ЕГЗИСТЕНЦИЈА НА КЛАСИ ТРИАГОЛНИЦИ ЧИИШТО СТРАНИ СЕ ДАДЕНИ ФУНКЦИИ

Виктор Т. Јанекоски

Нека a, b, c се големини на страни, A, B, C внатрешни агли на триаголникот ABC. Познато е дека тригонометриските функции

$$
\text{(S)} \qquad \begin{cases} \sin A, \quad \sin B, \quad \sin C & (0 < A, B, C < \pi); \\ \sin 2A, \quad \sin 2B, \quad \sin 2C & (0 < A, B, C < \pi/2); \\ \cos A/2, \quad \cos B/2, \quad \cos C/2 & (0 < A, B, C < \pi); \\ \cos^2 A/2, \quad \cos^2 B/2, \quad \cos^2 C/2 & (0 < A, B, C < \pi), \end{cases}
$$

можат да бидат големини на страни на соодветни триаголници.

Авторот докажал [1] егзистенција и единственост на триаголници со големини на страни

$$
\text{(N)} \qquad \begin{matrix} \cos A, \ \cos B, \ \sin C & (0 < A, B < \pi/2, \ 0 < C < \pi); \\ \sin A/2, \ \sin B/2, \ \cos C/2 & (0 < A, B, C < \pi) \end{matrix}
$$

како и извесни особини на тие триаголници.

Разгледуваме егзистенција на некои класи триаголници чиишто големини на страни можат да бидат однапред дадени функции на страните на два или повеќе триаголника.

Добиените резултати се изразени со следниов

Став. Дадени се триаголниците $A_k B_k C_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n \geq 2)$ и величините

$$
(1) \qquad x = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}, \quad y = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}, \quad z = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} c_k^2},
$$

каде што $p > 1$ е природен број, $a_k = B_k C_k$, $b_k = C_k A_k$, $c_k = A_k B_k$

Тогаш условите:

i) сите триаголници $A_kB_kC_k$ се остроаголни триаголници, или

ii) барем еден од триаголниците $A_kB_kC_k$ е остроаголен, сите останати се правоаголни триаголници,

се доволни за егзистенција (и единственост) на триаголникот XYZ со големини на страните x, y, z дадени со равенствата (1).

Доказ. Најнапред ќе наведеме {[2], [3]}

Лема. Триаголник со големини на страни a, b, c имплицира егзистенција на триаголник ос големини на страни

$$\sqrt[p]{a}, \quad \sqrt[p]{b}, \quad \sqrt[p]{c},$$

каде што $p > 1$ е природен број.

i) остроаголност на триаголниците $A_kB_kC_k$ имплицира неравенства

$$(1_1) \qquad a_k^2 + b_k^2 > c_k^2, \quad b_k^2 + c_k^2 > a_k^2, \quad c_k^2 + a_k^2 > b_k^2.$$

Ако воведеме величини

$$(1_2) \qquad \alpha = \sum_{k=1}^{n} a_k^2, \quad \beta = \sum_{k=1}^{n} b_k^2, \quad \gamma = \sum_{k=1}^{n} c_k^2,$$

тогаш, поради (1_1), се добива

$$\alpha + \beta = \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) > \sum_{k=1}^{n} c_k^2,$$

или $\alpha+\beta > \gamma$. По сличен пат се добива и $\beta+\gamma > \alpha$, $\gamma+\alpha > \beta$. Неравенствата

$$(1_3) \qquad \alpha+\beta > \gamma, \quad \beta+\gamma > \alpha, \quad \gamma+\alpha > \beta$$

се потребни и доволни услови за езгистенција на триаголникот со големини на страни α, β, γ дадени со (1_2).

Неравенствата (1_3) и наведената лема обезбедуваат егзистенција на триаголник со големини на страни

$$\sqrt[p]{\alpha}, \quad \sqrt[p]{\beta}, \quad \sqrt[p]{\gamma},$$

што, во согласност со (1_2), и го докажува ставот за овој случај.

ii). Доказот е аналоген. Тука е суштествено барем еден од триаголниците $A_k\, B_k\, C_k$ да е остроаголен триаголник, додека останалите се правоаголни триаголници. Нека е тоа триаголникот $A_1\ B_1\ C_1$. Тогаш е

$$a_1^2+b_1^2>c_1^2, \quad b_1^2+c_1^2>a_1^2, \quad c_1^2+a_1^2>b_1^2,$$

пак неравенствата (1_3) остануваат во сила. Тоа и го докажува ставот во потполност.

Забелешка 1. Можно е да се ослабнат условите i) или ii) на предложениот став. На пример, може да се покаже дека ставот важи и кога сите триаголници $A_kB_kC_k$ се правоаголни триаголници.

Забелешка 2. Од интерес е случајот $p=2$, $n=2$, каде што триаголниците $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ обезбедуваат егзистенција на триаголникот со големини на страни

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2}, \quad \sqrt{b_1^2+b_2^2}, \quad \sqrt{c_1^2+c_2^2}.$$

Овој партикуларен случај е разгледуван од A. Oppenheim и R. P. Nolan {[3], p. 93, **10.12**} со ослабнати услови наложени на триаголниците $A_1\ B_1\ C_1$ и $A_2\ B_2\ C_2$; имено тие се произволни триаголници.

M. Klamkin [4] има, помеѓу останалото, покажано дека резултатот на Oppenheim и Nolan е партикуларен случај од поопштиот. Имено, егзистенцијата на триаголникот со страните

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k{}^p\right)^{1/p}, \quad \left(\sum_{k=1}^{n} b_k{}^p\right)^{1/p}, \quad \left(\sum_{k=1}^{n} c_k{}^p\right)^{1/p},$$

каде што $p>1$ е реален број, a_k, b_k, c_k се големини на страни на произволните триаголници е последица на неравенството на Minkowski [5]

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k{}^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k{}^p\right)^{1/p} > \left\{\sum_{k=1}^{n} (a_k+b_k)^p\right\}^{1/p},$$

каде што е $a_k,\ b_k>0$, $a_k+b_k>c_k>0$ и $p>1$ е реален број. Одбележуваме дека генерализацијата на Klamkin е во друга насока од нашата, бидејќи делумно совпаѓање се добива само за $p=2$ $(n\geqslant 2)$.

Можна е и натамошната генерализација на нашите резултати. Имено, може да се покаже дека егзистира триаголник со големини на страни

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k{}^2\right)^{1/p}, \quad \left(\sum_{k=1}^{n} b_k{}^2\right)^{1/p}, \quad \left(\sum_{k=1}^{n} c_k{}^2\right)^{1/p},$$

каде што $p>1$ е реален број, a_k, b_k, c_k $(k=1, 2, \ldots, n\geqslant 2)$ се големини на страни на триаголниците $A_kB_kC_k$ кои не се тапоаголни триаголници. Оваа генерализација ќе биде разгледана во друга прилика.

Забелешка 3. Ако за големини на страните a_k, b_k, c_k $(k=1, 2, \ldots, n \geqslant 2)$ на триаголните $A_k B_k C_k$ се земат погодно избрани величини од (S) и (N), тогаш егзистенција на триаголникот XYZ со страните x, y, z дефинирани со (1) дава можност да се установат нови неравенства за аглите и другите елементи на дадениот триаголник ABC. Со тоа би се проширил бројот на неравенствата за триаголник, за кој извонредно, во доста детали, богат материјал дава книгата [3]. Оваа проблематика ќе биде третирана во еден друг труд.

БИБЛИОГРАФИЈА

[1] Виктор Т. Јанекоски, *Егзистенција и некои особини на триаголници чиишто страни се тригонометриски функции на аглите од даден триаголник*, „Билтен" на ДМФ од СР Македонија, кн. XXI, 1970.

[2] D. S. Mitrinović (E. S. Barnes, D. C. B. Marsh, J. R. M. Radok), *Elementary Inequalities*, Groningen 1964, p. 118, **6,23**.

[3] O. Bottema, R. Ž. Djordjević, R. R. Janić, D. S. Mitrinović, P. M. Vasić, *Geometric Inequalities*, Groningen 1969, p. 119, **13.3**.

[4] Murray S. Klamkin, *Notes on Inequalities involving triangles or Tetrahedrons*, „Publikacije" Elektrotehničkog fakul. Univ. u Beogr. № 330—**337** (1970), p. 1—2.

[5] D. S. Mitrinović (P. M. Vasić), *Analytic Inequalities*, Berlin — Heidelberg — New York 1970, p. 55, **2.9**, Th. 1.

SUR L'EXISTENCE DES TRIANGLES DONT LES CÔTÉS SONT LES FONCTIONS DONNÉES

V. T. Janekoski

Résumé

Soient $a_k = B_kC_k$. $b_k = C_kA_k$, $c_k = A_kB_k$ les côtés des triangles $A_kB_kC_k$ $(k=1, 2, \ldots, n \geqslant 2)$. Qu'il soit emplie une des conditions suivantes:

i) tous les triangles $A_kB_kC_k$ sont acutangles,

ii) au moins un des triangles $A_kB_kC_k$ est acutangle, tous les autres sont rectangles.

Dans ce Note on démontre que les conditions i) ou ii) sont les conditions suffisantes pour l'éxistence du triangle XYZ avec les côtés $x=YZ$, $y=ZX$, $z=XY$, définis par les égalités (1).