МАТЕМАТИЧКИ ВЕСНИК
13 (28) 1976. стр. 289—293.

Петар Р. Лазов

ТЕОРЕМА О ФАКТОРИЗАЦИЈИ ЈЕДНЕ КЛАСЕ ПОЛИНОМИЈАЛНИХ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ОПЕРАТОРА ТРЕЋЕГ РЕДА

(Примљено 9. децембра 1975)

1. Посматрајмо диференцијални оператор трећег реда

$$P(D)=D^3+3A_1D^2+A_2D+A_3 \quad \left(D=\frac{d}{dx}\right), \tag{1.1}$$

где су $A_1(x)$, $A_2(x)$ и $A_3(x)$ полиноми по x респективно степена a_1, a_2 односно a_3 ($a_1, a_2, a_3=0, 1, 2, \ldots$). Претпоставимо да се оператор (1.1) може написати у облику

$$P(D)=(D+\beta_2)(D^2+\alpha_1D+\alpha_0), \tag{1.2}$$

где су $\beta_2(x)$, $\alpha_1(x)$ и $\alpha_0(x)$ полиноми по x. Из услова једнакости (1.1) и (1.2) налазимо следећи систем једначина

$$\alpha_1+\beta_2=3A_1$$

$$\alpha_1\beta_2+\alpha_1'+\alpha_0=A_2 \quad \left(\alpha'=\frac{d\alpha}{dx}\right)$$

$$\alpha_0'+\alpha_0\beta_2=A_3.$$

Сменом $\alpha_2-A_1=y$ из овог система налазимо:

$$\beta_2=y+A_1$$

$$\alpha_1=2A_1-y$$

$$(*)\ \ldots \qquad \alpha_0=y^2-A_1y+y'+A_2-2A_1^2-2A_1',$$

где је $y=y(x)$ одређено једначином

$$(1.3) \qquad \begin{aligned} &y^3+B_1y+3yy'+y''=\Delta_3 \\ &B_1=A_2-3A_1^2-3A_1' \end{aligned}$$

$$(1.3\text{ а}) \qquad \Delta_3=A_3+2A_1^3-A_1A_2+6A_1A_1'+2A_1''-A_2'.$$

Да би претпостављена факторизација била могућа, потребно је да једначина (1.3) има бар једно полиномијално решење за $y=y(x)$. Ако такво решење егзистира, тада су полиноми β_2, α_1 и α_0 одређени са (*).

2. Размотримо случај када за бројеве a_1, a_2 и a_3 важи

$$a_1 < \frac{1}{2} \cdot \frac{a_3}{3}, \quad a_2 < \frac{a_3}{3}. \tag{2.1}$$

Једначина (1.3) под претпоставком да важи (2.1), може имати полиномијална решења само ако је број a_3 дат као [2]:

$$a_3 = 3\,m, \qquad m = 1,\ 2,\ 3, \ldots. \tag{2.2}$$

Ако важи (2.1), а (2.2) није испуњено, тада она не може имати полиномијална решења.

Претпоставимо да су оба ова два услова испуњена. Тада једначину (1.3) могу задовољити полиноми реда m. Под овим условима за степене полинома B_1 и Δ_3 важи

$$st\,B_1 = b_1 < m. \qquad st\,\Delta_3 = 3\,m.$$

Дефиниција: Ако је $R_{3m}(x)$ полином степена $3\,m\,(m = 0,\ 1,\ 2, \ldots)$, тада са $[\sqrt[3]{R_{3m}(x)}]$ означавамо полиномијални део развоја $\sqrt[3]{R_{3m}(x)}$ по целим степенима од x. Тако је на пример

$$[\sqrt[3]{x^3 - 3\,x^2 + 3\,x + 7}\,] = x - 1.$$

У [2] показали смо да једначину (1.3) за коју важе (2.1) и (2.2), могу задовољити само полиноми

$$y = \omega_\nu\, S_3, \qquad S_3 = [\sqrt[3]{\Delta_3}],$$

где су $\omega_\nu\,(\nu = 1,\ 2,\ 3)$ корени једначине $\omega^3 = 1$.

Одредимо полином Q_3 на следећи начин:

$$\Delta_3 = S_3{}^3 + Q_3, \quad S_3 = [\sqrt[3]{\Delta_3}]. \tag{2.3}$$

Сада имамо следећи резултат.

Лема 1. *Диференцијална једначина* (*1.3*) *за коју важе услови* (*2.1*) *и* (*2.2*) *има полиномијална решења, ако и само ако за неко* $\nu\,(\nu = 1,\ 2,\ 3)$ *важи*

$$\omega_\nu\, B_1\, S_3 + 3\,\omega_\nu{}^2\, S_3\, S_3{}' + \omega_\nu\, S_3{}'' = Q_3, \tag{2.4}$$

где су полиноми S_3 *и* Q_3 *одређени са* (2.3), *полином* B_1 *са* (1.3 а), *а* $\omega_\nu\,(\nu = 1,\ 2,\ 3)$ *корени једначине* $\omega^3 = 1$.

Доказ: Релација (2.4) може се написати као

$$(\omega_\nu\, S_3)^3 + B_1\, \omega_\nu\, S_3 + 3\,\omega_\nu{}^2\, S_3\, S_3{}' + \omega_\nu\, S_3{}'' = Q_3 + S_3{}^3 \quad \text{т.ј.}$$

$$(\omega_\nu\, S_3)^3 + B_1\,(\omega_\nu\, S_3) + 3\,(\omega_\nu\, S_3)\,(\omega_\nu\, S_3{}') + (\omega_\nu\, S_3{}'') = \Delta_3,$$

одакле излази да $y = \omega_\nu\, S_3$ задовољава једначину (1.3). Ако сада са $y = \omega_\nu\, S_3$ уђемо у једначину (1.3), помоћу (2.3) лако долазимо до (2.4). Обзиром да једначину (1.3) под овим условима могу задовољити само полиноми $y = \omega_\nu\, S_3$, овим је доказ завршен.

Полиноми β_2, α_1 и α_0 су при томе дати као

$$\beta_2 = A_1 + \omega_\nu S_3$$
$$\alpha_1 = 2A_1 - \omega_\nu S_3$$
$$\alpha_0 = \omega_\nu^2 S^2 - A_1 \omega_\nu S + \omega_\nu S' + (A_2 - 2A_1^2 - 2A_1'). \tag{2.5}$$

3. Посматрајмо сада диференцијални бином који се јавља у (1.2)

$$Q(D) = D^2 + \alpha_1 D + \alpha_0. \tag{3.1}$$

Да би се овај оператор могао записати у облику

$$Q(D) = (D + \beta_1)(D + \beta_0), \tag{3.2}$$

где су $\beta_1(x)$ и $\beta_0(x)$ полиноми по x, једначина

$$z^2 + 2z' = \Delta_2 \tag{3.3}$$

$$\Delta_2 = \alpha_1^2 + 2\alpha_1' - 4\alpha_0, \tag{3.3 a}$$

треба имати бар једно решење за $z(x)$ у облику полинома по x. Лако се показује [1] да она може имати полиномијална решења, само ако за степен полинома Δ_2 важи

$$st\, \Delta_2 = 2k, \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots . \tag{**}$$

Ако је $z(x)$ полиномијално решење једначине (3.3), тада су полиноми β_1 и β_0 дати као

$$\beta_1 = \frac{1}{2}(\alpha_1 + z)$$
$$\beta_0 = \frac{1}{2}(\alpha_1 - z). \tag{***}$$

Ако важе (2.1) и (2.2) и ако су испуњени услови леме 1., тада на основу (2.5) излази да су полиноми β_2, α_1 и α_0 респективно степена m, m односно $2m$. То значи да полиноми α_1 и α_0 одређени са (2.5), задовољавају услов (**). У [1] показано је да једначину облика (3.3) могу задовољити само полиноми

$$y = \pm S_2, \qquad S_2 = [\sqrt{\Delta_2}].$$

Ако одредимо полином Q_2 помоћу релације

$$\Delta_2 = S_2^2 + Q_2, \qquad S_2 = [\sqrt{\Delta_2}], \tag{3.4}$$

тада имамо следећи резултат.

Лема 2. *Диференцијална једначина* (3.3) *за коју важи услов* (**), *има полиномијална решења ако и само ако за неко i ($i = 1, 2$) важи*

$$2\Omega_i S_2' = Q_2, \tag{3.5}$$

где су полиноми S_2 и Q_2 одређени са (4.4), *а Ω_i ($i = 1, 2$) — корени једначине $\Omega^2 = 1$ ($\Omega_1 = 1$, $\Omega_2 = -1$).*

Доказ: Релација (3.5) може се записати као

$$(\Omega_i S_2)^2 + 2\Omega_i S_2' = Q_2 + S_2^2 \quad \text{тј.}$$
$$(\Omega_i S_2)^2 + 2(\Omega_i S_2)' = \Delta_2,$$

одакле излази да $z=\Omega_i S_2$ задовољава једначину (3.3). Ако пак са $z=\Omega_i S_2$ уђемо у једначину (3.3), помоћу (3.4) лако долазимо до (3.5). Обзиром да једначину (3.3) могу задовољити само полиноми $z=\Omega_i S_2$, овим је доказ завршен.

Полиноми β_1 и β_0 су при томе, на основу (***), дати као

$$\beta_1=\frac{1}{2}(\alpha_1+\Omega_i S_2)$$

$$\beta_0=\frac{1}{2}(\alpha_1-\Omega_i S_2). \tag{3.6}$$

Ако су испуњени услови леме 1., тада се диференцијални оператор (1.1) може писати у облику (1.2). Ако су испуњени услови леме 2., тада се диференцијални оператор (3.1) факторизира на облик (3.2). Ако су пак једновремено испуњени услови како леме 1. тако и леме 2., тада се оператор (1.1) може записати као

$$p(D)=(D+\beta_2)(D+\beta_1)(D+\beta_0), \tag{3.7}$$

где су полиноми β_2, β_1 и β_0 одређени са (2.5) односно (3.6). На основу свега овога можемо формулисати следећу теорему.

Теорема. *Диференцијални оператор* (1.1), *где су* $A_1(x)$, $A_2(x)$ *и* $A_3(x)$ *полиноми по x, факторизира се на елементарне операторе т.ј. може се писати у облику* (3.7), *где су* $\beta_2(x)$, $\beta_1(x)$ *и* $\beta_0(x)$ *полиноми по x, ако и само ако за неко* ν ($\nu=1, 2, 3$) *и неко* i ($i=1, 2$) *важи*

$$\omega_\nu B_1 S_3+3\,\omega_\nu^2 S_3 S_3'+\omega_\nu S_3''=Q_3 \tag{S}$$

$$2\,\Omega_i S_2'=Q_2. \tag{SS}$$

Овде ω_ν ($\nu=1, 2, 3$) су корени једначине $\omega^3=1$, Ω_i ($i=1, 2$) — корени једначине $\Omega^2=1$, S_3, Q_3 и B_1 полиноми одређени са (2.3) односно (1.3 а), S_2 и Q_2 полиноми одређени помоћу (3.4) и (3.3 а). Полиноми β_2, β_1 и β_0 из (3.7), дати су релацијама (2.5) односно (3.6). Ако је услов (2.1) испуњен, а услов (2.2) није т.ј. a_3 није мултипл од 3, тада се диференцијални оператор (1.1) не може факторизирати на облик (1.2), па према томе нити на облик (3.7).

Као што видимо, могуће су шест факторизације т.ј. оператор (1.1) може се факторизирати на облик (3.7) на шест различита начина.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Rainville E. D., *The factorization of certain second order polynomial differential operators*, American Mathematical Monthly, Vol. 48, pp. 519—521, 1941.

[2] Лазов П. Р., Димитровски Д. С., *За факторизацијата на една класа диференцијални оператори од трет ред*, Билтен на ДМФ од СРМ, Кн. 25, 1974, 7—8.

Технолошки факултет
91 000 Скопље