Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R. P. de Serbie
Vol. VIII, 1—2 (1956), Beograd
Yougoslavie

ПРИЛОГ ДОКАЗИМА НЕКИХ СТАВОВА ВЕКТОРСКЕ АЛГЕБРЕ

ВИКТОР ЈАНЕКОСКИ, СКОПЉЕ

За доказивање познатих ставова векторске алгебре:

(1) $$(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{c} = (\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}) \cdot \mathfrak{a} = (\mathfrak{c} \times \mathfrak{a}) \cdot \mathfrak{b},$$

(2) $$(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times \mathfrak{c} = \mathfrak{b}\,(\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{a}) - \mathfrak{a}\,(\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}),$$

где су $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ произвољни вектори, у литератури срећемо различите поступке.

Овде (тач. **1**), изводећи израз за квадрат мешовитог производа вектора $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ у облику Gram'ове детерминанте трећег реда

(3) $$[(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{c}]^2 = \begin{vmatrix} \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} & \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a} & \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{a} \\ \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} & \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{b} & \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{b} \\ \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c} & \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c} & \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} \end{vmatrix},$$

изложићемо један нов поступак за добивање правила цикличне размене у мешовитом производу (1).

Даље (тач. **2** и **3**), даћемо неколико нових доказа за познати образац двоструког векторског производа (2), као и (тач. **4**), за случај некомпланарних вектора $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, извођење једног новог облика трансформационог обрасца:

(2') $$(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times \mathfrak{c} = \frac{(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \cdot (\mathfrak{c} \times \mathfrak{a})}{(\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}) \cdot \mathfrak{a}}\, \mathfrak{b} \times \mathfrak{c} + \frac{(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \cdot (\mathfrak{c} \times \mathfrak{b})}{(\mathfrak{c} \times \mathfrak{a}) \cdot \mathfrak{b}}\, \mathfrak{c} \times \mathfrak{a}.$$

При томе, поред правила (1) и идентитета (3), користићемо још и дистрибутивни закон за скаларно множење, Lagrange'ов идентитет

(4) $$(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})^2 + (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})^2 = \mathfrak{a}^2\, \mathfrak{b}^2,$$

као и специјалан случај дистрибутивног закона за векторско множење

(5) $$(\mathfrak{a} + \lambda \mathfrak{b}) \times \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}, \qquad (\lambda = \text{произвољан скалар}).$$

Идентитет (4) је очигледан и може се лако показати да је он последица дистрибутивног закона за скаларно множење, док идентитет (5) следује непосредно из геометриско-површинског значења векторског производа.

1.1. Један произвољан вектор $\mathfrak{c}$ може се разложити, за неколинеарне $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$, у некомпланарном триједру вектора $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$:

(6) $$\mathfrak{c} = \lambda \mathfrak{a} + \mu \mathfrak{b} + \nu (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}).$$

Ако ову једначину (6) измножимо скаларно векторима $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ — узимајући у обзир да је, због нормалности вектора $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ на векторима $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) = \mathfrak{b} \cdot (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) = 0$ — добићемо систем

$$(H_1) \qquad \begin{cases} \lambda \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} + \mu \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a} & = \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{a}, \\ \lambda \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} + \mu \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{b} & = \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{b}, \\ \lambda \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c} + \mu \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a} + \nu (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{c} & = \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c}, \\ \nu (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})^2 & = \mathfrak{c} \cdot (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \end{cases}$$

који, поред тога што одређује коефицијенте разлагања λ, μ, ν, даје и, с обзиром на Lagrange'ов идентитет (4) и независно од геометриског значења мешовитог производа $(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c} \cdot (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})$, идентитет (3).

1.2. Ако сада у једначини (6) извршимо цикличну замену вектора $\mathfrak{a} \to \mathfrak{b} \to \mathfrak{c} \to \mathfrak{a}$, $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} \to \mathfrak{b} \times \mathfrak{c}$ и поновимо поступак из тач. **1.1**, добићемо систем (H_2) који ће одређивати квадрат мешовитог производа $(\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}) \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b} \times \mathfrak{c})$ преко исте Gram'ове детерминанте дате десним изразом идентитета (3). Према томе, из система (H_1) и (H_2) имамо

$$(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{c} = \varepsilon (\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}) \cdot \mathfrak{a},$$

где је $\varepsilon = \pm 1$ параметар који се, због једнозначности мешовитих производа $(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{c}$ и $(\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}) \cdot \mathfrak{a}$, одређује из једног партикуларног случаја: нпр., ако $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ граде десни ортогонални триједар вектора, лако се налази $\varepsilon = +1$. Слично, преко одговарајућег система (H_3), из (H_2) и (H_3) добија се $(\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}) \cdot \mathfrak{a} = (\mathfrak{c} \times \mathfrak{a}) \cdot \mathfrak{b}$.

На тај начин доказано је правило цикличне размене у мешовитом производу (1) које се обично [1] геометриски доказује. Код Burali-Forti e Marcolongo'a [2] се наводи да се исто правило може доказати аналитички помоћу координата и уједно се даје доказ помоћу својства сложеног векторског производа $(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times (\mathfrak{b} \times \mathfrak{c})$ да се може развити на два начина.

2. Да би доказао једнакост (2), Burgatti [3] полази од израза који се лако добија

$$(7)\qquad (\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times\mathfrak{c}=k\,[\mathfrak{b}\,(\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{a})-\mathfrak{a}\,(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c})]$$

— где су $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ произвољни вектори, и тврди без доказа да, цитирамо —

„ . . . *essendo* l ($l \equiv k$ — B. J.) *un numero indipendente dai vettori (per ragioni d'omogeneità)*".

Међутим, није непосредно јасно да због хомогености израза $(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times\mathfrak{c}$ и $\mathfrak{b}(\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{a})-\mathfrak{a}(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c})$ скалар k не зависи од вектора $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$.

2.1. Доказаћемо, најпре, да скаларна функција k вектора $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ тј. $k=k\,(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})$, због хомогености поменутих израза, не зависи од њихових алгебарских вредности, тј. од модула и смерова вектора $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$.

Ако у (7) векторе $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ заменимо респективно са $\lambda\mathfrak{a}, \mu\mathfrak{b}, \nu\mathfrak{c}$. где су λ, μ, ν произвољни позитивни или негативни скалари, имамо

$$(\lambda\mathfrak{a}\times\mu\mathfrak{b})\times\nu\mathfrak{c}=k(\lambda\mathfrak{a}, \mu\mathfrak{b}, \nu\mathfrak{c})\,[\mu\mathfrak{b}\,(\nu\mathfrak{c}\cdot\lambda\mathfrak{a})-\lambda\mathfrak{a}\,(\mu\mathfrak{b}\cdot\nu\mathfrak{c})],$$

одакле, с обзиром на (7)

$$(8)\qquad k\,(\lambda\mathfrak{a}, \mu\mathfrak{b}, \nu\mathfrak{c})=k\,(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}),$$

тј. k је хомогена функција нултог степена у односу на алгебарске вредности вектора $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ — што због произвољних, и према томе, различитих λ, μ, ν даје $k\equiv\mathrm{Const.}$

Да функција k не зависи и од праваца — углова што их између себе захватају вектори $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$, доказаћемо на следећи начин. За триједре вектора $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1$ и $\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1$ имамо, према (7), респективно једначине

$$(9)\qquad \begin{cases}(\mathfrak{a}_1\times\mathfrak{b}_1)\times\mathfrak{c}_1=k\,(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1)\,[\mathfrak{b}_1\,(\mathfrak{c}_1\cdot\mathfrak{a}_1)-\mathfrak{a}_1\,(\mathfrak{b}_1\cdot\mathfrak{c}_1)],\\ (\mathfrak{a}_2\times\mathfrak{b}_1)\times\mathfrak{c}_1=k\,(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1)\,[\mathfrak{b}_1\,(\mathfrak{c}_1\cdot\mathfrak{a}_2)-\mathfrak{a}_2\,(\mathfrak{b}_1\cdot\mathfrak{c}_1)].\end{cases}$$

Вектор $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}_1$ нека је, сада, прешао у произвољан вектор $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}_2$. На основу резултата (8) довољно је да се стави $\mathfrak{a}_2=\mathfrak{a}_1+\beta\,\mathfrak{b}_1$, где β означава произвољан скалар. Тада су, према (5), леви изрази од (9) једнаки; исто тако су једнаки и десни изрази који стоје уз функцију k, што се лако доказује развијањем другог десног израза. Значи, имамо

$$(10)\qquad k\,(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1)=k\,(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1),$$

тј., с обзиром на (8), k не зависи од правца, смера и модула вектора $\mathfrak{a}$. Слично, трансформацијама: $\mathfrak{b}_2=\mathfrak{b}_1+\alpha\,\mathfrak{a}_2$ и $\mathfrak{c}_2=\mathfrak{c}_1+\gamma\,(\mathfrak{a}_2\times\mathfrak{b}_2)$, где су α, γ произвољни скалари, доказује се да k не зависи респективно од вектора $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$, тј. за све међусобне положаје и модуле вектора $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ је

$$k \equiv \text{Const},$$

што је и требало доказати.

Сада, слично *Burgatti*'у, из једног партикуларног случаја нпр. за $\mathfrak{c} = \mathfrak{a}$ и $\mathfrak{a}$ нормално на $\mathfrak{b}$, из (7) се лако налази $k = 1$.

2.2. Да је скалар k у једначини (7) константа, може се — опет помоћу функционалних једначина — доказати и на следећи начин.

Једначину (7) множимо скаларно једним произвољним помоћним вектором $\mathfrak{d} \neq 0$ и, на основу доказаног правила цикличне размене у мешовитом производу (1) примењеног на израз $[(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times \mathfrak{c}] \cdot \mathfrak{d}$ и закона комутације за скаларни производ примењеног на израз $(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} \cdot (\mathfrak{c} \times \mathfrak{d}) = (\mathfrak{c} \times \mathfrak{d}) \cdot (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})$, добивамо четири форме.

$$[(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times \mathfrak{c}] \cdot \mathfrak{d} = [\mathfrak{b} \times (\mathfrak{c} \times \mathfrak{d})] \cdot \mathfrak{a} = [(\mathfrak{c} \times \mathfrak{d}) \times \mathfrak{a}] \cdot \mathfrak{b} = [\mathfrak{d} \times (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})] \cdot \mathfrak{c}.$$

Одатле, с обзиром на закон алтернације за векторски производ: $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = -\mathfrak{b} \times \mathfrak{a}$, од десних страна једначине (7), преко лако схватљивих трансформација, добивамо три релације

$$k(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}) = k(\mathfrak{d}, \mathfrak{c}, \mathfrak{b}) = k(\mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{a}) = k(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{d})$$

које опет дају $k \equiv \text{Const}$.

3. За добивање обрасца двоструког векторског производа (2), Chattelun [4] полази од *Lagrange*'овог идентитета (4) и, користећи дистрибутивне законе за скаларно и векторско множење, након извесних скаларно-векторских трансформација, долази до обрасца

$$(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \cdot (\mathfrak{c} \times \mathfrak{a}) = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})(\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{a}) - (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a})(\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}) \tag{11}$$

који на основу правила цикличне размене у мешовитом производу (1) и дистрибутивног закона за скаларно множење, написан у облику

$$\mathfrak{N} \cdot \mathfrak{a} = 0$$

заједно са

$$\mathfrak{N} \cdot (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) = 0 \quad \text{и} \quad \mathfrak{N} \cdot \mathfrak{c} = 0,$$

где је

$$\mathfrak{N} \equiv (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times \mathfrak{c} - [\mathfrak{b}(\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{a}) - \mathfrak{a}(\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c})]$$

даје, за случај некомпланарних вектора $\mathfrak{a}, \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$, $\mathfrak{N} = 0$, тј. тражени образац (2). Потом, помоћу једне трансформације и дистрибутивних закона на векторско множење, доказује да исти важи и за случај компланарности вектора $\mathfrak{a}, \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$.

3.1. Образац *Chattelun'a* (11) се може добити из нашег система (H_1) у тач. **1.1.** Наиме, из система (H_1) за произвољне векторе $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ $(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} \neq \mathfrak{a})$ издвајамо систем

$$(L_1) \qquad \begin{cases} \lambda\, \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} + \mu\, \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{a}, \\ \lambda\, \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} + \mu\, \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{b}. \end{cases}$$

Ако, сада, једначину (6) измножимо скаларно векторима $\mathfrak{a} \times (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})$ и $\mathfrak{b} \times (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})$, користећи правило цикличне размене у мешовитом производу (1), добивамо систем

$$(L_2) \qquad \begin{cases} (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \cdot (\mathfrak{c} \times \mathfrak{a}) = -\mu\, (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})^2, \\ (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \cdot (\mathfrak{c} \times \mathfrak{b}) = \quad \lambda\, (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})^2; \end{cases}$$

овај систем (L_2), за случај некомпланарних вектора $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$, се може добити и ако једначину (6) измножимо скаларно векторима $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$, $\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}$, $\mathfrak{c} \times \mathfrak{a}$, док се за компланарне $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ добија, помоћу (5), ако се (6) измножи векторски са $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ и тако добивене релације помноже скаларно са $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$.

Решења λ и μ система (L_1) замењена у систему (L_2), преко *Lagrange*'овог идентитета (4), дају обрасце

$$(11') \qquad \begin{cases} (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \cdot (\mathfrak{c} \times \mathfrak{a}) = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})\, (\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{a}) - (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a})\, (\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}), \\ (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \cdot (\mathfrak{c} \times \mathfrak{b}) = (\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{b})\, (\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{a}) - (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})\, (\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}) \end{cases}$$

који написани у облику

$$\begin{matrix} \mathfrak{R} \cdot \mathfrak{a} = 0, \\ \mathfrak{R} \cdot \mathfrak{b} = 0 \end{matrix} \qquad \{\mathfrak{R} \equiv (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times \mathfrak{c} - [\mathfrak{b}\, (\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{a}) - \mathfrak{a}\, (\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c})]\}$$

— имајући у виду да вектори $(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times \mathfrak{c}$ и $\mathfrak{b}\, (\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{a}) - \mathfrak{a}\, (\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c})$ леже у равни неколинеарних вектора $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — дају образац (2), за који се лако доказује да важи и за $\mathfrak{b}$ колинеарно са $\mathfrak{a}$ ако се у њему изврши смена $\mathfrak{b} = \omega\, \mathfrak{a}$, где је ω произвољан скалар.

3.2. Образац (2) може да се добије и на следећи начин. Будући да, за неколинеарне $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$, вектори $(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times \mathfrak{a}$ и $(\mathfrak{b} \times \mathfrak{a}) \times \mathfrak{b}$ леже у равни вектора $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$, аналогно разлагању (6) у тач. **1.1**, за вектор $\mathfrak{c}$ можемо да ставимо

$$\mathfrak{c} = \lambda\, (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times \mathfrak{a} + \mu\, (\mathfrak{b} \times \mathfrak{a}) \times \mathfrak{b} + \nu\, (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}).$$

Ако ову једначину измножимо скаларно векторима $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$, имајући у виду својство (1), за $\mathfrak{c}$ можемо, сада, да напишемо

$$(12) \qquad \mathfrak{c} = \frac{\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{b}}{(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})^2}\, (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times \mathfrak{a} + \frac{\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{b}}{(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})^2}\, (\mathfrak{b} \times \mathfrak{a}) \times \mathfrak{b} + \frac{(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{c}}{(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})^2}\, \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}.$$

Множећи последњу једнакост (12) скаларно вектором $\mathfrak{c}$, преко својства (1) добивамо

$$(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})^2\,\mathfrak{c}^2 = [(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times\mathfrak{c}]\cdot[\mathfrak{b}\,(\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{a}) - \mathfrak{a}\,(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c})] + [(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\cdot\mathfrak{c}]^2$$

што на основу *Lagrange*'овог идентитета (4), примењеног на векторе $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$, даје

$$[(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times\mathfrak{c}]^2 = [(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times\mathfrak{c}]\times[\mathfrak{b}\,(\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{a}) - \mathfrak{a}\,(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c})]. \tag{13}$$

Последњој једначини (13) написаној у облику

$$\mathfrak{N}\cdot[(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times\mathfrak{c}] = 0,$$

можемо дописати још

$$\mathfrak{N}\cdot(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}) = 0 \quad \text{и} \quad \mathfrak{N}\cdot\mathfrak{c} = 0,$$

где је опет

$$\mathfrak{N} \equiv (\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times\mathfrak{c} - [\mathfrak{b}\,(\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{a}) - \mathfrak{a}\,(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c})].$$

Ако је вектор $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b} \neq 0$, и вектор $\mathfrak{c}$ није нормалан на раван вектора $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$, тада је геометриски евидентно да је триједар вектора $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, (\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times\mathfrak{c}$ некомпланаран, па из горњих трију једначина следује (2). До истог резултата се долази и ако се формира мешовит производ вектора $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, (\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times\mathfrak{c}$, и који на основу својства (1) може да се напише у облику $[(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times\mathfrak{c}]^2$ и који је, због горе направљених претпоставки, различит од нуле. Образац (2) се верификује лако и за случај: $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b} = 0$ преко смене $\mathfrak{b} = \lambda\,\mathfrak{a}$, као и за случај: $(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times\mathfrak{c} = 0$ уз $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b} \neq 0$ преко смене $\mathfrak{c} = \omega\,(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})$, где су λ и ω произвољни скалари.

До обрасца (2) се може доћи и комбинираном методом: наиме, ако се за $(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times\mathfrak{c}$ узме из једначине (7) вредност $k\,[\mathfrak{b}\,(\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{a}) - \mathfrak{a}\,(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c})]$ и замени у (13) добива се одатле одмах $k = 1$.

4. Двоструком векторском производу може се, за некомпланарне векторе $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ дати нов облик (2′). Наиме, ако су $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ некомпланарни вектори тада су, како се лако геометриски уочава и може векторски помоћу мешовитог производа вектора $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}\times\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}\times\mathfrak{a}$ да докаже, $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}\times\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}\times\mathfrak{a}$ су исто тако некомпланарни и, према томе, неколинеарни вектори па за $(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times\mathfrak{c}$, као и за сваки произвољан вектор, може да се стави

$$(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times\mathfrak{c} = \alpha\,(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c}) + \beta\,(\mathfrak{c}\times\mathfrak{a}) + \gamma\,(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})$$

Ако помножимо ову једначину скаларно вектором $\mathfrak{c}$, добијамо одмах $\gamma = 0$, тј. вектор $(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times\mathfrak{c}$ лежи у равни вектора $\mathfrak{b}\times\mathfrak{c}$ и $\mathfrak{c}\times\mathfrak{a}$. Множећи, даље, исту једначину векторима $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$, и узимајући у обзир својство (1), за коефицијенте α и β добијамо

$$\alpha = \frac{(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \cdot (\mathfrak{c} \times \mathfrak{a})}{(\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}) \cdot \mathfrak{a}}, \quad \beta = \frac{(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \cdot (\mathfrak{c} \times \mathfrak{b})}{(\mathfrak{c} \times \mathfrak{a}) \cdot \mathfrak{b}},$$

одакле следује тражени образац (2').

Ако вектори $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ нису задани помоћу својих координата, образац (2') није згодан за примену. За непосредну, векторску, примену коефицијенте α и β изражавамо помоћу скаларних производа вектора $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ тако да, сада уместо (2'), имамо

$$(2'') \qquad (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times \mathfrak{c} = \frac{1}{\pm\sqrt{G}}(\Delta_1 \mathfrak{b} \times \mathfrak{c} + \Delta_2 \mathfrak{c} \times \mathfrak{a}),$$

где су, према обрасцима (3) и (11') изведеним у тач. **1.1** и **3.1**:

$$G \equiv \begin{vmatrix} \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a} & \mathfrak{b}\cdot\mathfrak{a} & \mathfrak{c}\cdot\mathfrak{a} \\ \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} & \mathfrak{b}\cdot\mathfrak{b} & \mathfrak{c}\cdot\mathfrak{b} \\ \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{c} & \mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c} & \mathfrak{c}\cdot\mathfrak{c} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_1 \equiv \begin{vmatrix} \mathfrak{c}\cdot\mathfrak{a} & \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a} \\ \mathfrak{c}\cdot\mathfrak{b} & \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_2 \equiv \begin{vmatrix} \mathfrak{c}\cdot\mathfrak{a} & \mathfrak{b}\cdot\mathfrak{a} \\ \mathfrak{c}\cdot\mathfrak{b} & \mathfrak{b}\cdot\mathfrak{b} \end{vmatrix};$$

знак пред изразом $\sqrt{G}$ се бира тако да је једнак са знаком мешовитог производа $(\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}) \cdot \mathfrak{a} = (\mathfrak{c} \times \mathfrak{a}) \cdot \mathfrak{b}$.

До обрасца (2'') — ако дозволимо употребу дистрибутивног закона за векторско множење — можемо да дођемо ако, слично као у тач. **1.1**, вектор $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ разложимо по некомпланарним векторима $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ и образујемо, помоћу дистрибутивног закона за векторско множење израз $(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times \mathfrak{c}$.

Од два израза (2) и (2'') за двоструки векторски производ, добијамо нову везу између три некомпланарна вектора $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$

$$(14) \qquad \pm\sqrt{G}\,[\mathfrak{b}\,(\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{a}) - \mathfrak{a}\,(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c})] = \Delta_1\, \mathfrak{b} \times \mathfrak{c} + \Delta_2\, \mathfrak{c} \times \mathfrak{a},$$

а одатле, цикличном заменом $\mathfrak{a} \to \mathfrak{b} \to \mathfrak{c} \to \mathfrak{a}$, $\mathfrak{b} \times \mathfrak{c} \to \mathfrak{c} \times \mathfrak{a} \to \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} \to \mathfrak{b} \times \mathfrak{c}$, још две сличне.

Геометриско значење релације (14) се састоји у томе што, ако вектор $\mathfrak{c}$ није нормалан на векторима $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$, вектор $(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times \mathfrak{c}$ даје правац пресека двеју равни постављених кроз векторе $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ и векторе $\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}$, $\mathfrak{c} \times \mathfrak{a}$ или, што је исто, пресек равнине кроз векторе $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ и равнине која пролази кроз заједнички почетак вектора $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ и стоји нормално на вектору $\mathfrak{c}$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Spielrein J., *Lehrbuch der Vektorrechnung*, 2. Aufl., Stuttgart 1926, S. 17.

[2] Burali-Forti C. e Marcolongo R., *Elementi di Calcolo vettoriale*, secondo edizione, Bologna 1921, p. 31.

[3] Burgatti P., *Elementi di Calcolo vettoriale e omografico*, Milano 1937, p. 18.

[4] Chattelun L., *Calcul vectoriel*, t. I, Paris 1952, p. 170.

SUR LES DÉMONSTRATIONS DE QUELQUES THÉORÈMES EN ALGÈBRE DES VECTEURS

par V. JANEKOSKI, SKOPJE

Résumé

Dans cet article l'auteur donne les démonstrations originelles de quelques théorèmes connus en algèbre des vecteurs. Le travail est de caractère méthodologique.