ЗА КВАЗИНОРМАЛНИТЕ ОПЕРАТОРИ

Новак Ивановски

Ограничениот оператор T во Хилбертовиот простор H се вика квазинормален ако $T(T^* T) = (T^* T) T$. Поимот за квазинормалност беше воведен од А., Brown [1], каде е и дадена карактеризиција. Во [1] е покажано дека секој квазинормален оператор е директна сума од нула оператор, нормален оператор и оператор кој е унитарно еквивалентен со операторско-тежински шифт со постојани тежини.

Т е о р е м а 1. Нека Т биде операторско-тежински шифт со позитивни инвертибилни тежини A_i, (i=0, 1, . . .); тогаш T е квазинормален ако и само ако $A_0=A_1=A_2= \dots$

Доказ: Ги испишуваме матриците од операторите T и T^*:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & . & . & . \\ A_0 & 0 & 0 & . & . & . \\ 0 & A_1 & 0 & . & . & \\ 0 & 0 & A_2 & 0 & . & . \\ & & & . & . & . \\ & & & & . & . \end{bmatrix} \qquad T^* = \begin{bmatrix} 0 & A_0 & 0 & 0 & . & \\ 0 & 0 & A_1 & 0 & . & \\ 0 & 0 & 0 & A_2 & & \\ & & & . & . & \\ & & & & . & \\ & & & & & \end{bmatrix}$$

Напоменуваме дека матриците T и T^* се бесконечни. Оправданоста за употребата на бесконечните матрици може да се покаже лесно [3].

Директните пресметувања покажуваат:

$$(T^* T)\,T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ A_1^2 A_0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & A_2^2 A_1 & 0 & 0 & & \\ & 0 & A_3^2 A_2 & 0 & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

и

$$T\,(T^* T) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ A_0^3 & 0 & 0 & 0 & & \\ & A_1^3 & 0 & 0 & & \\ & & A_2^3 & 0 & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

Тогаш, T е квазинормален ако и само ако $A_1^2 A_0 = A_0^2 A_0$ или во општ случај $(A_i^2 - A_{i-1}^2)\, A_{i-1} = 0$, за $i = 1, 2, \ldots$ Бидејќи A_i се инвертибилни добиваме $A_i^2 = A_{i-1}^2$, . Од позитивноста на A_i следува дека $A_i = A_{i-1}$, за $i = i$, 1., со што теоремата е докажана.

Забелешка: Теоремата 1 е точна ако инвертибилноста на позитивните операторски тежини се замени со позитивни оператори чии досези сегусти во H.

На ист начин како и при теремата 1 може да се покаже дека билателарниот операторски (скаларен) тежински шифт T со позитивни инвертибилни тежини е квазинормален ако и само $A_i = A_{i+1}$ (односно $\alpha_i = \alpha_{i+1}$), за $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Од погоре изнесеното се гледа дека поимот за квазинормалност на еден оператор е близок до поимот за нормалност. Точна е следнава теорема:

Теорема 2. Следниве услови се меѓусебе еквивалентни:

(1) T е нормален.

(2) $(\lambda I - T)$ и $(\mu I - T)$ се квазинормални оператори, барем за две различни вредности на λ и μ.

(3) $$\Gamma(T) = \varnothing.$$

Доказ: Импликациите (1) $\Rightarrow$ (2), (1) $\Rightarrow$ (3) се тривијално исполнети. Од квазинормалноста на $(\lambda I - T)$ се добива

$$(\lambda I - T) | \lambda |^2 - \lambda (\lambda I - T) T^* - \bar{\lambda} (\lambda I - T) T + (\lambda I - T) T^* T =$$

$$(\lambda I - T) | \lambda |^2 - \lambda T^* (I - T) - \bar{\lambda} T (\lambda I - T) + \lambda T^* T (I - T)$$

По поништувањето се добива

$$\text{(a)} \qquad \lambda T^* T - TT^* T = \lambda T^* T - T^* TT$$

Од квазинормалноста на $\mu I - T$ се добива:

$$\text{(b)} \qquad \mu TT^* - TT^* T = \mathrm{d}\mu T^* T - T^* TT$$

Со вадење на равенката (2) од равенката (1) се добива:

$$(\lambda - \mu) \quad (TT^* - T^* T) = 0$$

од каде следува $T^* T = TT^*$ бидејќи $\lambda \neq \mu$.

Импликацијата (3) $\Rightarrow$ (1) следува од дефиниција на множеството $\Gamma(T)$ (види [3]) и од квазинормалноста на операторот T.

ЛИТЕРАТУРА

1] A. Brown, On a class of operators, Proc. Amer. Math. Soc., 4 (1953), 723—729.

2] A. Lambert, Unitary equivalence and reducibilty of invertible weighted shifts, Bull. Austral. Math. Soc. vol 15 (1971) 151—173.

3] P. R. Halmos, Hilbert Space Problem Book, Van Nostrand 1967.

Novak Ivanovski

ON QUASI NORMAL OPERATORS

ABSTRACT

In this paper it is shown that an operator valued weighted shift with positive invertible weights is quasi-ncrmal if the weights are equal.

Next, a relation between the quasi-normality and normality of an operator is exhibited.