ЗА СВОЈСТВЕНИ И СИНГУЛАРНИ ВРЕДНОСТИ НА $n \times n$ МАТРИЦА

Пано Д. Кржоски

Ако A е $n \times n$ матрица тогаш со A^* се означува коњугирано транспонованата матрица.

Дефиниција 1. Ако A е $n \times n$ матрица тогаш сингуларни вредности од A се ненегативни броеви $s_1, s_2, \ldots, s_n$ така што $s_1^2, s_2^2, \ldots, s_n^2$ се својствени вредности за матрицата AA^* [1].

Дефиниција 2. Ако A е n-квадратна матрица $per\, A$ е дефинирано со

$$per\, A = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)},$$

каде што сумирањето се врши по S_n а, S_n е симетрична група.

Позната е следната

Особина 1, Ако A е $n \times n$ матрица тогаш AA^* е хермитска и позитивно дефинитна.

Ние овде ќе ја докажеме следната

Особина 2. Ако A е $n \times n$ матрица со сингуларни вредности $a_1, a_2, \ldots, a_n$ тогаш матрицата

$$C = \begin{bmatrix} 0 & A \\ A^* & 0 \end{bmatrix}$$

е хермитска со сојствени вредности $a_1, a_2, \ldots, a_n, -a_n, \ldots, -a_1$.

Доказ: Дека матрицата C е хермитска е очевидно. Исто така познато е дека за хермитската матрица A постојат унитарни матрици U и V со особина

$$UAV = diag(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Во врска со тоа добиваме

$$\begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & V^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & A \\ A^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & V^* \end{bmatrix}^* =$$

$$= \begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & V^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & A \\ A^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^* & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & UA \\ V^*A^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^* & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & UAV \\ V^*A^*U^* & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & UAV \\ (UAV)^* & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \begin{matrix} \alpha_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \dots & \alpha_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} \alpha_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \dots & \alpha_a \end{matrix} & 0 \end{bmatrix}$$

За оваа матрица може да се најде пермутациона матрица P така што

$$P \begin{bmatrix} 0 & \begin{matrix} \alpha_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \dots & \alpha_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} \alpha_1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \alpha_n \end{matrix} & 0 \end{bmatrix} P^T = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & & & & & \\ \alpha_1 & 0 & & & & & \\ & & 0 & \alpha_2 & & & \\ & & \alpha_2 & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 0 & \alpha_n \\ & & & & & \alpha_n & 0 \end{bmatrix}.$$

Ако ја обележиме последната матрица со D лесно се увидува дека својствените вредности на таа матрица, ќе бидат корени на равенката

$$|\lambda I - D| = \prod_{i=1}^{n} (\lambda^2 - a_i^2) = 0,$$

од каде непосредно следува тврдењето.

Со оглед на тоа дека

$$det\, D = (-1)^n \alpha_1^2 \alpha_2^2 \cdots \alpha_n^2$$

и дека

$$per\, D = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}\, \alpha_1^2 \cdot \alpha_2^2, \dots, \alpha_n^2$$

важи неравенството

$$per\, D \geqslant det\, D.$$

ЛИТЕРАТУРА

1] Markus M. and Minc H., A survey of Marix theory and Matrlx inequalities, Allyn and Bacon, inc. Boston, 1964.

ON EIGENVALUES AND SINGULAR VALUES OF $n \times n$ MATRICIES

Kržovski D. Pano

ABSTRACT

In this paper it is shown if A is $n \times n$ Matrix with singular values $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ then $\begin{bmatrix} 0 & A^* \\ A^* & 0 \end{bmatrix}$ is Hermitian matrix with eigenvalues $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, -\alpha_n \ldots, -\alpha_1$.