Viktor Janekoski

JEDAN DIREKTAN DOKAZ STEINER-OVE TEOREME O RAVNOKRAKOM TROUGLU

U literaturi postoji više planimetriskih, uglavnom indirektnih, dokaza *Steiner*-ove teoreme*: ***Ako su simetrale dva ugla trougla jednake, trougao je ravnokrak.*** Na ovom mestu biće izložen jedan direktan dokaz gornje teoreme.

Neka je

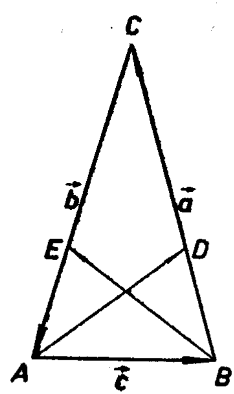
$$\overrightarrow{AB}=\vec{c},\quad \overrightarrow{BC}=\vec{a},\quad \overrightarrow{CA}=\vec{b},$$

gde je

$$AB=c,\quad BC=a,\quad CA=b$$

pri čemu je (sl. 1)

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0. \tag{1}$$



Sl. 1

Treba pokazati da iz jednakosti simetrale AD unutrašnjeg ugla A sa simetralom BE unutrašnjeg ugla B posmatranog trougla ABC

$$AD=BE \tag{2}$$

sleduje $a=b$.

Simetrale unutrašnjih uglova A i B su određene vektorima:

$$\overrightarrow{AD}=\lambda'(\vec{c}_0-\vec{b}_0)=\lambda(b\vec{c}-c\vec{b}) \qquad (\lambda=\lambda'/bc),$$
$$\overrightarrow{BE}=\mu'(\vec{a}_0-\vec{c}_0)=\mu(c\vec{a}-a\vec{c}) \qquad (\mu=\mu'/ca), \tag{3}$$

pri čemu su λ, μ za sada neodređeni skalari, a $\vec{a}_0$, $\vec{b}_0$, $\vec{c}_0$ — ortovi u smeru vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. S druge strane je

$$\overrightarrow{AD}=\vec{c}+m\vec{a},\quad \overrightarrow{BE}=\vec{a}+n\vec{b} \tag{4}$$

pri čemu su, isto tako, m, n za sada neodređeni skalari.

Izjednačavanjem izraza (3) i (4) koji određuju vektor $\overrightarrow{AD}$, s obzirom na relaciju (1), dobijamo

$$(\lambda c-m)\vec{b}+(1-m-\lambda b)\vec{c}=0$$

---

* Prema prikazu *S. Prvanovića* u članku: *Štajnerova teorema o ravnokrakom trouglu*, Nastava matematike i fizike u srednjoj školi, br. 3, 1952, str. 45—48.

odakle, zbog linearne nezavisnosti nekolinearnih vektora $\vec{b}$ i $\vec{c}$, nalazimo

(5) $$\lambda = 1/(b+c), \quad m = c/(b+c).$$

Sa vrednošću (5) za λ, prema (3) imamo,

(6) $$\overrightarrow{AD} = (b\,\vec{c} - c\,\vec{b})/(b+c)$$

odakle, cikličnom zamenom $\vec{b} \to \vec{c} \to \vec{a}$, $b \to c \to a$

(7) $$\overrightarrow{BE} = (c\,\vec{a} - a\,\vec{c})/(c+a).$$

Kako je, s obzirom na (1),

$$2\vec{b} \cdot \vec{c} = a^2 - (b^2 + c^2), \quad 2\vec{c} \cdot \vec{a} = b^2 - (c^2 + a^2),$$

za kvadrate modula vektora datih sa (6) i (7) imamo:

(8) $$AD^2 = bc\,(b+c+a)\,(b+c-a)/(b+c)^2,$$

(9) $$BE^2 = ca\,(c+a+b)\,(c+a-b)/(c+a)^2.$$

Uslov (2), pomoću izraza (8) i (9), sada glasi

$$b\,(c+a)^2\,(b+c) - ab\,(c+a)^2 = a\,(b+c)^2\,(c+a) - ab\,(b+c)^2$$

što napisano kao

$$ab\,[(b+c)^2 - (c+a)^2] + (b+c)\,(c+a)\,[b\,(c+a) - a\,(b+c)] = 0,$$

ili

$$ab\,(a+b+2c)\,(b-a) + (b+c)\,(c+a)\,(b-a)\,c = 0,$$

konačno daje

(10) $$(b-a)\,[ab\,(a+b+2c) + c\,(b+c)\,(c+a)] = 0.$$

Pošto su svi izrazi u srednjoj zagradi poslednje relacije (10) pozitivni, odatle sleduje $b-a=0$, što je i trebalo pokazati.