ФОРМИРАЊЕ НА ЛИНЕАРНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ ЧИИ ИНТЕГРАЛИ СЕ ПРОИЗВОДИ ОД ИНТЕГРАЛИТЕ НА ЛИНЕАРНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ ОД ВТОР И ТРЕТ РЕД

Марија Х. Кујумџиева — Николоска

Во [1] Д. С. Митриновиќ и П. М. Васиќ имаат добиено диференцијални равенки од четврти ред чии интеграли се производи од интегралите на линеарните диференцијални равенки:

$$u'' = a(x)\,u \tag{1}$$

$$v'' = b(x)\,v \tag{2}$$

каде што $a(x) \neq b(x)$.

Понатаму тие имаат добиено линеарна диференцијална равенка од шести ред чии интеграли се производи од интегралите на диференцијалните равенки

$$u'' = a(x)\,u \quad \text{и} \quad v''' = b(x)\,v.$$

Во [2] И. А. Шапкарев има добиено линеарни диференцијални равенки од повисок ред чии интеграли се квадрати односно кубови од интегралите на диференцијалната равенка

$$z''' = f(x)\,z' + g(x)\,z$$

и квадрати од интегралите на диференцијалната равенка

$$z^{(4)} = f(x)\,z'' + g(x)\,z' + h(x)\,z.$$

Во овој труд, применувајќи го методот на И. А. Шапкарев од [2] добиваме:

1. Линеарни диференцијални равенки со особина нивните интеграли да бидат производи од квадратите на интегралите на равенката (1) и интегралите на равенката (2).

2. Линеарни диференцијални равенки чии интепрали се произволи од интегралите на равенката (1) и интегралите на равенката

$$(3) \qquad v''' = b(x)\, v' + c(x)\, v.$$

1. Ќе покажеме дека равенките

$$(1.1)\quad 192\,(a-b)^2\, q y^{VI} - 192\, q'\,(a-b)^2\, y^{V} - By^{IV} - Cy''' - Dy'' - Ey' - Fy = 0$$

за $q \neq 0$ и

$$(1.2)\quad 12\,(a-b)\, y^{V} - 15\,(a'-b')\, y^{IV} - 40\,(a-b)\,(2a+b)\, y''' - 30\,(2aa' + 6\,ab' - 7\,a'\,b - bb')\, y'' - [4\,(a-b)\;(30\,a'' + 9b'' - 20ab - 7b^2) - 30\,(a'-b')\;(4a' + b')]\; y' - [4\,(a-b)\,(6\,a''' + 3b''' - 16aa' + 12a'\,b - 20\,ab' - 28\,bb') - 15\,(a'-b')\;(2a'' + b'' - 4\,ab - 5b^2)]y = 0$$

за $q = 0$, каде што

$$q = 60\,(a'-b')^2 + 64\,(a-b)^2\,(b-4a) + 48\,(a-b)\;(b''-a''),$$

$$B = 240\,(a-b)\;(a''-b'') + 640\,(a-b)^2\; q\,(2a+b) - 240\,(a-b)\times (a'-b')\; q' + 60\,(a'-b')^2\; q - q^2,$$

$$C = 160\, q\,(a-b)\;(22\,aa' + 12ab - 24\,a'\,b - 12\,bb') - 640\,(a-b)^2 \times (2\,a+b)\, q',$$

$$D = -16\, q\,(a-b)\,(60\,a'^2 - 60\;a'\,b' - 216\,ab'' + 330\;a''\,b - 180\,aa'' + 390\,bb'' + 80\,a^2\,b - 52\,ab^2 + 28\,b^3) - [16\,q'\;(a-b) + 4\,q\;(b'-a')] \times 30\,(2\,aa' + 6\,ab' - 7\,a'\,b - bb') + q^2\,(12\,a - 2\,b),$$

$$E = 16\,(a-b)\, q\,[(a-b)\;(96\,a''' + 24\,b''') + (-90\,a''\,a' - 60\,a''\,b' + 141\,a'\,b'' + 9b'\,b'' - 204\,aa'\,b + 20\,abb' + 25\,a'\,b^2 + 123\,b'\,b^2 + 64\,a^2\,a')] - [16\,q'\,(a-b) + 4\,q\,(b'-a')]\;[12\,(a-b)\;(10\,a'' + 3\,b'' + 4\,ab - 5\,b^2) - 30\,(a'-b')\;(4\,a' + b') - 32\,(a-b)^2\, b] + q^2\,(8\,a' - 2\,b'),$$

$$F = 16\,(a-b)\, q\,[27\,(a'-b')\;(2\,a''' + b''' - 4\,a'\,b - 4\,ab' - 10\,bb') + 12\,(a-b)\;(2\,a^{IV} + b^{IV} - 4\,a''\,b - 8\,a'\,b' - 4\,ab'' - 10b'^2 - 10\,bb'') - 15\,(a''-b'')\;(2\,a'' + b'' - 4\,ab - 5\,b^2) + 8\,(a'-b')\times(-8\,aa' + 12\,a'\,b - 4\,ab' + bb') + 8\,(a-b)\;(-8\,a'^2 + 8\,aa'' + 12\,a''\,b + 16\,a'b' - 4\,ab'' + bb'' + b'^2)] - [16\,q'\,(a-b) + 4\,q\,(b'-a')]\times[12\,(a-b)\,(2\,a''' + b''' - 4a'\,b - 4\,ab' - 10\,bb') - 15\,(a-b)\times(2\,a'' + b'' - 4\,ab - 5\,b^2) + 8\,(a-b)\;(-8\,aa' + 12\,a'\,b - 4ab' + bb')] + q^2\,(2\,a'' - b'' + 12\,ab - 5\,b^2)$$

имаат интеграли кои се производи од квадратите на интегралите на равенката (1) и интегралите на равенката (2).

За да го награвиме тоа постапуваме на следниот начин: ставаме $y = u^2 v$, каде u и v се соодветно било кои решенија на равенките (1) и (2). Со диференцирање добиваме:

$$
\begin{aligned}
A_0 &= u^2 v, \\
A_1 &= u^2 v' + 2\, uu' v, \\
A_2 &= 2\, u'^2 v + 4\, uu' v', \\
A_3 &= 6\, u'^2 v' + 4\,(a - b)\, uu' v, \\
A_4 &= 16\,(a - b)\, uu' v' + 4\,(b' - a')\, uu' v, \\
A_5 &= quu' v, \\
A_6 &= 0 \text{ за } q \neq 0
\end{aligned}
$$

при тоа

$$
\begin{aligned}
A_0 &= y, \\
A_1 &= y', \\
A_2 &= y'' - (2\,a + b)\, y, \\
A_3 &= y''' - (6\,a + b)\, y' - (2\,a' + b')\, y, \\
A_4 &= y^{IV} - (4\,a + 6\,b)\, y'' - (8\,a' + 2\,b')\, y' - (2a'' + b'' - 4ab - 5b^2) y, \\
A_5 &= 12\,(a - b)\, y^{V} - 15\,(a' - b')\, y^{IV} - 40\,(a - b)\,(2\,a + b)\, y''' - \\
&\quad - 30\,(2\,aa' + 6\,ab' - 7\,a' b - bb')\, y'' - [12\,(a - b)\,(10a'' + \\
&\quad + 3\,b'' - 4\,ab - 5\,b^2) - 30\,(a' - b')\,(4\,a' + b') - 32\,(a - b)^2 b] \times \\
&\quad \times y' - [12\,(a - b)\,(2\,a''' + b''' - 4\,a' b - 4\,ab' - 10\,bb') - 15\,(a' - \\
&\quad - b')\,(2\,a'' + b'' - 4\,ab - 5b^2) + 8\,(a - b)\,(-8\,aa' + 12a' b - \\
&\quad - 4\,ab' + bb')]\, y,
\end{aligned}
$$

$$A_6 = 192\,(a - b)^2 q y^{VI} - 192\,q'\,(a - b)^2 y^{V} - By^{IV} - Cy''' - Dy'' - Ey' - F.$$

Ако $q = 0$ следува дека $A_5 = 0$, т.е. се добива равенката (1.2). За $q \neq 0$ се добива равенката $A_6 = 0$ т.е. равенката (1.1).

Од начинот на кој се добиваат равенките (1.1) и (1.2) јасно е дека нивните интеграли се производи од квадратот на интегралите на равенката (1) со интегралите од равенката (2).

2. На ист начин како и во претходниот случај, тргнувајќи од $y = uv$, каде што u и v се соодветно решенија на равенките (1) и (3), со диференцирање добиваме

$$A_0 = uv,$$
$$A_1 = u'\, v + uv',$$
$$A_2 = 2\, u'\, v' + uv'',$$
$$A_3 = (2\, a + b)\, uv' + 3\, u'\, v'',$$
$$A_4 = uv'\,(2\, a' + b' - 3\, c) + u'\, v'\,(2\, b - 8a) \text{ за } p \neq 0 \text{ и } b \neq 4a,_1$$
$$A_4^0 = 0 \text{ за } p = 0 \text{ и } b = 4\, a,$$
$$A_4^1 = puv' \text{ за } p \neq 0 \text{ и } b = 4a,$$
$$A_5 = ruv' \text{ за } p \neq 0,\ b \neq 4a \text{ и } r \neq 0,$$
$$A_5^0 = 0 \text{ за } p \neq 0,\ b \neq 4a \text{ и } r = 0,$$
$$A_5^1 = p^2\, u'\, v' \text{ за } p \neq 0 \text{ и } b = 4a,$$
$$A_6 = 0 \text{ за } p \neq 0,\ b \neq 4a \text{ и } r \neq 0,$$
$$A_6^1 = 0 \text{ за } p \neq 0 \text{ и } b = 4\, a,$$

при тоа

$$A_0 = y,$$
$$A_1 = y',$$
$$A_2 = y'' - ay,$$
$$A_3 = y''' - ay' - (a' + c)\, y,$$
$$A_4 = y^{IV} - (6\, a + b)\, y'' - (2a' + 4c)\, y' - (a'' + c' - 5a^2 - ab)\, y,$$
$$A_4^0 = A_4^1 = A_4,$$
$$A_5^1 = -py^{V} + p'\, y^{IV} + p\,(a + b)\, y''' + [p^2 + p\,(8\, a' + b' + 4c) - p'\,(6\, a + b)]\, y'' + [p\,(3\, a'' + 5\, c' - 5\, a^2 - ab) - p'\,(2a' - 4c)]\, y' + [p\,(a''' + c''' - 10\, aa' - a'\, b - ab') - p'\,(a'' + c' - 5a^2 - ab) - ap^2]\, y \text{ за } p \neq 0 \text{ и } b - 4a = 0,$$

$$A_5 = 3\,(2\, b - 8a)\, y^{V} - 3\,(b' - 10\, a' + 3c)\, y^{IV} - (2\, b - 8a) \times (10\, a + 5\, b)\, y''' - 3\,(20\, a'\, b - 80\, aa' + 5\, bb' - 10\, ab' + 5bc + 18\, ac - 4\, ab - 24\, a^2)\, y'' - [(2b - 8a)\,(9a'' + 15\, c' - 7a^2 - 5\, ab) - 3\,(b' - 4\, a + c)\,(2\, a' + 4\, c)]\, y - [(2\, b - 8a)\,(3a''' + 3\, c'' - 28\, aa' - 5\, a'\, b - 6ab' + 17\, ac - 2\, bc) - 3\,(b' - 4\, a + 3\, c)\,(a'' + c' - 5a^2 - ab) y \text{ за } b - 4\, a \neq 0,$$

$$A_6^1 = -3\, p^2\, y^{VI} + 6\, pp'\, y^{V} + (15\, ap^2 + 4\, bp^2 + 3\, pp'' - 6\, p'^2)\, y^{IV} + (42\, a'\, p^2 + 6\, b'\, p^2 + 12\, cp^2 - 36\, app' - 6\, pp'\, b + 2\, p^3)\, y''' + (33\, p^2\, a'' + 3\, b''\, p^2 + 27\, c'\, p^2 - 48\, pp'\, a' - 6\, pp'\, b' - 24pp'\, c - 18\, pp''\, a - 3\, pp''\, b - 9a^2\, p^2 - 6\, abp^2 - p^2\, b^2 - 36\, p'^2 - 6\, p'^2)\, y'' + [3p^2\,(4a''' + 6c'' - 20\, aa' - 2\, a'\, b - 2ab') - 6pp' \times (3\, a'' + 5\, c - 5a^2 - ab) - (3\, pp'' - p^2\, a + p^2\, b - 6\, p'^2)\,(2a' + 4c) - 2\, p^3\, a]\, y' + [3\, p^2\,(a^{IV} + c''' - 10\, a'^2 - 10aa'' - a''\, b - 2a'\, b' - ab'') - 6\, pp'\,(a''' - c''' - 10\, aa' - a'\, b - ab') - (3pp'' - p^2\, a + p^2\, b - 6\, p'^2)\,(a'' + c - 5\, a^2 - ab) + p^3\,(a' - c) + 3\, p^3\, a']\, y, \text{ за } b - 4\, a = 0 \text{ и } p \neq 0.$$

$$A_6 = [3r(2b - 8a)^2]\, y^{VI} + [3(2b - 8a)^2 r']\, y^{V} - [r(2b - 8a) \times$$
$$\times (3b'' - 30a'' + 9c'') + r(2b - 8a)^2 (10a + 5b) - 3r \times$$
$$(2a' + b' - 3c)(b' - 10a' - 3c) - 3r'(2b - 8a)(b' - 10a' +$$
$$+ 3c) + r^2]\, y^{IV} - Py''' - Qy'' - Ry' - Sy, \text{ за } p \neq 0,\ b - 4a \neq 0,$$

каде што е:

$$P = r(2b - 8a)(2b' - 8a')(10a + 5b) + r(2b - 8a)^2 \times$$
$$\times (10a' + 5b') - 3r(2b - 8a)(20a'b - 8aa' + 5bb' - 10ab' +$$
$$+ 5bc + 18ac - 4ab - 24a^2) - r(2b - 8a)(10a + 5b)$$
$$(2a' + b' - 3c) - r'(2b - 8a)^2 (10a + 5b),$$

$$Q = 3r(2b - 8a)(20a''b + 20a'b' - 80a'^2 - 80aa'' + 5b^2 +$$
$$+ 5bb'' - 10a'b' - 10ab'' + 5b'c + 5bc' + 18a'c + 18ac' -$$
$$- 4a'b - 4ab' - 48aa') + r(2b - 8a)^2 (9a'' + 15c' - 7a^2 -$$
$$- 5ab) - 3r(2b - 8a)(b' - 4a + c)(2a' + 4c) - 3r(2a' + b' -$$
$$- 3c)(20a'b - 8aa' + 5bb' - 10ab' + 5bc + 18ac - 4ab -$$
$$- 24a^2) - 3r'(2b - 8a)(20a'b - 8aa' + 5bb' - 10ab' +$$
$$+ 5bc + 18ac - 4ab - 24a^2) - r^2(6a + b),$$

$$R = r(2b - 8a)(2b' - 8a')(9a'' + 15c - 7a^2 - 5ab) +$$
$$+ r(2b - 8a)^2 (9a'' + 15c'' - 14aa' - 5a'b - 5ab') -$$
$$- 3r(2b - 8a)(b'' - 4a' + c)(2a' + 4c) - 3r(2b - 8a) \times$$
$$\times (b' - 4a + c)(2a'' + 4c') + r(2b - 8a)^2 (3a''' + 3c'' -$$
$$- 28aa' - 5a'b - 6ab' + 17ac - 2bc) - 3r(2b - 8a) \times$$
$$\times (b' - 4a + 3c)(a'' - c' - 5a^2 - ab) - r(2a' + b - 3c) \times$$
$$\times (2b - 8a)(9a'' + 15c' - 7a^2 - 5ab) - r'(2b - 8a)^2 (9a'' +$$
$$+ 15c' - 7a^2 - 5ab) + 3r(2a' + b' - 3c)(b' - 4a - c) \times$$
$$\times (2a' + 4a) + 3r'(2b - 8a)(b' - 4a + c)(2a' + 4c) -$$
$$- r^2(2a' + 4c),$$

$$S = r(2b - 8a)[(2b' - a')(3a''' + 3c'' - 28aa' - 5a'b - 6ab' +$$
$$+ 17ac - 2bc) + (2b - 8a)(3a^{IV} + 3c''' - 28a'^2 - 28aa'' -$$
$$- 5a''b - 11a'b' - 6ab'' + 17a'c + 17ac' - 2b'c -$$
$$- 2bc') - 3(b'' - 4a' - 3c')(a'' + c' - 5a^2 - ab) -$$
$$- 3(b' - 4a - 3c).(a''' + c'' - 10aa' - a'b - ab')] -$$
$$- [r(2a' + b' - 3c) + r'(2b - 8a)][(2b - 8a)(3a''' - 3c'' -$$
$$- 28aa' - 5a'b - 6ab' + 17ac - 2bc) - 3(b' - 4a + 3c) \times$$
$$\times (a'' + c' - 5a^2 - ab)] - r^2(a'' + c' - 5a^2 - ab) - r^2(2b - 8a)a,$$

$$r = (6a'' + 3b'' - 9c' + 10\,ab - 8a^2 - 2b^2)\,(2b - 8a) - 3(b' - 10a' + \\ + 3c)\,(2\,a' + b - 3\,c),$$

$$p = 2\,a' + b' - 3\,c,$$

Така ги добиваме равенките:

(2.1) $y^{IV} - (6\,a + b)\,y'' - (2a' + 4c)\,y' - (a'' + c' - 5a^2 - ab)\,y = 0,$ за $b = 4a,\ p = 0,$

(2.2) $3\,p^2\,y^{IV} - 6pp'\,y^{V} - (15\,ap^2 + 4\,bp^2 + 3pp'' - 6p'^2)\,y^{IV} - (42a'p^2 + + 6\,b'\,p^2 + 12\,p^2\,c - 36\,app' - 6\,bpp' + 2\,p^3)\,y''' - (33\,p^2\,a'' + + 3\,b''\,p^2 + 27\,c'\,p^2 - 48\,pp'\,a' - 6\,pp'\,b' - 24\,pp'\,c - 18\,pp''\,a - - 3\,pp''\,b - 9a^2\,p^2 - 6abp^2 - p^2\,b^2 - 36\,p'^2 - 6p'^2)\,y'' - [3p^2\,(4a''' + + 6c'' - 20\,aa' - 2a'\,b - 2ab') - 6\,pp'\,(3\,a'' + 5\,c - 5\,a^2 - ab) - - (3\,pp'' - p^2\,a + p^2\,b - 6\,p'^2)\,(2a' + 4c) - 2p^3\,a]\,y' - [3p^2\,(a^{IV} + + c''' - 10\,a'^2 - 10aa'' - a''\,b - 2a'\,b' - ab'') - 6\,pp'\,(a''' - c'' - - 10\,aa' - a'\,b - ab') - (3\,pp'' - p^2\,a + p^2\,b - 6p'^2)\,(a'' + c' - - 5a^2 - ab) + p^3\,(a' - c) + 3\,p^3\,a']\,y = 0,$ за $b = 4a,\ p \neq 0.$

(2.3) $3\,(2\,b - 8a)\,y^{V} - 3\,(b' - 10\,a' + 3c)\,y^{IV} - (2b - 8a)\,(10a + 5b)\,y''' - - 3\,(20\,a'\,b - 8\,aa' + 5\,bb' - 10\,ab' + 5\,bc + 18\,ac - 4ab - - 24\,a^2)\,y'' - [(2\,b - 8a)\,(9\,a'' + 15\,c' - 7\,a^2 - 5\,ab) - 3\,(b' - 4a + + c)\,(2\,a' + 4\,c)]\,y - [(2\,b - 8\,a)\,(3\,a''' + 3\,c'' - 28\,aa'' - 5\,a'\,b - - 6\,ab' + 17\,ac - 2\,bc) - 3\,(b' - 4a + 3\,c)\,(a'' + c' - 5a^2 - ab) \times \times y = 0,\ 3ab \neq 4a,\ r = 0.$

(2.4) $3\,r\,(2\,b - 8a)^2\,y^{VI} + 3\,(2\,b - 8a)^2\,r'\,y^{V} - [r\,(2\,b - 8a)\,(3\,b'' - 30a'' + + 9c'') + r\,(2\,b - 8\,a)^2\,(10\,a + 5\,b) - 3r\,(2a' + b' - 3c)\,(b' - - 10a' - 3c) - 3r'\,(2\,b - 8a)\,(b' - 10\,a' + 3c) + r^2\,y^{IV} - Py''' - Qy'' - Ry' - Sy = 0,$ за $r \neq 0,\ b \neq 4a.$

Од начинот на добовањето на равенките (2.1), (2.2), (2.3) и (2.4), јасно е дека нивните интеграли се производи од интегралите од равенките (1) и (3).

Забелешка: Да спомнеме и тоа, дека работевме и на проблемот за добивање на диференцијални равенки со особина нивните интеграли да бидат производ од интегралите на равенките (1), (2) и равенката $w'' = c\,(x)\,w$, и при тоа се добиваат равенки од петта, шеста, седма и осма степен. Постапката е иста како и во претходните случаи 1 и 2., а поради ограниченоста на просторот во овој труд не ги наведуваме.

ЛИТЕРАТУРА

[1] D. S. Mitrinović et P. M. Vasić, Compléments au traité de Kamke. XI, Matematički vesnik, 1 (16), 1964, str. 181—185, Beograd.

[2] И. А. Шапкарев, За линеарни диференцијални равенки чии интграли се втори и трети степени од интегралите на линеарни диференцијални равенки од трет и четврти ред, Годишен зборник на Електро-машинскиот факултет на Универзитетот во Скопје, Книга 3 (1969).

Marija H. Kujumdžieva-Nikoloska

SUR LA FORMATION DES ÉQUATIONS LINÉAIRES DIFFÉRENTIELLES DONT LES INTÉGRALES SONT PRODUITS DES INTÉGRALES DES ÉQUATIONS LINÉAIRES DIFFÉRENTIELLES DES ORDRES 2 ET 3

Résumé

Dans sette note on démontre que les équations linéaires différentielles (1.1) et (1.2) ont comme intégrales le produit des intégrales au carré, d'équation (1) et des intégrales d'équation (2).

Puis on démontre aussi que les équations linéaires différentielles (2.1), (2.2), (2.3) et (2.4) ont comme intégrales le produit des intégrales d'équation (1) et des intégrales d'équation (3).