}\\
C_{1\;n+1} &= \frac{1}{n+1}\bar{C}_{n\;1}\\
C_{n+1\;2} &= \frac{1}{2}\bar{C}_{1\;n+1}\\
C_{2\;n+2} &= \frac{1}{n+2}\bar{C}_{n+1\;2}\\
&\vdots\\
C_{k\;n+k} &= \frac{1}{n+k}\bar{C}_{n+k-1\;k}
\end{aligned} \tag{15}$$

$$C_{n+k\ k+1} = \frac{1}{k+1}\bar{C}_{k\ n+k}$$

$$\vdots$$

($k=0,1,2,\ldots$), од каде што, со последователна замена, се добива

$$\begin{aligned}
C_{0\ n} &= \frac{1}{n}\bar{C}_{n-1\ 0}\\
C_{n\ 1} &= \frac{1}{n}C_{n-1\ 0}\\
C_{1\ n+1} &= \frac{1}{n(n+1)}\bar{C}_{n-1\ 0}\\
C_{n+1\ 2} &= \frac{1}{2n(n+1)}C_{n-1\ 0}\\
C_{2\ n+2} &= \frac{1}{2n(n+1)(n+2)}\bar{C}_{n-1\ 0}\\
C_{n+2\ 3} &= \frac{1}{2\cdot 3n(n+1)(n+2)}C_{n-1\ 0}\\
C_{3\ n+3} &= \frac{1}{2\cdot 3n(n+1)(n+2)(n+3)}\bar{C}_{n-1\ 0}\\
C_{n+3\ 4} &= \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4n(n+1)(n+2)(n+3)}C_{n-1\ 0}\\
&\vdots\\
C_{n-1\ 2n-1} &= \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\ldots(n-1)n(n+1)(n+2)\ldots(2n-1)}\bar{C}_{n-1\ 0}\\
C_{2n-1\ n} &= \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\ldots(n-1)n^2(n+1)(n+2)\ldots(2n-1)}C_{n-1\ 0}\\
C_{n\ 2n} &= \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\ldots(n-1)n^2(n+1)(n+2)\ldots(2n-1)(2n)}\bar{C}_{n-1\ 0}\\
C_{2n\ 2n+1} &= \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\ldots(n-1)n^2(n+1)^2(n+2)\ldots(2n-1)(2n)}C_{n-1\ 0}\\
&\vdots
\end{aligned} \qquad (16)$$

Анализирајќи ги добиените формули (16), можеме да ги изведеме следниве заклучоци:

а) Коефициентите C_{pq} при кои вториот индекс е еднаков на првиот ($q=p$), како и коефициентите при кои вториот индекс е за 1 поголем од првиот ($q=p+1$) се нули ($p=0,1,2,\ldots$);

б) Елементите C_{pq} при кои вториот индекс е нула, т.е. коефициентите од облик C_{po} ($p=1,2,\ldots$) се произволни

в) Преостанатите коефициенти во решението (2) на равенката (12) се изразуваат преку претходно споменатите произволни коефициенти така што коефициентите C_{pq} при кои првиот индекс е поголем од вториот $(p > q)$ се изразуваат преку C_{po}, а коефициентите при кои првиот индекс е помал од вториот $(p < q)$ се изразуваат преку $\overline{C}_{po}$.

Запишувајќи го двојниот ред (2) во нешто поразвиена форма

$$W = \sum_{k=1}^{\infty}\left[z^k \sum_{n=0}^{\infty} C_{k+n\;n}(z\overline{z})^n + \overline{z}^{k+1}\sum_{n=0}^{\infty} C_{n\;k+n+1}(z\overline{z})^n\right]$$

и применувајќи ги формулите (16), по извршени средувања, се добива формално решение на ареоларната равенка (12) во обликот

$$W = \sum_{k=1}^{\infty} W_k \tag{17}$$

каде што

$$\begin{aligned} W_k = C_{ko} z^k\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{k!(z\overline{z})^n}{(n!)^2(n+1)(n+2)\dots(n+k)}\right] + \\ + \overline{C}_{ko}\overline{z}^{k+1}\left[\frac{1}{k+1} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{k!(z\overline{z})^n}{(n!)^2(n+1)(n+2)\dots(n+k)(n+k+1)}\right]\end{aligned} \tag{18}$$

Функцијата $W=W_k$, при што C_{ko} е произволна комплексна константа, е решение на ареоларната равенка (12), коешто се добива од (17) за $C_{ko} \neq 0$ и $C_{\ell o} = 0$ за $\ell \neq к$ $(к=1,2,\dots)$. Бидејќи

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{k!}{(n!)^2(n+1)(n+2)\dots(n+k)}}{\dfrac{k!}{((n+1)!)^2(n+2)\dots(n+k)(n+1+k)}} = \lim(n+1)(n+1+k) = \infty$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{k!}{(n!)^2(n+1)\dots(n+k)(n+k+1)}}{\dfrac{k!}{((n+1)!)^2(n+2)\dots(n+k+1)(n+k+2)}} = \lim(n+1)(n+k+2) = \infty,$$

следува дека и двата степенски реда по степените $z\bar{z}$, што влегуваат во равенството (18), конвергираат за $z\bar{z} < \infty$, т.е. $|z| < \infty$ т.е. конвергираат во сета комплексна рамнина. Според тоа, функциите $W = W_к$ $(к=1,2,...)$ се дефинирани во целата комплексна рамнина.

На крај да забележиме дека, согласно равенството (9), функциите $W = W_к$, определени со (18), се една класа неаналитични функции чиешто отстапување од аналитичност е еднакво на удвоената комплексно конјугирана вредност на самите неаналитични функции $W = W_к$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

[1] Dimitrovski, D., Ilievski, B.: L'equation differentielle aréolaire analytique, Contributions MANU, V 1-2, Section of mathematical and technical sciences, Skopje, 1984

[2] Векуа, И.Н.: Обобщеные аналитические функции, Наука, Москва, 1988

[3] Положий, Г.Н.: Обобщение теории аналитических функций комплексного переменного, Киев, 1965

[4] Bilimovitch, A.: Sur la mesure de déflexion d'une fonction non analytique por rapport a'une fonction analitique, C.R. Acad. Sci. Paris, 237, (1953), 694

[5] Фемпл, С.: О неаналитичким функцијама чије је одступање од аналитичности аналитичка функција, ГЛАС CCLIV - Одељење природно-математичких наука, књ. 24, Београд, 1963

[6] Фемпл, С.: О неаналитичким функцијама чије је друго одступање од аналитичности аналитичка функција, Билтен ДМФ СРС, V, XV, 1-4, Београд, 1963

НЕКОТОРЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ ВЕКУА

Борко Илиевски

Р е з ю м е

В этой работе рассмотриваются два уравнения первого порядка (1) и (12), которые являются частным случаем уравнения Векуа $\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = AW + B\overline{W} + F$, с точки зрения их аналитической решаемости. Полученны классы их решений (8) и (18) соответственно, во форме степеных рядов по z и $\bar{z}$, которые можно интерпретировать как неаналитические функции с отклонением от аналитичности равное удвоенному значению неаналитической функции, т.е. двойному значению комплексно сопряженному значению неаналитической функции соответственно.